MBL/WHOI
0 0301 0014229 5

MATHEMATISCHE

UND

MIKROSKOPISCH-ANATOMISCHE STUDIEN

ÜBER

BLATTSTELLUNGEN

NEBST BETRACHTUNGEN ÜBER DEN

SCHALENBAU DER MILIOLINEN

VON

G. VAN ITERSON, JUN.

IN DELFT.

MIT 16 TAFELN UND 110 TEXTFIGUREN.

VERLAG VON GUSTAV FISCHER IN JENA.

1907.

MATHEMATISCHE

UND

MIKROSKOPISCH-ANATOMISCHE STUDIEN

ÜBER

BLATTSTELLUNGEN

NEBST BETRACHTUNGEN ÜBER DEN

SCHALENBAU DER MILIOLINEN

VON

G. VAN ITERSON JUN.
IN DELFT.

MIT 16 TAFELN UND 110 TEXTFIGUREN.

VERLAG VON GUSTAV FISCHER IN JENA.
1907.

SEINEM VEREHRTEN LEHRER

PROFESSOR DR. M. W. BEIJERINCK

IN DELFT

WIDMET DER VERFASSER DIESE SCHRIFT

ALS

ZEICHEN HERZLICHER DANKBARKEIT.

Vorwort.

Das Gefühl großer Dankbarkeit, das ich für Herrn Professor Dr. M. W. BEIJERINCK hege, habe ich dadurch zum Ausdruck zu bringen gesucht, daß ich meine Arbeit meinem hochverehrten Lehrer gewidmet habe. Denn er ist es gewesen, der mich zur Ausführung dieser Arbeit anregte, indem er mich darauf aufmerksam machte, daß die Schemas von CHURCH für die einfachen Blattstellungen wahrscheinlich eine solche Umarbeitung zuließen, daß sie mit wirklichen Kreisen ausführbar wurden und dadurch eine große Bedeutung für die Lösung der Blattstellungsfrage erlangen konnten. Auch will ich nicht unterlassen, an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen für die zahlreichen weiteren Anregungen, die ich bei der Ausarbeitung meiner Schrift von ihm empfangen habe und das Wohlwollen, mit dem er mir die Zeit und Mittel dafür zur Verfügung gestellt hat. Daß er mir die Bearbeitung dieses Themas, das ihm schon seit Jahren nahe am Herzen lag, überlassen hat und mir mit seiner reichen Kenntnis auf diesem Gebiete behülflich war, kann ich nicht hoch genug schätzen.

Herrn Professor Dr. J. CARDINAAL bezeuge ich meine Erkenntlichkeit für die Ratschläge, die er mir in wohlwollender Weise erteilt hat.

Meinem werten Verleger Herrn GUSTAV FISCHER bringe ich meinen besten Dank dar für das Entgegenkommen, das er meinen Wünschen betreffs der Ausstattung des Buches gezeigt hat.

Herr H. SIEBER in Jena hatte die Freundlichkeit, das Manuskript in sprachlicher Hinsicht durchzusehen.

Delft, den 17. Juni 1907.

G. van Iterson jun.

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY
WOODS HOLE
LIBRARY
MASS.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 1

Erster Teil.

Mathematische Betrachtungen.

Erster Abschnitt.

Einfache Systeme auf einer Kreiszylinderfläche.

Kapitel I. Regelmäßige Punktsysteme auf einer Kreiszylinderfläche . . . 7

§ 1. Fragestellung. § 2. Haupteigenschaften. § 3. Einteilung. § 4. Eigenschaften der einfachen Systeme. § 5. Systeme auf der abgerollten Zylinderfläche. § 6. Sekundäre und konjugierte Spiralen. § 7. Windungsrichtung der Spiralen, sekundäre Divergenz, enzyklische Zahlen. § 8. Die Berechnung der enzyklischen Zahlen Δ_m und Δ_n. § 9. Annäherungswerte für die Divergenz, wenn die m- und die n-zeilige Spirale zugeordnet sind.

Kapitel II. Regelmäßige Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche. Allgemeine Betrachtungen 22

§ 1. Definition. § 2. Allgemeine Eigenschaften. § 3. Dreizähliger Kontakt. § 4. Einführung des Faktors b: Der relative Kreisdurchmesser. Die Beziehung zwischen b und α. § 5. Werte von b und α für dreizählige Kontakte. § 6. Graphische Darstellung. § 7. Die Richtung der Kontaktspiralen bei zweizähligem Kontakte. § 8. Annäherungswerte für die Divergenz beim Kontakte m und n. § 9. Rechtwinklige Kontakte.

Kapitel III. Regelmäßige Systeme tangierender Kreise mit Kontakten aus der Hauptreihe auf einer Kreiszylinderfläche 32

§ 1. Die Hauptreihe. § 2. Berechnung von Δ_m und Δ_n für zweizählige Kontakte aus der Hauptreihe. § 3. Zahlenbeziehung zwischen m und n in der Hauptreihe. § 4. Die Beziehung zwischen b und α für zweizählige Kontakte aus der Hauptreihe. § 5. Dreizählige Kontakte aus der Hauptreihe. § 6. Graphische Darstellung der Beziehung zwischen b und α in der Hauptreihe. § 7. Rechtwinklige Kontakte. § 8. Anfertigung und Beschreibung der geometrischen Konstruktionen. § 9. Näherungswerte für die Divergenz. § 10. Limitwert der Divergenz beim Fortrücken in der Hauptreihe. § 11. Die stetige oder göttliche Proportion, der goldene Schnitt und die goldenen Reihen.

Kapitel IV. Regelmäßige Systeme tangierender Kreise mit Kontakten aus den Nebenreihen auf einer Kreiszylinderfläche 50

§ 1. Nebenreihen. § 2. Berechnung von Δ_m und Δ_n, wenn m und n aufeinander folgende Glieder der Nebenreihe 1, z sind. § 3. Die Beziehung zwischen b und α für zweizählige Kontakte aus der Nebenreihe 1, z. § 4. Eigentümlichkeit des Kontaktes 1 und z. § 5. Dreizählige Kontakte aus der Nebenreihe 1, z. § 6. Die graphische Darstellung der Beziehung zwischen b und α für Kontakte aus der Nebenreihe 1, z. § 7. Rechtwinklige Kontakte aus der Nebenreihe 1, z.

50124

§ 8. Anfertigung und Beschreibung der geometrischen Konstruktionen. Seite
§ 9. Die Berechnung von Δ_m und Δ_n, wenn m und n aufeinander folgende Glieder der Nebenreihe p, q sind. § 10. Konstruktionen und graphische Darstellung in der Nebenreihe p, q. § 11. Berechnung der Limitdivergenz für die Nebenreihe 1, z. § 12. Berechnung der Limitdivergenz für die Nebenreihe p, q.

Kapitel V. Fortsetzung der allgemeinen Betrachtungen über regelmäßige Kreissysteme auf einer Kreiszylinderfläche 60

§ 1. Die Beziehung zwischen b und α in ihrer Gesamtheit. § 2. Die Lage der Parabeln in der Nähe eines dreizähligen Kontaktes. § 3. Einteilung der graphischen Darstellung in viereckige Figuren. § 4. Die verschiedenen regelmäßigen Kreissysteme, die mit ein und demselben bestimmten Wert von α möglich sind. § 5. Die verschiedenen regelmäßigen Kreissysteme, die mit ein und demselben bestimmten Wert von b möglich sind. § 6. Änderung der Kreiskonstruktionen durch kontinuierliche Zu- oder Abnahme von b. § 7. Einführung mechanischer Kräfte. § 8. Verschiebungskurven. § 9. Einige Zahlenbeziehungen.

Kapitel VI. Regelmäßige Systeme tangierender Ellipsen auf einer Kreiszylinderfläche 75

Kapitel VII. Regelmäßige Systeme tangierender Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Kreiszylinderfläche liegen. Zylindrische Kugelsäulen . . . 77

§ 1. Fragestellung. § 2. Ableitung der Formeln für den zweizähligen Kontakt. § 3. Ableitung der Formeln für dreizählige Kontakte. § 4. Die Beziehung zwischen b und α. § 5. Die Gleichung der Verschiebungskurven. § 6. Unterschied und Übereinstimmung zwischen den Eigenschaften der Kugelsäulen und der Kreiskonstruktionen. § 7. Zahlenanwendung auf zweizählige Kontakte. § 8. Zahlenanwendungen auf dreizählige Systeme. § 9. Anfertigung und Beschreibung der geometrischen Konstruktionen. § 10. Der Hohlkern der Kugelsäule und die beiden Zylinderflächen der Berührungspunkte. § 11. Historische Bedeutung der Kugelsäulen für die Theorie der Blattstellungen.

Zweiter Abschnitt.
Einfache Systeme auf einer Ebene.

Kapitel I. Ähnliche Punktsysteme auf einer Ebene 95

§ 1. Definition. § 2. Haupteigenschaften. § 3. Die logarithmische Spirale. § 4. Zugeordnete Spiralen. Hauptspirale. § 5. Einteilung der ähnlichen Punktsysteme. § 6. Numerierung der Punkte. Einführung des Faktors a: das Hauptverhältnis. Die Divergenz. § 7. Sekundäre Divergenz, enzyklische Zahlen. § 8. Die Berechnung der enzyklischen Zahlen Δ_m und Δ_n.

Kapitel II. Die Beziehung zwischen den ähnlichen Punktsystemen auf der Ebene und den regelmäßigen Punktsystemen auf der Kreiszylinderfläche 105

§ 1. Die Abbildung von Schraubenlinien einer Kreiszylinderfläche auf einer Ebene mit Hilfe kleiner ähnlicher Rechtecke. § 2. Die Abbildung von regelmäßigen Punktsystemen einer Kreiszylinderfläche auf einer Ebene mit Hilfe kleiner ähnlicher Rechtecke. § 3. Die Abbildung von Kreisen einer Kreiszylinderfläche auf eine Ebene mit Hilfe kleiner ähnlicher Rechtecke. § 4. Die besprochene Abbildungsmethode und die Kartenprojektion. § 5. Die besprochene Abbildungsmethode von funktionstheoretischem Standpunkt.

Kapitel III. Ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene. Allgemeine Betrachtungen 112

§ 1. Definition. § 2. Läßt sich die Möglichkeit der Existenz von ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Ebene schon voraussagen? § 3. Die Beziehung zwischen a und α für zweizählige Kontakte. § 4. Die Werte von a und α für dreizählige Kontakte. § 5. Einführung des Faktors b für die ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene. § 6. Die Neigung der m- und n-zeiligen Spirale. § 7. Die Richtung der Kontaktspiralen beim dreizähligen Kontakte m, n und $(m+n)$. § 8. Die Richtung der Kontaktspiralen

beim dreizähligen Kontakte ($n - m$), m und n. § 9. Die Richtung der Kontaktspiralen beim zweizähligen Kontakte. § 10. Die Verschiebungskurven. § 11. Einführung von mechanischen Kräften. Seite

Kapitel IV. Ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene. Zahlenanwendungen 123

§ 1. Die Beziehung zwischen a und α für zweizählige Kontakte und deren graphische Darstellung. § 2. Die Berechnung von a und α für dreizählige Kontakte. § 3. Die Beziehung zwischen b und α und deren graphische Darstellung. § 4. Die Ursache der Übereinstimmung in den graphischen Darstellungen der Beziehungen zwischen b und α. § 5. Die Verschiebungskurven. § 6. Anfertigung und Beschreibung der geometrischen Konstruktionen.

Kapitel V. Rechtwinkliger Schnitt der Kontaktspiralen 133

§ 1. Isogonale Kurvensysteme. § 2. Rechtwinkliger Schnitt zugeordneter Spiralen in ähnlichen Punktsystemen auf einer Ebene. § 3. Rechtwinkliger Schnitt von Kontaktspiralen. § 4. Die Konstruktionen von CHURCH.

Dritter Abschnitt.

Einfache Systeme auf einer Kreiskegelfläche.

Kapitel I. Ähnliche Punktsysteme auf einer Kreiskegelfläche 139

§ 1. Definition. § 2. Haupteigenschaften. § 3. Divergenz, Hauptverhältnis, sekundäre Divergenz, enzyklische Zahlen usw. § 4. Die horizontale Projektion ähnlicher Punktsysteme auf einer Kreiskegelfläche. § 5. Systeme auf der abgerollten Kreiskegelfläche.

Kapitel II. Die Beziehung zwischen den ähnlichen Punktsystemen auf einer Kreiskegelfläche, denjenigen auf der Ebene und den regelmäßigen Punktsystemen auf einer Kreiszylinderfläche 144

§ 1. Die Ebene und die Kreiszylinderfläche als besondere Fälle der Kreiskegelfläche betrachtet. § 2. Die konforme Abbildung mittels kleiner ähnlicher Rechtecke. § 3. Die beschriebenen Abbildungen von funktionstheoretischem Standpunkt.

Kapitel III. Ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche. Allgemeine Betrachtungen 146

§ 1. Definition. § 2. Die Beziehung zwischen a und α für zweizählige Kontakte. § 3. Die Werte von a und α für dreizählige Kontakte. § 4. Einführung des Faktors b. § 5. Eigenschaften ähnlicher Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche.

Kapitel IV. Ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche. Zahlenanwendungen 151

§ 1. Die Beziehung zwischen a und α für verschiedene Werte von ψ. § 2. Die Beziehung zwischen a und α für $\psi = 28^0\,57'\,18''$ $\left(N = \frac{1}{4}\right)$ und für $\psi = 60^0 \left(N = \frac{1}{2}\right)$ und deren graphische Darstellung. § 3. Die Werte von a und α für dreizählige Kontakte. § 4. Die Darstellung der allgemeinen Beziehung zwischen a, α und ψ im Raume. § 5. Verschiedene Systeme, die mit ein und demselben Wert von α möglich sind. § 6. Verschiedene Systeme, die mit ein und demselben Wert von a möglich sind. § 7. Die Beziehung zwischen b und α. § 8. Anfertigung der geometrischen Konstruktionen auf der abgerollten Kreiskegelfläche.

Kapitel V. Die horizontale Projektion ähnlicher Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche 161

§ 1. Die horizontale Projektion eines Kreises auf einer Kreiskegelfläche: Die Folioide. § 2. Ähnliche Systeme tangierender Folioiden. § 3. Eigenschaften der ähnlichen Systeme tangierender Folioiden. § 4. Beschreibung der geometrischen Konstruktionen.

Seite

Kapitel VI. Eigenschaften der Folioide 167

§ 1. Die Gleichung der Folioide. § 2. Schnittpunkte mit Strahlen, die aus dem Pol gezogen sind. § 3. Die Folioide abgeleitet aus einem Kreise. § 4. Formen der einfachen Folioide. § 5. Andere Gestalten der Folioide.

Kapitel VII. Rechtwinkliger Schnitt der Kontaktspiralen bei ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche 172

§ 1. Rechtwinkliger Schnitt zugeordneter Spiralen in ähnlichen Punktsystemen auf einer Kreiskegelfläche. § 2. Rechtwinkliger Schnitt von Kontaktspiralen. § 3. Zahlenanwendung.

Kapitel VIII. Ähnliche Systeme tangierender Kugeln auf einer Kreiskegelfläche. Kegelförmige Kugelsäulen 175

§ 1. Definition. § 2. Die Beziehung zwischen a und α für zweizählige Kontakte. § 3. Anwendungen.

Vierter Abschnitt.

Mehrfache Systeme.

Kapitel I. Mehrfache Punktsysteme 179

§ 1. Definition eines k-fachen Punktsystems. § 2. Numerierung der Punkte, Hauptspiralen usw. § 3. Die mehrfachen Punktsysteme als von den einfachen abgeleitete betrachtet.

Kapitel II. Mehrfache Systeme tangierender Kreise und Folioiden . . . 182

§ 1. Die mehrfachen Systeme tangierender Kreise als aus den einfachen aufgebaute betrachtet. § 2. Mehrfache regelmäßige Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche. § 3. Mehrfache ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene. § 4. Mehrfache ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche und deren horizontalen Projektion. § 5. Superponierte Quirle. § 6. Alternierende Quirle. § 7. Gedrehte Quirle.

Fünfter Abschnitt.

Rekapitulation 187

Zweiter Teil.

Botanische Anwendungen.

Beobachtungstatsachen. Aufgaben einer mechanischen Theorie der Blattstellungen 195

Erster Abschnitt.

Konstante Blattstellung.

Kapitel I. Die Form der jüngsten Anlagen seitlicher Organe und die Blattstellung am Scheitel 199

§ 1. Die Form des Vegetationspunktes. § 2. Die Form der jüngsten Anlagen seitlicher Organe. § 3. Hypothese über die Form der jüngsten Anlagen. § 4. Erklärungsmöglichkeit für die Form der jüngsten Anlagen. § 5. Die Blattstellung der jungen Anlagen. § 6. Ursachen für Abweichungen von den theoretischen Figuren. Beispiele für einfache Systeme: § 7. Der Kontakt 1 und 1. § 8. Der Kontakt 1 und 2. § 9. Der Kontakt 2 und 3. § 10. Der Kontakt 3 und 5. § 11. Höhere Kontakte. Beispiele für mehrfache Systeme: § 12. Die Dekussation. § 13. Dreizählige Quirle. § 14. Gedrehte Quirle.

Kapitel II. Anlegung neuer Organe im Anschluß an vorhandene bei konstanter Blattstellung 218

§ 1. Beobachtungstatsachen. § 2. Aufhebung geringer Unregelmäßigkeiten.

Kapitel III. Die Blattstellung an dem ausgewachsenen Stengel 221

§ 1. Die Blattstellung am Stengel und das ursprünglich angelegte Kontaktsystem. § 2. Die Verschiebungen der Organe durch ihren gegenseitigen Druck. § 3. Die Rectipetalität.

Seite

Kapitel IV. Zeichnung und Form des reifen Stengels 230

§ 1. Die Sproßgliedlehre. § 2. Verschiedene Anschauungen über die Berindung des Stengels durch die Blattbasen und die Zeichnung desselben. § 3. Theoretische Betrachtungen über die Berindung und die Zeichnung des Stengels. § 4. Die Zeichnung des Stengels bei der zweireihigen Blattstellung. § 5. Die Zeichnung des Stengels beim Kontakt 1 und 2 am Scheitel. § 6. Die Zeichnung des Stengels beim Kontakt 2 und 3 am Scheitel. § 7. Die Zeichnung des Stengels bei dekussierter Blattstellung.

Kapitel V. Die Divergenz, angelegt am Scheitel 247

§ 1. Die durch die Beobachtung gegebene Divergenz. § 2. Eine mechanische Erklärung.

Zweiter Abschnitt.

Veränderliche Blattstellung.

Kapitel I. Anlegung neuer Organe im Anschluß an vorhandene bei veränderlicher Blattstellung 253

§ 1. Beobachtungstatsachen. § 2. Die Ursachen für eine Änderung der Blattstellung. § 3. Eine Verschiebungshypothese. § 4. Andere Erklärungsmöglichkeit. § 5. Fälle, in welchen die neue Blattstellung bestimmt wird durch den Wert des Faktors b. § 6. Geometrische Konstruktionen und Modelle für veränderliche Blattstellungen. § 7. Haupteigenschaften der geometrischen Konstruktionen. § 8. Konstruktionen für den Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 1 und 1 in den rechtwinkligen 1 und 2. § 9. Konstruktionen für den Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 1 und 2 in den rechtwinkligen 2 und 3. § 10. Konstruktionen für den Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 3 und 5 in den rechtwinkligen 5 und 8. § 11. Konstruktionen für den Übergang des rechtwinkligen Kontaktes m und n in den rechtwinkligen n und $(m + n)$ für den Fall $n < 2m$. § 12. Konstruktionen für den Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 1 und 1 in den rechtwinkligen 2 und 3. § 13. Konstruktionen für den Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 1 und 2 in den rechtwinkligen 3 und 5. § 14. Konstruktionen für andere Übergänge von Systemen aus ein und derselben Kontaktreihe in einander. § 15. Der Faktor a in den besprochenen Übergangsfiguren. § 16. Konstruktionen für den Übergang der dekussierten Stellung in den rechtwinkligen Kontakt 2 und 3 und in den dreizähligen Quirl.

Kapitel II. Die Anlegung der ersten Stengelblätter im Anschluß an die Kotyledonen 273

§ 1. Allgemeine Bemerkungen. § 2. Das Auftreten der zweireihigen Blattstellung als bleibende Stellung im Anschluß an die Kotyledonen. § 3. Das Auftreten der zweireihigen Blattstellung im Anschluß an die Kotyledonen als Übergang zur Blattstellung mit dem Kontakt 1 und 2. § 4. Das Auftreten der dekussierten Blattstellung im Anschluß an die Kotyledonen als Übergang zur Blattstellung mit dem Kontakt 2 und 3. § 5. Das Auftreten der dekussierten Blattstellung im Anschluß an die Kotyledonen als Übergang zum dreizähligen Quirl. § 6. Andere Anschlußverhältnisse an den Keimpflanzen. § 7. Nachträgliche Änderung in der Blattanlegung.

Kapitel III. Die Anlegung der ersten Zweigblätter im Anschluß an das Tragblatt und den Stamm 284

§ 1. Allgemeine Bemerkungen. § 2. Die Anlegung der zweireihigen Blattstellung als definitive bei Axillarknospen. § 3. Die Anlegung der zweireihigen Blattstellung an Axillarknospen als Übergang zur Stellung mit dem Kontakt 1 und 2. § 4. Die Anlegung der dekussierten Blattstellung an Axillarknospen als Übergang zur Blattstellung mit dem Kontakt 2 und 3. § 5. Die Anlegung der dekussierten Blattstellung als Übergang zu dem dreizähligen Quirl.

Dritter Abschnitt. Seite

Schlußbetrachtungen über die botanischen Anwendungen 290

§ 1. Zusammenfassung der Hauptresultate. § 2. Aussichten für die Anwendung der Theorie auf andere Fälle. § 3. Fälle, in welchen die Theorie keine Anwendung erlangt.

Dritter Teil.

Betrachtungen über den Schalenbau der Miliolinen.

Kapitel I. Kurze Beschreibung der Kammeranordnung bei der Familie der Miliolinen 300

§ 1. Allgemeine Eigentümlichkeiten. § 2. Der monolokulinäre Typus. § 3. Der bilokulinäre Typus. § 4. Der trilokulinäre Typus. § 5. Der quinquelokulinäre Typus. § 6. Der Bautypus der Gattung *Sigmoilina*. § 7. Der Dimorphismus. § 8. Der Initialpolymorphismus. § 9. Andere Bautypen. § 10. Vergleichung des Schalenbaus der Miliolinen mit den Anschlußverhältnissen junger Blätter am Vegetationspunkt.

Kapitel II. Die Mechanik des Kammerbaus bei der Familie der Miliolinen 313

§ 1. Allgemeine Gesetze. § 2. Anwendung auf den Schalenbau der Miliolinen.

Tafelerklärung 325

Einleitung.

Die Zeiten, in welchen man sich damit begnügte, die Erscheinungsformen der Pflanzenwelt mit großer Genauigkeit zu beschreiben und zu klassifizieren, sind vorüber. Seit uns die Deszendenztheorie gelehrt hat, zahlreiche Eigentümlichkeiten des inneren und äußeren Baues als nützlich für die Pflanzen zu betrachten, hat man sich immer mehr bemüht, morphologische Tatsachen als Anpassungserscheinungen zu erklären. Obwohl man sicherlich in diesem Bestreben zu weit gegangen ist, so ist nicht zu leugnen, daß diese Behandlungsweise die schönsten Resultate ergeben und zu zahlreichen neuen Untersuchungen angeregt hat. Neben dieser Forschungsrichtung hat sich nun eine zweite entwickelt, bei welcher man, abgesehen von der Frage nach der Zweckmäßigkeit, die verschiedenen Erscheinungsformen mit einander in einen kausalen Zusammenhang zu bringen sucht, und wobei man die eine Eigenschaft als die mechanisch notwendige Folge von bestimmten anderen zu deuten trachtet. Damit verliert die erste Behandlungsweise jedoch nichts von ihrer Bedeutung, denn die Zuchtwahl wird von den verschiedenen Formen, welche aus mechanischen Gründen möglich sind, nur die erhaltungsfähigen beibehalten. Es werden darum speziell diejenigen Fälle, bei welchen die Zweckmäßigkeit am wenigsten ausgeprägt ist und die verschiedenen Möglichkeiten am vollständigsten hervortreten, am besten sich dazu eignen, die mechanische Auffassungsweise durchzuführen.

Nun haben sich wenige morphologische Tatsachen von einer solchen Gesetzmäßigkeit und Eigentümlichkeit erwiesen wie die Erscheinungsformen der Blattstellungen, wie sie uns besonders aus den Arbeiten von SCHIMPER und BRAUN, A. und L. BRAVAIS bekannt geworden sind, und gerade hierfür liegt die Zweckmäßigkeit gar nicht auf der Hand[1]). Es ist also begreiflich, daß auf diesem Gebiete die eingehendsten Versuche gemacht worden sind, eine mechanische Erklärung durchzuführen. Es sei hier nur auf die Blattstellungstheorien von HOFMEISTER, AIRY, DELPINO, SCHWENDENER und CHURCH hingewiesen, von welchen die SCHWENDENERsche Theorie die bekannteste und gewiß auch die bedeutendste ist. Ohne Zweifel muß auch die Durchführung einer mechanischen Blattstellungstheorie für die wissenschaftliche Botanik als von höchster Bedeutung betrachtet werden, um so mehr, weil sich dadurch die

1) Zwar meint WIESNER in der Bevorzugung der Hauptreihe eine Anpassung an die Lichtverhältnisse zu sehen, aber es scheint mir der Beweis dafür durch seine Arbeit nicht erbracht.

Aussicht eröffnet, zahlreiche morphologische Eigenschaften der Blütenregionen aus gleichartigen Gesichtspunkten heraus zu erklären. Es hat aber bereits SCHWENDENER darauf hingewiesen, daß hiermit die Bedeutung einer solchen Theorie nicht abgeschlossen ist, indem er hervorhob, daß die Anordnung der Schuppen bei Fischen und Reptilien, Gesetzmäßigkeiten aufweist, welche mit den Anschlußverhältnissen der seitlichen Organe an Pflanzenstengeln große Übereinstimmung zeigen und wahrscheinlich von denselben Gesichtspunkten aus mechanisch zu erklären sind. Im dritten Teil dieser Arbeit wird auch noch der Nachweis erbracht, daß der Bau der Schalen einer Foraminiferenfamilie eine überraschende Ähnlichkeit mit der Struktur der Vegetationspunkte höherer Pflanzen aufweist, ja daß man darin sogar dieselben Zahlenverhältnisse wiederfindet, welche gerade für die Anordnung der Blätter so charakteristisch sind. Es zeigt sich also eine Blattstellungstheorie sowohl für die Zoologie als für die Botanik von Interesse und es will mir scheinen, daß ihre Bedeutung noch über den Rahmen dieser Wissenschaften hinausreicht. Bildet ja das Auftreten des „Goldenen Schnittes" in der Natur eine Erscheinung, über die man schon seit Jahren nachdenkt; und sind es nicht eben die höheren Blattstellungen, bei welchen man diesen Schnitt am schönsten und sichersten beobachtet hat? Würde es also gelingen für diesen Fall den Kausalverband der Erscheinung mit einfachen Beobachtungstatsachen nachzuweisen, so wäre damit auch für die allgemeine Wissenschaft ein wichtiges Resultat erreicht.

Die unmittelbare Veranlassung zur Ausführung der vorliegenden Arbeit gab das Erscheinen der Arbeit von CHURCH: „On the Relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws". Wer die interessanten Konstruktionen dieses Autors für die höheren Blattstellungen, z. B. für diejenigen der Sonnenköpfe, mit den natürlichen Objekten vergleicht, wird sicherlich die Überzeugung erhalten, daß denselben ein richtiger Gedanke zugrunde liegen muß. Auch ist das von CHURCH als Ausgangspunkt gewählte Prinzip der Ähnlichkeit in der Anordnung seitlicher Organe am Stammscheitel von einer solchen Klarheit, daß die Einführung dieses Prinzips als ein wichtiger Fortschritt in der Blattstellungslehre bezeichnet werden muß. Andererseits aber hat CHURCH die Zahlengesetzmäßigkeiten der Blattstellungen nicht erklärt, und da nun eben darin die wichtigste Aufgabe einer mechanischen Theorie der Blattstellung liegt, so kann seine Arbeit, obwohl sie zahlreiche interessante Gesichtspunkte und eine Menge ausgezeichneter Abbildungen enthält, dennoch nicht befriedigen. Bekanntlich hat sich die SCHWENDENERsche Theorie gerade auf die Erklärung dieser Zahlengesetze gerichtet und sie stützt sich dabei auf Betrachtungen, welche an Konstruktionen auf einer Zylinderfläche angestellt sind. Es ergab sich nun, daß sich auf einer Ebene Kreissysteme darstellen ließen, die einerseits dem Prinzip der Ähnlichkeit genügen, anderseits in ihren Eigenschaften mit den Schemas von SCHWENDENER die größte Übereinstimmung zeigten, und hiermit war die Möglichkeit gegeben, gewisse Gesichtspunkte der SCHWENDENERschen Theorie auf die Verhältnisse an flachen Stammteilen zu übertragen. Freilich war dazu eine völlige Umarbeitung der Ableitungen von SCHWENDENER notwendig und es mußte eine neue Betrachtungsweise durchgeführt

werden; dadurch aber sind zu gleicher Zeit zahlreiche Resultate erzielt worden, welche sich für die Theorie als von höchster Bedeutung herausgestellt haben.

Bedenkt man nun, daß eine Theorie der Blattstellung sich zuerst mit der Anlegung neuer Organe am Scheitel zu beschäftigen hat, so wird es einleuchten, daß man für Schemas, welche das Zustandekommen gewisser Blattstellungen einigermaßen naturgetreu wiedergeben müssen, nur ausnahmsweise Konstruktionen auf einer Zylinderfläche oder Ebene anwenden kann. Die Erwägung, daß man den Teil des Stammscheitels, aus dem die jungen Anlagen hervorsprossen, meistens annähernd als zu einer Kegelfläche gehörig betrachten kann, hat uns dazu geführt, auch Kreissysteme auf solchen Flächen, und zwar mit verschiedenen Scheitelwinkeln zu studieren, und es konnte dies ganz von gleichartigen Gesichtspunkten aus geschehen wie für die Systeme auf Zylinderfläche und Ebene. Die Betrachtung solcher Systeme auf Kegelflächen hat uns nun die Möglichkeit eröffnet, mathematische Figuren herzustellen, welche den natürlichen Objekten bisweilen täuschend ähnlich sind, und hat uns schließlich zu der Aufstellung einer Theorie geführt, welche für wichtige Erscheinungsformen der Blattstellungen eine befriedigende Erklärung gibt.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in drei Teile.

Der erste gibt rein mathematische Betrachtungen, welche ganz frei von theoretischen Voraussetzungen gehalten sind. Die Ableitungen sind möglichst elementar gegeben, nur an einzelnen Stellen ist eine tiefergehende Betrachtungsweise gewählt worden. Da nun aber dennoch dieser Teil einen ziemlich beträchtlichen Umfang angenommen hat und der Botaniker hierdurch abgeschreckt werden könnte, so habe ich diesem Umstand dadurch vorzubeugen gesucht, daß ich am Ende dieses Teils eine kurze Übersicht der Hauptresultate gegeben habe; hierin ist die mathematische Ausdrucksweise ganz vermieden.

Im zweiten Teil ist an der Hand der Resultate der mathematischen Betrachtungen die Theorie aufgestellt. Diese hat, wie aus dem Gesagten schon hervorgeht, wichtige Gesichtspunkte mit der SCHWENDENERschen Kontakttheorie gemein und verdankt andererseits einige Ideen der Arbeit von CHURCH. Die wichtigsten Blattstellungen konnten durch diese Theorie erklärt werden als eine mechanisch notwendige Folge von gewissen allgemeingültigen Beobachtungstatsachen und den einfachen Anschlußverhältnissen, welche die ersten Stengelblätter an den Kotyledonen und die ersten Zweigblätter am Stamm und am Achselblatt aufweisen. Auch die Gesetzmäßigkeiten der Zeichnung und Form der Achsenorgane, das Auftreten von gespaltenen Blättern und andere Eigentümlichkeiten, welche mit der Stellung der Blätter in Beziehung stehen, fanden durch die Theorie eine Erklärung. Doch stellt diese Arbeit nur den ersten Versuch für die Durchführung der Theorie dar, sie ist nicht als abgeschlossen zu betrachten und zahlreiche Fragen mußten vorläufig unbeantwortet bleiben. Manche Andeutungen liegen aber bereits vor, daß sich unsere Betrachtungen auch in anderer Hinsicht fruchtbar erweisen werden. So ist es höchst wahrscheinlich, daß auch die von LUDWIG aufgefundenen Zahlengesetze über die Anzahl der Rand- und Scheibenblüten, von denselben Gesichtspunkten

aus zu deuten sind; dasselbe gilt auch von der Blattanlegung an den zwei- und dreiseitigen Scheitelzellen der Moosstämmchen.

Im dritten Teil endlich ist, wie erwähnt wurde, nachgewiesen, daß der Schalenbau einer Foraminiferenfamilie (die der Miliolinen) eine große Übereinstimmung zeigt mit den Anschlußverhältnissen junger Blätter an den pflanzlichen Vegetationspunkten. Weiter ist darin an der Hand der Theorien von RHUMBLER über die Mechanik des Schalenbaues bei Foraminiferen, eine mechanische Erklärung für diese Übereinstimmung aufgestellt worden, welche wichtige Gesichtspunkte mit der Blattstellungstheorie gemein hat.

Bemerken wir schließlich noch, daß man in dem ersten Teil eine Betrachtung über „Kugelsäulen" antreffen wird, obwohl diese Systeme für unsere Theorie keine direkte Bedeutung besitzen. Das Studium dieser schönen Figuren schließt sich aber ganz ungezwungen an unsere übrigen Ableitungen an und ist hier von Interesse, weil dadurch die Einsicht in die Natur der Kreissysteme bedeutend erleichtert wird. Andererseits haben die Kugelsäulen in der Geschichte der Blattstellungslehre eine Rolle gespielt, welche eben durch die hier gegebene Betrachtungsweise in ein besseres Licht gestellt werden konnte.

ERSTER TEIL.

Mathematische Betrachtungen.

Erster Abschnitt.

Einfache Systeme auf einer Kreiszylinderfläche.

Kapitel I. Regelmäßige Punktsysteme auf einer Kreiszylinderfläche[1].

§ 1. Fragestellung. Die Theorie der Kristallstruktur hat Veranlassung gegeben zur Lösung von verschiedenen rein mathematischen Fragen, von denen zwei für unsere Betrachtungen von Interesse sind. Die erste beschäftigt sich mit den möglichen Symmetrieverhältnissen in Punktsystemen, die derart sind, daß jeder Punkt des Systems allen anderen gegenüber eine völlig übereinstimmende Stellung einnimmt, während die kongruenten Strahlenbüschel, welche durch die Verbindung von verschiedenen Punkten mit den anderen entstehen, parallel gestellt sind. Es war besonders A. BRAVAIS[2]), welcher diese Frage auf sehr elegante Weise gelöst hat. Er studierte dabei sowohl Punktsysteme auf einer Ebene als auch solche im Raume; die ersteren tragen den Namen „Punktnetze", die zweiten den Namen „Punktgitter".

Die zweite, mehr allgemeine Frage, bezieht sich ebenfalls auf die Symmetrie derjenigen Punktsysteme, bei welchen jeder Punkt allen anderen gegenüber eine übereinstimmende Stellung einnimmt; jedoch läßt sie die Einschränkung betreffs der parallelen Lage der kongruenten Strahlenbüschel fallen. Diese Frage ist ungefähr zu gleicher Zeit von SOHNKE[3]) und von WIENER[4]) aufgeworfen worden, wurde aber erst durch SCHÖNFLIES[5]) und FEDEROW[6]) zu einer vollkommenen Lösung gebracht. Diese Punktsysteme werden gewöhnlich „Regelmäßige Punktsysteme" genannt.

---

1) Ich bemerke hier, daß die drei ersten Paragraphen dieses Kapitels sich auch auf die mehrfachen Systeme beziehen.

2) Mémoire sur les systèmes formés par les Points, distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace. Journal de l'Ecole Polytechnique, T. XIX, 33ième Cahier, 1850, p. 1.

3) Entwickelung einer Theorie der Kristallstruktur. Leipzig 1879, und: Die regelmäßigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung. Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. LXXVII, 1874, S. 47.

4) Grundzüge der Weltordnung. Leipzig und Heidelberg. Zweite Ausg. 1869.

5) Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leipzig 1891.

6) Verhandlungen der Petersburger mineral. Gesellsch. 1884.

Bei unseren Betrachtungen gehen wir nun von einer Frage aus, die große Ähnlichkeit mit dieser letzten Aufgabe zeigt und welcher wir folgende Fassung geben möchten:

Welches sind die Eigenschaften der regelmäßigen Punktsysteme auf einer Kreiszylinderfläche, wenn man unter einem „regelmäßigen Punktsystem" ein solches versteht, bei welchem die von jedem Systempunkt aus nach allen übrigen Systempunkten gezogenen Strahlenbüschel unter einander kongruent sind?

Während jedoch bei der allgemeinen Frage, wie sie der Theorie der Kristallstruktur zugrunde liegt, auch die Fälle betrachtet werden, bei welchen unter den Figuren, die durch die Verbindung der Punkte des Systems entstehen, „symmetrische" vorkommen, so lassen wir die letzteren Fälle aus dem Rahmen unserer Betrachtungen und nehmen also an, daß die verschiedenen Strahlenbüschel zur Koinzidenz gebracht werden können.

§ 2. Haupteigenschaften. Denkt man sich ein bis ins Unendliche fortgesetztes regelmäßiges Punktsystem auf einer Kreiszylinderfläche und nimmt man dazu eine zweite, der ersten ganz gleiche Fläche mit gleichem Punktsystem, dann kann man die letztere mit der ersteren so zur Koinzidenz bringen, daß alle Punkte der zwei Systeme sich gegenseitig decken. Wir denken uns eine solche Koinzidenz zustande gekommen und benennen jetzt die Punkte des ersten Systems mit den Buchstaben a_0, b_0, c_0 usw., dagegen die entsprechenden des zweiten Systems mit a, b, c usw.; wir betrachten weiter das erste Punktsystem als fest, das zweite dagegen als beweglich. Man kann dann den Punkt a des beweglichen Systems stets nach einem Punkt b_0 des festen übertragen denken und es muß alsdann wieder möglich sein, gemäß der Definition eines regelmäßigen Punktsystems auf einer Kreiszylinderfläche, alle anderen Punkte des beweglichen Systems mit Punkten des festen zur Koinzidenz zu bringen. Ist diese Stellung eingetreten, dann werden auch die beiden Zylinderflächen sich wieder decken. Einen solchen Bewegungsvorgang werden wir eine „Deckbewegung" nennen.

Jeder Platzwechsel der beweglichen Zylinderfläche kann nun nach dem Lehrsatz von Châsles aufgefaßt werden, als sei er zustande gekommen durch eine Schraubung. Da die Achse dieser Zylinderfläche vor und nach dem Platzwechsel mit derjenigen der festen zusammenfällt, so muß diejenige Schraubenbewegung, welche „Deckbewegung" ist, entweder die Achse entlang stattgefunden haben, oder es muß möglich sein, sie zu zerlegen in eine Drehung über einen Winkel von 180^0 um eine Linie, die senkrecht zur Achse steht, und in eine Schraubenbewegung, welche sich diese Achse entlang erstreckt. Wir werden die Fälle, bei denen diese zwei Arten von Deckbewegungen auftreten, einzeln betrachten.

1. Nehmen wir zuerst an, daß alle Deckbewegungen in dem Punktsysteme Schraubenbewegungen der Achse entlang sind. Denken wir uns dann den Punkt a durch eine Drehbewegung von dem Punkt a_0 aus nach einem beliebigen Punkt b_0 übertragen, so muß der Punkt b, welcher sich erst mit b_0 deckte, infolge der Schraubenbewegung mit einem anderen Punkte c_0 des festen Systems zusammenfallen. Hieraus folgt sofort, daß die Punkte a_0, b_0, c_0 auf ein und derselben Schraubenlinie gelegen sind, und zwar so, daß $a_0 b_0 = b_0 c_0$.

In gleicher Weise folgert man nun, daß noch ein vierter Punkt d_0 auf der verlängerten Schraubenlinie liegen muß, so daß $d_0c_0 = c_0b_0$ ist. Wenn man in dieser Weise weiter schließt, ergibt sich, daß auf der verlängerten Schraubenlinie, die durch a_0 und b_0 gezogen werden kann, eine unendliche Anzahl Punkte mit untereinander gleichen Abständen gelegen sein muß. Zieht man nun aber in Betracht, daß, sobald a mit b_0 zusammenfällt, auf den Punkt a_0 infolge der Deckbewegung ein Punkt z fallen muß, so ergibt sich daraus, daß der Punkt z_0 ebenfalls auf der Schraubenlinie liegt, die durch a_0 und b_0 gezogen ist. Auch auf der nach der anderen Seite verlängerten Schraubenlinie wird man also Punkte antreffen, die gleiche Abstände von einander haben.

Da der Punkt b_0 ganz beliebig angenommen wird, so folgt hieraus, daß man eine unendliche Anzahl solcher Schraubenlinien mit regelmäßigen Punktreihen in dem System wird nachweisen können.

Es besteht natürlich die Möglichkeit, daß die Schraubenlinie durch die Punkte a_0 und b_0 alle Punkte des Systems umfaßt; aber im allgemeinen wird dieses nicht eintreffen, und es wird anzunehmen sein, daß Punkte außerhalb derselben liegen. Wählen wir den Punkt g_0, der von allen diesen Punkten am dichtsten an der betrachteten Schraubenlinie liegt, und schrauben wir dann den Punkt a von a_0 aus nach g_0, so werden wieder alle Punkte zur Koinzidenz gebracht und es folgt daraus sofort, daß auch durch den Punkt g_0 eine Schraubenlinie mit regelmäßiger Punktreihe gehen muß, die völlig der zuerst beschriebenen Schraubenlinie gleich ist und mit ihr parallel läuft. Weil nun g_0 so nahe wie möglich bei der ersten Schraubenlinie angenommen wurde, so kann zwischen den beiden betrachteten Schraubenlinien auch kein Punkt des Systems angetroffen werden. Die jetzt gefundene Schraubenlinie durch g_0 wird bei der Übertragung von a nach g_0 gleichfalls mit übertragen werden und also mit einer neuen Punktreihe zusammenfallen müssen, wenn sie sich nicht mit der Schraubenlinie durch a_0 deckt. Wenn man in dieser Weise fortschließt, kommt man, wie leicht einzusehen ist, zu folgendem Resultat:

Alle Punkte eines regelmäßigen Punktsystems kann man ordnen auf Systemen von Scharen untereinander in gleichen Abständen parallel laufender Schraubenlinien, und zwar liegen die Punkte auf diesen Linien wieder in untereinander gleichen Abständen.

Es sind unendlich viele verschiedene Systeme von parallelen Schraubenlinien anzugeben, worauf die Punkte zu ordnen sind. Wird die Anzahl solcher Schraubenlinien durch m bezeichnet, dann ist m eine ganze Zahl, welche alle möglichen Werte besitzen kann.

2. Betrachten wir nun den Fall, bei welchem die Deckbewegungen sowohl einfache Schraubenbewegungen der Achse entlang sein können, als auch solche, welche zusammengesetzt sind aus einer Drehung über einen Winkel von 180^0 um eine Linie senkrecht auf der Zylinderachse und aus einer Schraubenbewegung der Zylinderachse entlang. Setzen wir also den Fall, daß die Deckbewegung, bei welcher a nach einem Punkt b_0 übertragen wird, eine solche

der zweiten Art ist. Die Deckbewegung von a nach einem beliebigen anderen Punkt c_0 kann dann sowohl von der ersten als von der zweiten Art sein. Nehmen wir an, daß das erste der Fall wäre, dann muß, nach dem unter 1 Besprochenen, auf der Schraubenlinie durch a_0 und c_0 eine Punktreihe vorhanden sein, deren Punkte die gleichen Abstände von einander haben. Bei der Deckbewegung, die a nach b_0 bringt, muß dann aber diese Punktreihe mit einer solchen durch b_0 zusammenfallen. Da nun eine Schraubenlinie infolge einer Drehung über 180^0 um eine Linie senkrecht zur Zylinderachse übergeht in eine parallele Schraubenlinie, so folgt hieraus, daß durch b_0 eine Schraubenlinie wird gezogen werden können, parallel derjenigen, welche a_0 und c_0 verbindet, und daß darauf eine Punktreihe vorhanden ist, deren Punkte dieselben Abstände wie diejenigen der Punktreihe durch a_0 und c_0 haben.

Auch in diesem Falle werden also die Punkte des Systems alle auf Scharen paralleler Schraubenlinien gelegen sein, und auf jeder dieser Schraubenlinien werden die Punkte untereinander dieselben Abstände zeigen. Daraus folgt weiter, daß man nach Drehung über einen Winkel von 180^0 um eine Linie senkrecht zur Achse notwendigerweise ein System erhalten muß, das von dem ursprünglich festen nicht zu unterscheiden ist; dann müssen aber auch alle Punkte durch eine einfache Schraubenbewegung der Achse entlang zur Koinzidenz gebracht werden können. Hiermit ist dann bewiesen, daß dieser Fall mit dem unter 1 betrachteten vollkommen übereinstimmt und von diesem nur scheinbar verschieden ist.

Nun gilt dieser Schluß nur unter der Voraussetzung, daß die Deckbewegung, wodurch a nach c_0 übertragen wird, eine von der ersten Art ist; es besteht jedoch die Möglichkeit, daß sie von der zweiten Art ist, so wie die, welche a nach b_0 bringt. In diesem Fall wird dann aber die Deckbewegung, die b nach c_0 überträgt, von der ersten Art sein. Dann verhalten sich also die Punkte b_0 und c_0 a_0 gegenüber ebenso wie im vorhergehenden Fall die Punkte a_0 und c_0 b_0 gegenüber, und da die drei Punkte beliebig ausgewählt sind, können sie auch mit einander vertauscht werden und damit ist auch diese Voraussetzung auf die vorige zurückgeführt.

Der Schluß, zu welchem wir bei Fall 1 kamen, gilt also allgemein für alle regelmäßigen Punktsysteme auf einer Kreiszylinderfläche.

Es sei hier darauf hingewiesen, daß die Ordnung der Punkte in gleichen Abständen auf einer Schar paralleler Schraubenlinien, die mit untereinander gleichen Abständen auf einer Zylinderfläche angebracht sind, den Ausgangspunkt bildete für die Betrachtungen der Gebrüder A. und L. BRAVAIS[1]) in ihrer klassischen Abhandlung über die Anordnung der Blätter bei höheren Pflanzen. Aus verschiedenen Gründen, wie sich später deutlich zeigen wird, erachtete ich es für wünschenswert, die eingangs aufgestellte, mehr allgemeine Auffassung dafür einzusetzen.

§ 3. Einteilung. Aus der Betrachtung, die uns zur Erkennung des Wesens der regelmäßigen Punktsysteme auf einer Kreis-

1) Essai sur la disposition des feuilles curviséries par M. M. L. et A. BRAVAIS. Annales des Sciences Naturelles 2ième Série, T. VII (Botanique), 1837, p. 42—110.

zylinderfläche geführt hat, lassen sich nun noch einige Folgerungen ableiten über die Erscheinungsformen, in welchen die Punktsysteme auftreten können.

Von der Schraubenbewegung sind die Rotation und die Translation Spezialfälle, und es besteht also die Möglichkeit, daß unter den verschiedenen Deckbewegungen, welche, wie aus dem Gesagten hervorgeht, im allgemeinen als Schraubenbewegung der Zylinderachse entlang aufzufassen sind, auch diese Spezialfälle vorkommen. Je nachdem nun alle möglichen Deckbewegungen aufgefaßt werden können als aus einer oder aus mehreren der drei Arten (Schraubenbewegungen, Rotationen und Translationen) zusammengesetzt, lassen sich die folgenden Fälle unterscheiden:

1. Alle Deckbewegungen können aufgefaßt werden als Translationen der Zylinderachse entlang.

2. Sie sind alle aufzufassen als Rotationen um diese Achse.

3. Sie sind teils aufzufassen als Translationen, teils nur als Schraubenbewegungen der Zylinderachse entlang.

4. Sie sind teils als Rotationen, teils nur als Schraubenbewegungen aufzufassen.

5. Sie sind teils als Rotationen, teils als Translationen und übrigens nur als Schraubenbewegungen aufzufassen.

6. Sie sind alle nur als Schraubenbewegungen der Achse entlang aufzufassen.

Bei dem ersten Fall besteht das Punktsystem aus einer Serie von Punkten mit untereinander gleichen Abständen auf einer beschreibenden Linie der Zylinderfläche.

Bei dem zweiten bilden die Punkte eine Serie mit untereinander gleichen Abständen auf einem Kreis.

Im dritten Fall müssen alle Punkte auf eine Serie beschreibender Linien (Orthostichen) zu ordnen sein (Systèmes rectiseriés der Gebrüder BRAVAIS); hiervon ist Fall 1 nur eine besondere Art.

Für den vierten Fall ist charakteristisch, daß auf einem und demselben beschreibenden Kreise, auf welchem ein Punkt angetroffen wird, notwendigerweise noch mehrere Punkte vorkommen. (Systèmes conjugués abgeleitet aus den Systèmes curviseriés.) Fall 2 ist hiervon eine besondere Art.

Der fünfte Fall läßt zu, daß alle Punkte zu ordnen sind in einer Serie beschreibender Linien und daß außerdem mehrere Punkte auf demselben beschreibenden Kreise vorhanden sind. (Systèmes conjugués gebildet aus den Systèmes rectisériés.)

Im letzten Fall endlich kann auf ein und derselben beschreibenden Linie und ebenso auf ein und demselben horizontalen Kreis nur ein einziger Punkt vorhanden sein.

Praktischer als oben teilen wir für unseren Zweck die Punktsysteme ein in solche, bei welchen unter den Deckbewegungen Rotationen, und solche, bei welchen darunter keine Rotationen vorkommen. Erstere werden wir „zusammengesetzte“ regelmäßige Punktsysteme auf einer Kreiszylinderfläche nennen, während wir den letzteren den Namen „einfache“ Punktsysteme zulegen wollen. Bei den ersteren enthält ein horizontaler Kreis durch einen Punkt des Systems auf der Zylinderfläche notwendig noch mehrere Punkte des Systems, bei den letzteren kann darauf kein anderer Punkt gefunden werden.

In diesem Abschnitt wird ausschließlich von den „einfachen" Punktsystemen gesprochen werden; von den „zusammengesetzten" wird erst später die Rede sein.

§ 4. Eigenschaften der einfachen Systeme. Man nehme einen beliebigen Punkt a eines einfachen Systems und ziehe durch diesen Punkt den horizontalen Kreis auf der Zylinderfläche[1]), so wird, nach der Definition einfacher Systeme, auf diesem Kreis kein einziger anderer Punkt des Systems vorkommen. Man suche weiter den Punkt b, welcher in nächster Nähe des Kreises gelegen ist, was stets möglich ist, weil nicht mehr als ein Punkt in gleichem Abstand über dem Kreise vorhanden sein kann. Man kann nun a und b durch eine Schraubenlinie verbinden und zwar kann das in unendlich verschiedener Weise geschehen, je nachdem man ein oder mehrere Male die Zylinderfläche umläuft, bevor b erreicht wird. Unter allen den Schraubenlinien gibt es jedoch eine, bei welcher die Verbindung von a und b die kürzeste ist, welche vorkommen kann. Wenn wir weiterhin von einer Schraubenlinie, welche zwei Punkte verbindet, sprechen, so ist immer diese letzte gemeint.

Die Schraubenlinie durch a und b muß nun durch einen Punkt c gehen, welcher ebenso hoch über b liegt als b über a, während innerhalb des Flächenteiles zwischen den horizontalen Kreisen durch b und c kein einziger Punkt mehr angetroffen wird. Wenn man in dieser Weise weiter schließt, so sieht man leicht ein, daß diese Schraubenlinie alle Punkte des Systems umfaßt.

Führen wir nun für den mathematischen Ausdruck „Schraubenlinie" die botanische Bezeichnung „Spirale" ein, so ist also bewiesen, daß es bei jedem einfachen Punktsystem eine Spirale gibt, die alle Punkte in sich schließt (in Wirklichkeit unendlich viele, jedoch wird hier allein diejenige in Betracht gezogen, welche die kürzeste Verbindung darstellt). Diese Spirale heißt „Hauptspirale".

Sobald es nun eine solche Hauptspirale gibt, kann man die Punkte des regelmäßigen Systems fortlaufend numerieren, wobei man irgend einem beliebigen Punkt die Nummer 0 gibt. In der Regel wird nur ein bestimmter Teil des unendlichen Systems betrachtet und man gibt alsdann dem niedrigsten Punkt dieses Teils die Nummer 0.

Um von irgend einem Punkt in der Hauptspirale nach dem auf dieser am nächsten liegenden zu kommen, muß man einen gewissen konstanten Winkel um die Achse des Zylinders beschreiben. Man nennt denselben die Divergenz des einfachen Punktsystems; sie wird bezeichnet durch den Buchstaben α. Indessen benennt man mit dem Namen Divergenz auch den Bruch, welcher angibt, den wievielten Teil der Winkel α von 360^0 beträgt. Wir werden, wenn nichts weiteres gesagt wird, der ersten Ausdrucksweise folgen.

Ist nun die Steighöhe von der Hauptspirale h und die Divergenz α von dem Punktsystem gegeben, so ist für eine gewisse Zylinderfläche das einfache Punktsystem vollkommen bestimmt.

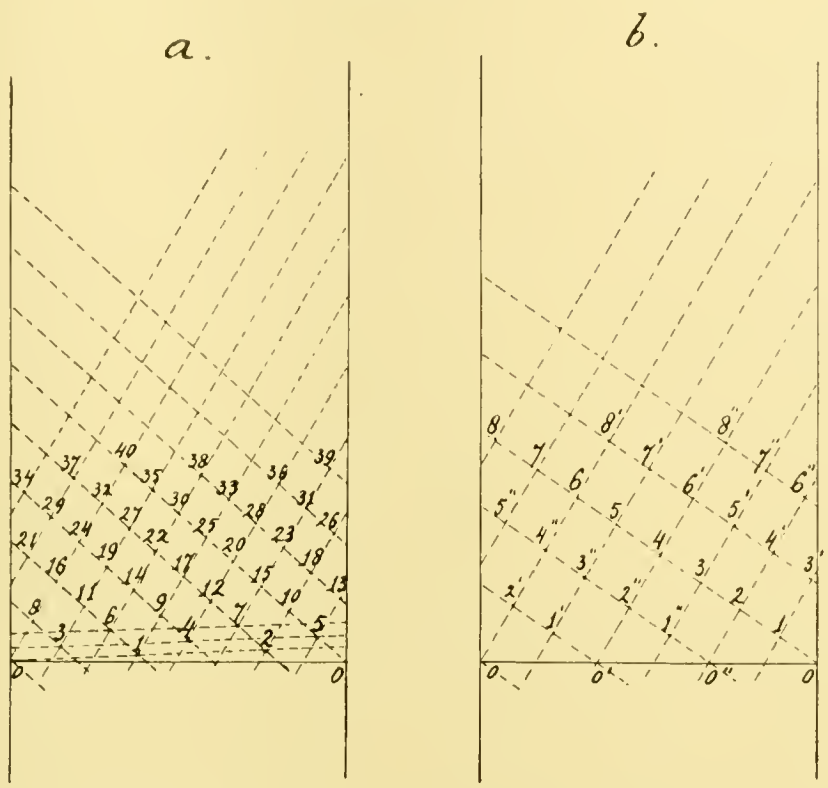
§ 5. Systeme auf der abgerollten Zylinderfläche. Die Vorstellung eines regelmäßigen Punktsystems wird merklich ver-

---

1) Wir nehmen die Zylinderfläche immer als mit der Achse vertikal gestellt an.

deutlicht, wenn man die Zylinderfläche abrollt. Aus jeder Schraubenlinie wird alsdann eine gerade Linie, sodaß das regelmäßige Punktsystem dann durch Punktreihen dargestellt wird, bei welchen die einzelnen Punkte in gleichen Abständen auf untereinander parallelen Linien liegen, die ebenfalls von einander gleich weit entfernt sind. Fig. 1 stellt zwei solche Systeme dar, und zwar veranschaulicht Fig. 1a ein „einfaches", Fig. 1b ein „mehrfaches" Punktsystem.

Fig. 1.



Denkt man sich nun ein solches System abgebildet und darauf alle Linien über die Grenzlinien hinaus verlängert und regelmäßig weiter mit Punkten besetzt, so erhält man auf diese Weise ein Punktsystem, von dem bereits oben gesprochen wurde und welches von A. BRAVAIS den Namen Punktnetz erhielt.

Man kann sich dieses auch auf andere Weise entstanden denken. Nach der Auffassung RIEMANNs kann eine Zylinderfläche als dadurch gebildet angesehen werden, daß man eine unendlich dünne unbegrenzte Ebene unzählige Male aufgerollt hat. Man denke sich nun auf jedem einzelnen „Blatt" einer so entstandenen Zylinderfläche die Punkte des regelmäßigen Punktsystems und rolle die Zylinderfläche wieder ab, so entsteht das oben angedeutete Punktnetz.

Hierbei muß jedoch bemerkt werden, daß es umgekehrt nicht immer möglich ist, durch Aufrollen eines beliebigen „Punktnetzes" ein regelmäßiges Punktsystem auf einer Kreiszylinderfläche zu erhalten; zu diesem Zwecke muß das Aufrollen in einer genau bestimmten Art geschehen. Jedoch ist es ohne Belang, hierbei länger zu verweilen; es war nur nötig, hier auf den angedeuteten Zusammenhang hinzuweisen, um zu erklären, warum viele Eigenschaften, die dem abgerollten Punktsystem eigentümlich sind, über-

einstimmen mit denjenigen, welche durch A. BRAVAIS für das genannte Punktnetz gefunden sind und die man bei diesem Verfasser und in dem oben zitierten Werk von SCHÖNFLIES abgeleitet findet.

Man ist gewohnt, den Zylinder nach der Vertikale durch den Punkt 0 aufzuschneiden, sodaß dieser Punkt rechts und links auf den Grenzlinien angetroffen wird. Jede Gerade, die 0 mit einem anderen Punkt des abgerollten Systems verbindet, entspricht also auf der Zylinderfläche einer Schraubenlinie. Diejenige, welche 0 mit 1, 1 mit 2 usw. verbindet, stellt die „Hauptspirale" vor und man findet die Divergenz, indem man das Verhältnis des horizontalen Abstandes zwischen 0 und 1 zu dem Zylinderumfang, d. i. die Linie 0—0, feststellt.

§ 6. Sekundäre und konjugierte Spiralen. Jede andere Spirale als die Hauptspirale, die eine Punktreihe enthält, heißt „sekundäre" Spirale[1]). Denkt man sich o mit m verbunden, so ist diese Schraubenlinie eine sogenannte m-zeilige Spirale, vorausgesetzt, daß zwischen o und m kein anderer Punkt angetroffen wird. Es ist leicht einzusehen, daß unter dieser Voraussetzung alle Punkte des regelmäßigen Systems auf m-Spiralen (oder Zeilen) gelegen sind, die parallel mit der erstgenannten laufen und untereinander gleiche Abstände haben.

Ebenso werden natürlich n n-zeilige Spiralen vorhanden sein, auf welchen alle Punkte gelegen sind, wenn auf der Linie, die o und n verbindet, zwischen o und n keine anderen Punkte liegen. Denkt man sich nun zwei solche Spiralscharen gezeichnet, dann müssen die Punkte des regelmäßigen Punktsystems zusammenfallen mit Schnittpunkten dieser Spiralscharen; darum braucht jedoch noch nicht jeder Schnittpunkt dieser Spiralen ein Punkt des Punktsystems zu sein. Man nennt nun die m und n-zeiligen Spiralen konjugierte Spiralen, wenn alle Schnittpunkte der betreffenden zugehörigen Spiralscharen auch Punkte des regelmäßigen Punktsystems sind. Die Spiralscharen selbst heißen konjugierte Spiralscharen.

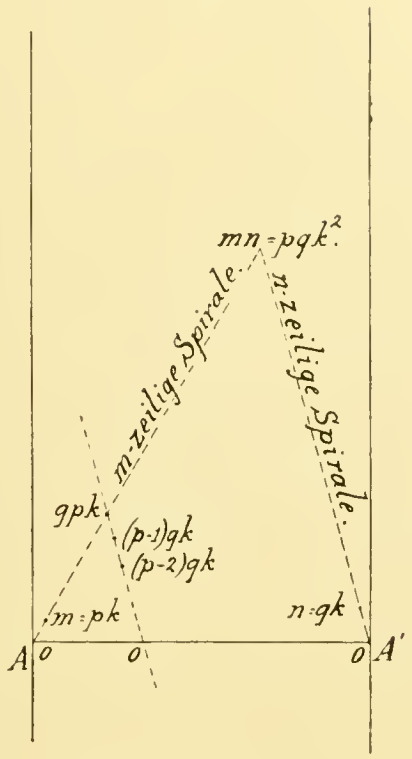
Wir werden in erster Linie nachweisen, daß, wenn in einem einfachen regelmäßigen Punktsystem auf einer Kreiszylinderfläche die m und n-zeiligen Spiralen konjugierte sind, die Zahlen m und n keinen gemeinschaftlichen Divisor haben.

Um dies zu beweisen, erinnere man sich, daß, sobald eine fortlaufende Hauptspirale vorhanden ist, eine Numerierung der Punkte in dieser Spirale möglich sein muß und dann unmöglich zwei Punkte dieselbe Nummer haben können. Man nehme nun an, daß die m- und n-zeiligen Spiralen konjugierte Spiralen sind, daß außerdem eine Hauptspirale da ist, daß aber m und n durch dieselbe Zahl teilbar sind. Alsdann kann man $m = pk$ und $n = qk$ annehmen, wobei k den gemeinsamen Divisor darstellt, während p und q ganze Zahlen sind. Der Schnittpunkt der m- und n-zeiligen Spirale muß zusammenfallen mit dem Punkt $mn = pqk^2$ (siehe Fig. 2). Notwendigerweise muß man nun auf der m-zeiligen Spirale einen Punkt finden, welcher die Zahl pqk trägt. Man folge nun der durch diesen Punkt gehenden

1) Wir verwenden hier und im Folgenden die Namen, wie sie von den Gebrüdern BRAVAIS (l. c.) eingeführt sind.

n-zeiligen Spirale nach unten, dann ergibt sich sofort, daß, wenn man darauf p-Punkte passiert hat, man einen Punkt auf der Linie AA' erreichen muß, welche durch den Punkt o horizontal gezogen ist, und daß man diesem Punkt die Nummer o zu geben hat. In ganz gleicher Weise findet man noch k-Punkte, welchen diese Nummer gegeben werden müßte, was in Widerspruch steht mit der Voraussetzung, daß eine Hauptspirale und also eine fortlaufende Numerierung möglich ist.

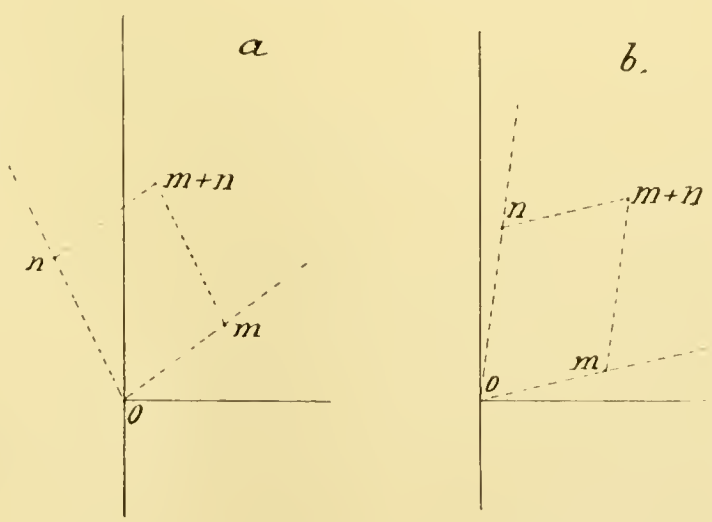
Fig. 2.



Wenn die m- und die n-zeilige Spirale zugeordnet und m und n durch dieselbe Zahl teilbar sind, ist also keine fortlaufende Hauptspirale möglich, während umgekehrt bei einer vorhandenen Hauptspirale m und n nicht durch dieselbe Zahl teilbar sind.

Es gibt ein äußerst einfaches Mittel, um sofort zwei konjugierte Spiralen in einem System aufzufinden. Verbindet man nämlich den Punkt o mit denjenigen beiden Punkten m und n, die von allen Systempunkten o am nächsten gelegen sind, so sind diese m- und n-zeiligen Spiralen auch sicher konjugierte. Dies ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß in diesem Fall innerhalb des Vierecks o, m, $m+n$, n (siehe Fig. 3) kein einziger Punkt des Systems vorkommen kann, denn jeder Punkt innerhalb desselben liegt in geringerer Entfernung von den Eckpunkten als o liegt von n, und diese ist nach om die kürzeste Entfernung zwischen Punkten im ganzen System. Demgemäß können ebensowenig in den anderen Parallelogrammen, in welchen durch die m- und n-zeiligen Spiralscharen der Flächenteil zwischen den vertikalen Grenzlinien eingeteilt wird, Punkte angetroffen werden.

Fig. 3.



Es besteht die Möglichkeit, daß die Punkte m und n beide in gleichem Abstand von o gelegen sind, das ändert jedoch an unserer Folgerung nichts. Außerdem besteht aber noch die Möglichkeit, daß ein dritter Punkt p in gleichem Abstand wie die beiden Punkte m und n angetroffen wird. Es läßt sich sehr einfach beweisen,

daß in diesem Fall $p = m + n$ oder $= n - m$ sein wird. Man denke sich rund um den Punkt o (siehe Fig. 4 u. 5), außer den Punkten m, n und p auch die Punkte $-m$, $-n$ und $-p$ gezeichnet. Es ist deutlich, daß das durch diese Punkte gebildete Sechseck ein regelmäßiges mit dem Punkt o als Mittelpunkt sein muß, denn wäre das nicht der Fall, so würden sicher in dem Punktsystem noch Abstände zwischen Punkten gefunden werden kleiner als $om = on = op$, was unserer Voraussetzung widerspricht. Es muß also p mit $n + m$ oder mit $n - m$ zusammenfallen, je nachdem die Punkte m und n gelegen sind. Ist $p = n + m$, dann bilden die m- und die n-zeilige Spirale einen Winkel von 120° miteinander, welcher durch die $(m + n)$-zeilige halbiert wird (s. Fig. 4). Wenn aber $p = n - m$ ist, dann bilden die m- und die n-zeilige Spirale einen Winkel von 60° miteinander und dann fällt die $(n - m)$-zeilige Spirale nach der Seite der n-zeiligen und bildet damit auch einen Winkel von 60° (s. Fig. 5). Wir werden sehr bald sehen, daß diese Eigenschaften für unsere weiteren Betrachtungen von großem Interesse sind.

Fig. 4

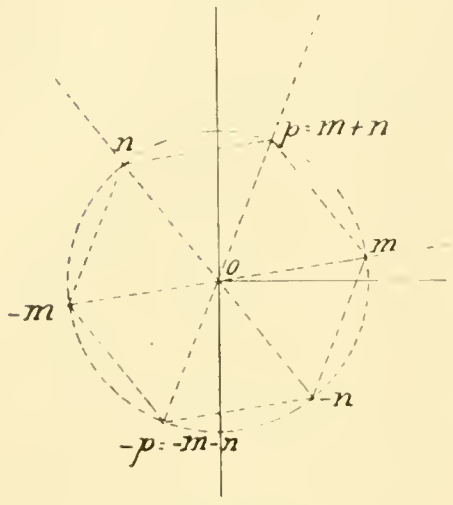
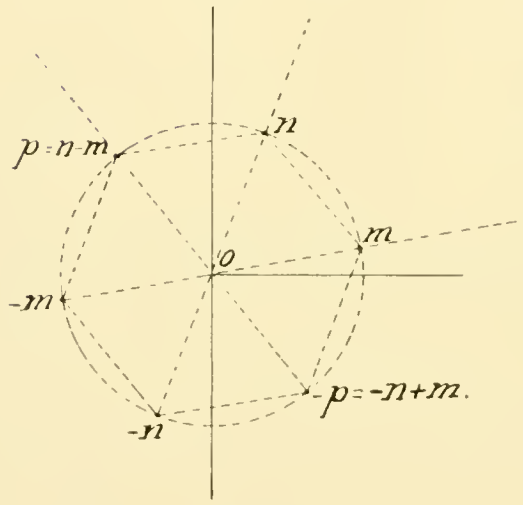


Fig. 5



§ 7. Windungsrichtung der Spiralen, sekundäre Divergenz, enzyklische Zahlen. Weiterhin wird wiederholt die Rede von der Richtung der Spiralen sein und weil hierüber insofern eine gewisse Verwirrung herrscht, als die Mathematiker das linksgewunden nennen, was die Botaniker und Zoologen als rechtslaufend bezeichnen, so ist es nicht ohne Belang, genau zu präzisieren, was wir unter links- und rechtslaufend verstehen wollen. Man denke sich, um die Richtung einer Schraubenlinie zu bestimmen, den Zylinder, auf welchem sie gezogen ist, vertikal aufgestellt und vergegenwärtige sich, daß die Schraubenlinie gleich einer Wendeltreppe ist, auf welcher man sich nach unten begibt; wir werden dann die Spirale in dem Fall rechtslaufend nennen, wenn man bei dem Abwärtssteigen die Achse des Zylinders an der rechten Hand hat, dagegen linkslaufend, sobald sie dabei an der linken Hand liegt. Wir bleiben dadurch in Übereinstimmung mit der gebräuchlichen Auffassung der Botaniker und der Zoologen.

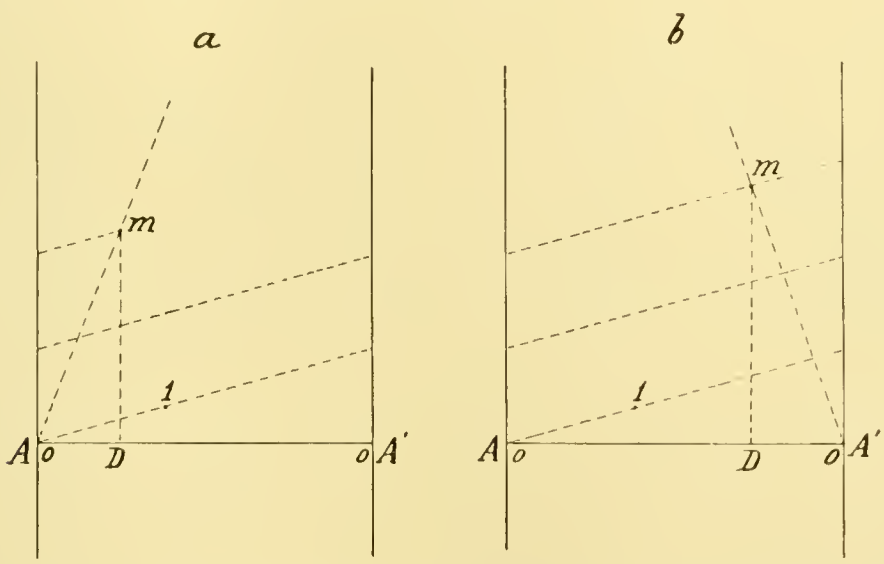
Zieht man die „kürzeste Schraubenlinie“, die den Punkt o mit einem beliebigen Punkt m verbindet, dann macht man eine bestimmte Drehbewegung um die Achse. Dieser Winkel wird sekundäre Divergenz des Punktes m genannt und soll mit δ_m bezeichnet werden. Diese Divergenz wird als positiv betrachtet, wenn

die (kürzeste) Schraubenlinie, die o mit m verbindet, in derselben Richtung wie die Hauptspirale läuft, dagegen als negativ, wenn sie die entgegengesetzte Richtung hat. In Fig. 6a hat der Punkt m also positive, in Fig. 6b dagegen negative sekundäre Divergenz und zwar beträgt diese in Fig. 6a $\delta_m = \frac{AD}{AA'} \cdot 360^0$, in Fig. 6b dagegen $\delta_m = -\frac{A'D}{AA'} \cdot 360^0$.

Wir werden nun die Hauptspirale stets, wenn nichts anderes ausdrücklich bemerkt ist, als rechtsgewunden betrachten. In diesem Falle wird dann die sekundäre Divergenz δ_m positiv sein, wenn die m-zeilige Spirale rechtslaufend ist, negativ aber, wenn diese Spirale links läuft. Es ist klar, daß dann auch, wenn man die abgerollte Zylinderfläche der Länge nach halbiert, alle Punkte, die links von der Halbierungslinie liegen, eine positive, dagegen alle Punkte, die rechts davon liegen, eine negative sekundäre Divergenz haben.

Um nun auf der Hauptspirale[1]) von o nach einem Punkt m mit „positiver" sekundärer Divergenz zu gelangen, muß man eine gewisse Anzahl ganzer Touren und dann noch eine Teilstrecke δ_m um die Achse beschreiben (siehe Fig. 6a). Will man dagegen von o nach

Fig. 6.



einem Punkt m mit „negativer" sekundärer Divergenz kommen, dann könnte man auch eine gewisse Anzahl ganzer Touren umlaufen und dann noch eine gewisse Teilstrecke weiter nach oben; jedoch kann man dazu auch eine ganze Tour mehr machen und dann die zuviel gegangene Teilstrecke zurückgehen (siehe Fig. 6b). Diese letztere wird dann gleich der sekundären Divergenz δ_m sein. Man kann also von o immer in der Weise nach m kommen, daß man zuerst eine gewisse Anzahl ganzer Touren um den Zylinder macht und dann die Teilstrecke δ_m zu passieren hat (entweder nach vorwärts oder nach rückwärts). Die Zahl, welche die Anzahl der ganzen Touren angibt, heißt die enzyklische Zahl des Punktes m und wird durch Δ_m bezeichnet. Von der enzyklischen Zahl ließe sich also folgende Definition geben: Die Anzahl Touren, welche man in der Hauptspirale rundum den Zylinder machen

1) „Aufwärts" steigend.

muß, um auf der Vertikalen durch o in denjenigen Punkt der Hauptspirale zu kommen, welcher in nächster Nähe des in Frage kommenden Punktes gelegen ist, heißt enzyklische Zahl des Punktes m.

Ganz allgemein gilt also folgende Gleichung:

$$m\alpha = \delta_m + \Delta_m \cdot 360^0, \tag{1}$$

worin δ_m positiv und negativ sein kann.

Diese Formel, welche zuerst durch die Gebrüder BRAVAIS (l. c.) gegeben wurde, bildet eine der Fundamente, auf welchem alle weiteren Betrachtungen aufgebaut werden.

§ 8. Die Berechnung der enzyklischen Zahlen Δ_m und Δ_n. Unter der Voraussetzung, daß m und n die Punkte des Systems sind, die o am nächsten liegen, läßt sich der Wert der enzyklischen Zahlen für diese Punkte auf einfache Weise berechnen. In diesem Fall sind, wie gesagt, die m- und die n-zeilige Spirale konjugiert, es können aber diese Spiralen verschiedene Richtungs-

Fig. 7.

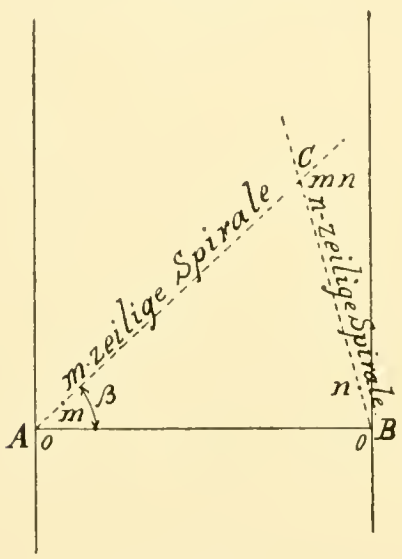


Fig. 8

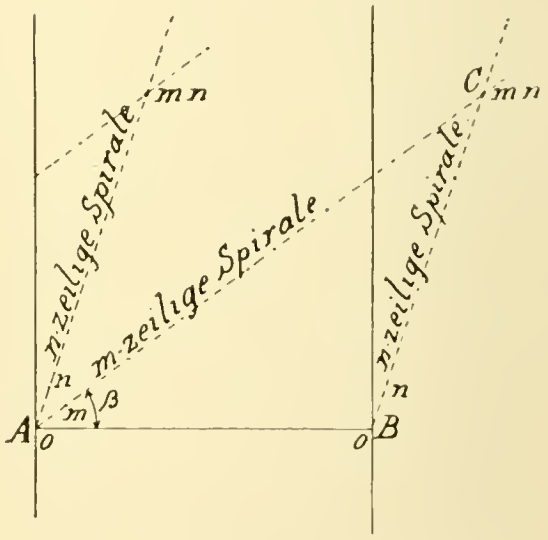


Fig. 9.

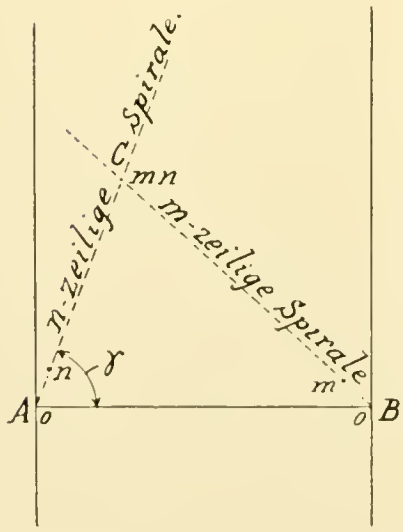
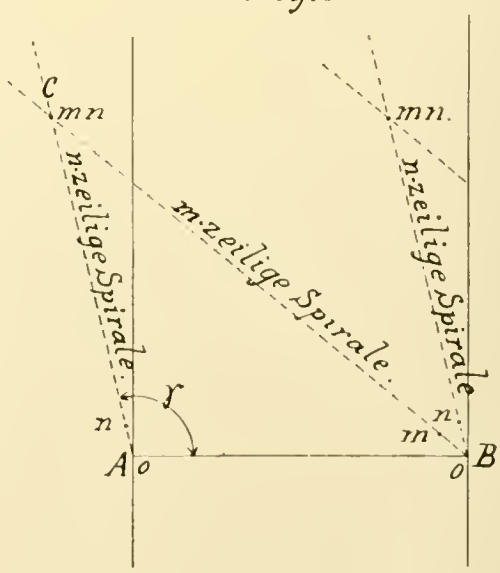


Fig. 10.



verhältnisse aufweisen, von denen 4, welche für unsere Betrachtungen die meiste Bedeutung haben, in Fig. 7, 8, 9 und 10 abgebildet sind. Andere Richtungsverhältnisse kann man sich u. a. da-

durch vergegenwärtigen, daß man in diesen Figuren die Buchstaben m und n vertauscht, wieder andere erhält man, wenn die m- und n-zeilige Spirale einen kleineren Winkel als hier miteinander bilden. Diese Richtungsverhältnisse kommen, wie sich später ergeben wird, bei unseren weiteren Betrachtungen nicht vor.

In allen abgebildeten Figuren schneiden sich die m- und die n-zeilige Spirale in dem Punkte mn, sind es doch konjugierte Spiralen.

Gemäß unserer Formel 1 erhalten wir nun:

$$m\alpha = \delta_m + \Delta_m \cdot 360^0 \qquad n\alpha = \delta_n + \Delta_n \cdot 360^0$$

also $$mn\alpha = n\delta_m + n \cdot \Delta_m \cdot 360^0 \qquad mn\alpha = m\delta_n + m \cdot \Delta_n \cdot 360^0$$

woraus folgt: $$m\,\delta_n - n\,\delta_m = (n\,\Delta_m - m\,\Delta_n)\,360^0$$

Eine Betrachtung der Lage vom Punkt mn in den 4 Figuren ergibt nun, daß für alle diese Figuren:

$$m\,\delta_n = \delta_{mn}$$

ist, während aber für die Figuren 7 und 10:

$$n\,\delta_m = \delta_{mn} - 360^0$$

ist, wird für die Figuren 8 und 9:

$$n\,\delta_m = \delta_{mn} + 360^0$$

Hieraus folgt, daß die obengegebene Gleichung sich auch in dieser Form schreiben läßt:

$$n\Delta_m - m\Delta_n = \pm 1 \qquad (2)$$

An diesem Schluß wird nichts geändert, wenn man andere Richtungsverhältnisse der Spiralen in Betracht zieht; daß dies der Fall ist, wenn m und n vertauscht werden, leuchtet von selbst ein, aber auch in anderen Fällen überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit dieser Folgerung.

Die Gleichung (2) gibt uns nun die Möglichkeit, sobald m und n gegeben sind, die Werte Δ_m und Δ_n zu finden. Sind doch m und n, Δ_m und Δ_n ganze, positive Zahlen, während m und n keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, so daß die Gleichung (2) als eine diophantische mit den Unbekannten Δ_m und Δ_n aufgefaßt werden kann.

Nun muß hier aber darauf aufmerksam gemacht werden, daß bei der Herleitung der Formel (2) keine Rücksicht genommen ist auf die Voraussetzung, daß als „Hauptspirale“ diejenige Schraubenlinie betrachtet werden muß, die auf dem kürzesten Weg 0 und 1 verbindet. Die ganze Herleitung gilt unverändert, wenn man nicht die kürzeste Spirale, sondern eine längere zwischen 0 und 1 als „Hauptspirale“ betrachtet und dieser entlang die enzyklischen Zahlen Δ_m und Δ_n berechnet. Es liegt also auf der Hand, daß unendlich viele Werte von Δ_m und Δ_n zu finden sein werden, welche man in die Gleichung einsetzen kann. Diejenigen Werte von Δ_m und Δ_n, die für die kürzeste Hauptspirale gefunden werden, sind von allen diesen Zahlen die kleinsten. Man kann also folgende Aufgabe stellen: Es sind zwei Zahlen m und n gegeben, die durch keine gemeinschaftliche Zahl teilbar sind; man suche die kleinsten positiven ganzen Werte von Δ_m und Δ_n, die der folgenden Gleichung genügen:

$$m\,\Delta_n - n\,\Delta_m = \pm 1$$

Die Theorie der Kettenbrüche lehrt nun, daß Δ_m und Δ_n dann notwendigerweise „Zähler" und „Nenner" des letzten Annäherungsbruches der Bruchzahl $\frac{m}{n}$ sind.

Was die Berechnung dieses letzten Annäherungsbruches anbelangt, möge folgende Bemerkung gemacht werden:

Die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ kann durch den Kettenbruch $\{a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_{q-1}, a_q\}$ dargestellt werden. In der gebräuchlichen Schreibweise ist dann $a_q > 1$, denn man hört mit den aufeinander folgenden Teilungen gewöhnlich auf, sobald man einen ganzen Rest erhalten hat. Der letzte Annäherungsbruch, welchen man bei dieser Schreibweise findet, d. i. also $\{a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_{q-1}\}$, ist derjenige, welcher in der oben angeführten Regel gemeint ist.

Man kann jedoch den Bruch auch durch folgenden Kettenbruch darstellen: $\{a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_{q-1}, a_{q-1} - 1, 1\}$[1]). Der letzte Annäherungsbruch, der auf Grund dieser zweiten Schreibweise erhalten wird, darf jedoch nicht in der oben angeführten Regel angewendet werden[2]). Wir bemerken dies hier ausdrücklich, weil der Botaniker

---

1) In der Regel findet man diese Schreibweise in den mathematischen Lehrbüchern nicht angegeben; soweit mir bekannt, hat sie allein HEINR. WEBER angeführt in seinem „Lehrbuch der Algebra", 2. Aufl. 1. Band, Braunschweig, 1898, S. 407.

2) Hier möge ein Beweis dieses Satzes folgen:

Sind α, β zwei ganze Zahlen, die Primzahlen unter sich sind, und fragen wir, welche ganzen Werte von x und y der diophantischen Gleichung $\alpha y - \beta x = \pm 1$ genügen, so ist die Antwort: „unendlich viele". Ist aber x_o, y_o eine solche Lösung, so lassen sich, wie leicht einzusehen, alle diese Lösungen in folgender Form schreiben: $x = x_o + h\alpha$, $y = y_o + h\beta$, worin h eine willkürliche, positive oder negative, ganze Zahl darstellt. Man braucht also nur eine Lösung aufzufinden um imstande zu sein, alle Lösungen anzugeben. Man schreibe nun den Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ aus in der Gestalt eines Kettenbruches und endige dabei die aufeinander folgenden Teilungen, sobald ein ganzer Rest erhalten wird. In der Schreibweise:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \{a_o, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{n-1}, a_n\} \text{ ist dann } a_n \geq 2$$

Wenn man nun die aufeinander folgenden Kettenbrüche darstellt durch $\frac{P_o}{Q_o}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots\ldots \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}$, und zwar so, daß $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ ist, so ist nach einer Eigenschaft der Kettenbrüche: $P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n$ oder $\alpha Q_{n-1} - \beta P_{n-1} = \pm 1$. Hieraus folgt dann, daß die Werte $x = P_{n-1}$ und $y = Q_{n-1}$ sicher eine Lösung der diophantischen Gleichung darstellen. Alle Lösungen dafür lassen sich dann nach dem Gesagten darstellen durch: $x = P_{n-1} + h\alpha$, $y = Q_{n-1} + h\beta$, wenn $h = \pm$ (0, 1, 2, 3, 4 usw.) ist.

Es fragt sich nun, welche von allen diesen Lösungen absolut genommen die kleinste ist. Wenn wir nun nachweisen können, daß $\alpha > 2 P_{n-1}$ und $\beta > 2 Q_{n-1}$ ist, so wird es einleuchten, daß diese kleinste Lösung erhalten wird, indem man $h = o$ setzt und daß sie dann also gegeben wird durch $x = P_{n-1}$ und $y = Q_{n-1}$. Dieser Beweis läßt sich in sehr einfacher Weise geben. Es ist ja nach einer zweiten Eigenschaft der Kettenbrüche: $\alpha = P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}$ und $\beta = Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$, und da nun $a_n \geq 2$ ist, so muß auch $\alpha > 2 P_{n-1}$ und $\beta > 2 Q_{n-2}$ sein. Es ist also gezeigt, daß wirklich die kleinsten ganzen Werte von x und y, welche der diophantischen Gleichung $\alpha y - \beta x = \pm 1$ genügen, Zähler und Nenner des letzten Annäherungsbruches der Bruchzahl $\frac{m}{n}$ sind. Aus dem Beweis geht zugleich hervor, daß dabei als Schreibweise des Kettenbruches nur diejenige gewählt werden darf, welche mit einer Zahl größer als 1 endet.

geneigt sein wird, diese zuletzt angegebene Schreibweise zu gebrauchen in Analogie mit dem bekannten Kettenbruch $\{1, 1, 1, 1, 1, \text{usw.}\}$, welchen man, wenn er abgebrochen wird, nicht mit 2, sondern mit 1 enden läßt.

Beispiel. Ist in Formel (2) $m = 13$ und $n = 21$, so findet man die Werte von Δ_m und Δ_n in folgender Weise: Man schreibe den Bruch $\frac{13}{21}$ als einen Kettenbruch: $\frac{13}{21} = \{1, 1, 1, 1, 1, 2\}$ und findet dann als letzten Annäherungsbruch: $\{1, 1, 1, 1, 1\} = \{1, 1, 1, 2\} = \frac{5}{8}$, sodaß $\Delta_m = 5$ und $\Delta_n = 8$ wird.

Hätte man $\frac{13}{21}$ in dieser Weise als Kettenbruch ausgeschrieben: $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ und also als letzten Annäherungsbruch genommen $\{1, 1, 1, 1, 1, 1\} = \frac{8}{13}$, wodurch $\Delta_m = 8$ und $\Delta_n = 13$, so hätte man, wie man sieht, nicht die kleinsten Werte von Δ_m und Δ_n in der Gleichung (2) erhalten.

Die besprochene Regel findet man schon bei den Gebrüdern Bravais angegeben, doch fehlt bei ihnen der Beweis. Da wir dieselbe im weiteren Verlauf unserer Arbeit öfter anwenden werden, erschien es uns wünschenswert, hier einen Beweis dafür anzuführen.

§ 9. Annäherungswerte für die Divergenz, wenn die m- und die n-zeilige Spirale zugeordnet sind. Die besprochenen Figuren veranlassen uns noch zu einigen Bemerkungen.

Wir fanden oben die Formeln:

$$\alpha = \frac{\delta_m}{m} + \frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0 \qquad \alpha = \frac{\delta_n}{n} + \frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0$$

Es hängt nun von der Richtung der m- und n-zeiligen Spirale und von der der Hauptspirale ab, ob die Werte $\frac{\delta_m}{m}$ und $\frac{\delta_n}{n}$ positiv oder negativ sind.

Nehmen wir an, daß die Hauptspirale „rechtsgewunden“ ist, dann wird in den Figuren 7 und 8 $\frac{\delta_m}{m}$ positiv sein; es ist also dann: $\alpha > \frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0$. Ebenso wird für die Figuren 9 und 10: $\alpha < \frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0$ gefunden werden, für die Figuren 7 und 10: $\alpha < \frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0$ und für die Figuren 8 und 9: $\alpha > \frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0$. Für die 4 Spiegelbilder müssen in diesen Formeln m und n vertauscht werden.

Dadurch erhalten wir folgende Regeln:

Bei rechtsgewundener Hauptspirale wird;

a. für den Fall, daß die m-zeilige Spirale ebenfalls rechtsgewunden ist, die n-zeilige aber links, folgende Formel gelten:

$$\frac{\Delta_n}{n} \cdot 360 > \alpha > \frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0 \tag{3a}$$

b. für den Fall, daß die m-zeilige Spirale linksgewunden ist, die n-zeilige aber rechts, dagegen diese Formel:

$$\frac{\Delta_n}{n} \cdot 360 < \alpha < \frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0 \tag{3b}$$

c. für die Fälle, daß die m- und die n-zeiligen Spiralen beide links oder beide rechts gewunden sind, werden sich keine Annäherungswerte für den Wert von α angeben lassen.

Ist die Hauptspirale links gewunden, dann sieht man leicht ein, daß die Regeln a und b ebenfalls Geltung haben, nur hat man die Zeichen der Formeln 3a und 3b umzukehren, während der unter c angegebene Schluß unverändert bleibt.

Ganz allgemein kann man also als Regel aufstellen:

Ist die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom, die n-zeilige ihr antidrom, so gilt Formel (3a).

Ist die m-zeilige Spirale der Hauptspirale antidrom, die n-zeilige derselben homodrom, so gilt Formel (3b).

Sind die m- und die n-zeilige Spirale beide der Hauptspirale anti- oder homodrom, so lassen sich keine Annäherungswerte für die Divergenz angeben.

Kapitel II. Regelmäßige Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche. Allgemeine Betrachtungen.

§ 1. Definition. Rund um die Punkte eines „Punktgitters", wie uns solches aus der Abhandlung von A. BRAVAIS bekannt geworden ist (siehe § 1, Kap. I), können in der Weise Ellipsoide konstruiert werden, daß jedes Ellipsoid 12 andere kongruente und in paralleler Richtung aufgestellte berührt, während nirgends Durchschneidung von Ellipsoiden stattfindet[1]). Man kann also auch gleiche Ellipsoide stets so aufstapeln, daß die Mittelpunkte davon ein „Raumgitter" bilden; besondere Formen solcher Ellipsoidenstapel sind die Kugelstapel.

Eine gleiche Betrachtung, wie die hier für die Raumgitter angegebene, kann man nun auch für die regelmäßigen Punktsysteme auf einer Kreiszylinderfläche anstellen.

Man denke sich nämlich ein solches System abgerollt, so wird man um alle Punkte desselben gleiche und parallel gelegene Ellipsen beschreiben können und zwar so, daß jede Ellipse 4 andere gleiche berührt, während im übrigen nirgendwo Ellipsen geschnitten werden. Sind z. B. die m- und n-zeilige Spirale konjugierte, dann beschreibe man rund um den Punkt o die Ellipse, welche als halbe zugeordnete Durchmesser die halben Seiten des Parallelogramms o, m, n, $(m+n)$ besitzt, und konstruiere auch um alle anderen Punkte die übereinstimmenden Ellipsen; dieses System wird dann die angegebenen Eigenschaften besitzen. Da man nun in jedem Punktsystem unendlich viel Systeme von konjugierten Spiralen nachweisen kann, so kann man in einem regelmäßigen Punktsystem auch unendlich viele solcher Systeme von tangierenden Ellipsen konstruieren.

---

1) Man siehe: Sir WILLIAM THOMSON, Mathematical and Physical Papers. Closest Packing of one Homogeous Assemblage of Equal and similar Globes or Ellipsoids. Vol. III, 1890, p. 414. Wir bemerken noch, daß der Satz nur für die „Raumgitter" Anwendung hat und nicht für die SOHNKEschen „Punktsysteme".

Umgekehrt kann man eine unendliche Ellipsenserie stets so auf einer abgerollten Zylinderfläche anordnen, daß die Mittelpunkte ein regelmäßiges Punktsystem darauf vorstellen.

Der einfachste Fall ist nun der, daß die Ellipsen in Kreise übergehen. Es muß also auch stets möglich sein, eine Serie gleicher Kreise so auf einer Kreiszylinderfläche zu ordnen, daß die Mittelpunkte ein regelmäßiges Punktsystem bilden, während jeder Kreis durch 4 andere berührt, aber kein Kreis geschnitten wird. Solche Systeme werden wir: „Regelmäßige Kreissysteme auf einer Kreiszylinderfläche“ nennen.

Nun läßt sich schon a priori annehmen, daß nicht um jedes regelmäßige Punktsystem ein solches regelmäßiges Kreissystem zu beschreiben ist, so daß sich die Frage erhebt, um welche Punktsysteme eine solche Konstruktion wohl möglich ist. Wir wollen die Frage auch umgekehrt stellen und überlegen, welche Punktsysteme gebildet werden durch die Mittelpunkte der Kreise von regelmäßigen Kreissystemen, die mit einem bestimmten Kreisdurchmesser konstruiert sind. Vorher müssen jedoch noch einige allgemeine Eigenschaften angegeben werden, die solchen Kreiskonstruktionen eigentümlich sind.

§ 2. Allgemeine Eigenschaften. Zunächst sei bemerkt, daß diese Systeme sich in derselben Weise wie die Punktsysteme einteilen, um welche die Kreise beschrieben sind. In diesem Kapitel werden nur die „einfachen“ Kreissysteme zur Sprache kommen, bei denen also eine fortgesetzte Numerierung längs der Hauptspirale möglich ist; die „mehrfachen“ Kreissysteme werden erst später behandelt.

Berührt der Kreis um o, oder kürzer ausgedrückt der Kreis o, den Kreis m, dann müssen der Regelmäßigkeit des Systems zufolge alle Kreise um die Punkte auf der m-zeiligen Spirale einander berühren oder wie der gebräuchliche Ausdruck lautet: miteinander „Kontakt“ haben.

Die m-zeilige Spirale heißt dann „m-zeilige Kontaktspirale“. Im Ganzen sind m solche untereinander parallele Kontaktspiralen vorhanden.

Berührt der Kreis o nun außer dem Kreise m auch den Kreis n, dann sind auch noch n untereinander parallele n-zeilige Kontaktspiralen nachzuweisen. Wir sprechen in diesem Fall vom „Kontakt m und n“, und nennen einen solchen Kontakt, weil er durch zwei Zahlen ausgedrückt wird, einen „zweizähligen“.

Es wird nun nachgewiesen, daß, wenn der Kontakt m und n besteht, auch notwendigerweise die m- und n-zeiligen Spiralen „zugeordnete“ sein müssen.

Die Definition, die wir von den regelmäßigen Kreissystemen gaben, schließt die Möglichkeit aus, daß Kreise einander schneiden. Dies gilt also auch für die Kreise m und n. Hieraus folgt dann, daß die beiden gleichen Abstände om und on die zwei kürzesten sind, die man in dem ganzen Punktsystem antrifft, woraus dann nach § 6 Kap. I sofort geschlossen werden kann, daß die m- und n-zeilige Spirale zugeordnet sind.

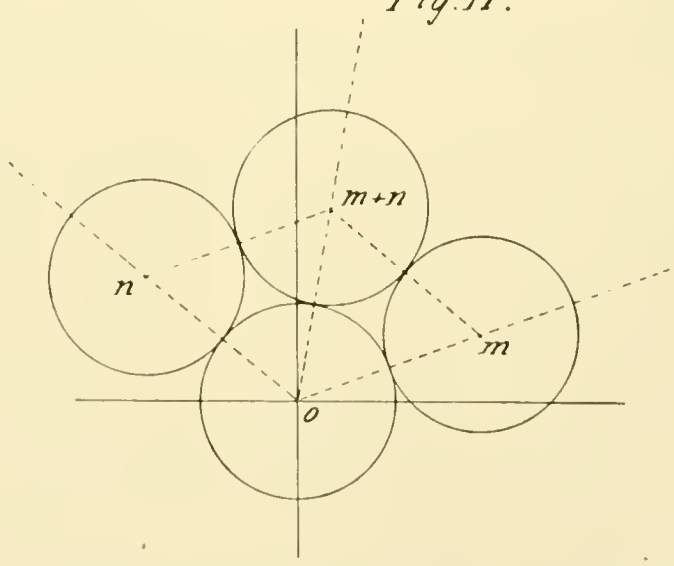
Wir wollen von jetzt an m kleiner als n annehmen. Der Punkt m wird dann selbstverständlich auch auf kleinerem vertikalen Abstande über der Linie oo liegen als der Punkt n. Besteht dann

der m- und n-zeilige Kontakt und ist also $om = on$, so muß nach einem einfachen Lehrsatz der Planimetrie notwendigerweise die m-zeilige Spirale weniger steil verlaufen als die n-zeilige. Nun haben gerade die Figuren 7, 8, 9 und 10 Beziehung auf alle die Fälle, worin die m-zeilige Spirale die am wenigsten steile ist, sodaß wir darin bei der Voraussetzung $n > m$ mögliche Richtungslagen dieser Kontaktspiralen finden. Allein diese Figuren werden bei unseren weiteren Betrachtungen zu berücksichtigen sein[1]).

§ 3. Dreizähliger Kontakt. Wir haben in § 6 Kap. I gesehen, wie bei den regelmäßigen Punktsystemen die Möglichkeit besteht, daß 3 Punkte des Systems in gleichem Abstand von dem Punkt o liegen. Dieses gilt auch für diejenigen Punktsysteme, welche die Konstruktion der regelmäßigen Kreissysteme zulassen. Aus dem in § 6 Besprochenen folgt außerdem, daß, wenn in diesem Fall zwei der Punkte die Nummern m und n haben, der dritte Punkt $(m+n)$ oder $(n-m)$ sein muß. Ist nun der Kreis o in Kontakt mit den Kreisen m und n, dann muß auch unter dieser Voraussetzung o in Kontakt sein mit $(m+n)$ oder mit $(n-m)$. In diesem Falle gehen also durch o drei Kontaktspiralen. Wir werden dann von dem dreizähligen Kontakt m, n und $(m+n)$ oder von dem dreizähligen Kontakt $(n-m)$, m und n sprechen. Tritt der Kontakt m, n und $(m+n)$ auf, dann bilden die m- und die n-zeilige Spirale einen Winkel von 120° miteinander und die $(m+n)$-zeilige halbiert diesen Winkel; haben wir dagegen den Kontakt $(n-m)$, m und n, dann bilden die m- und die n-zeilige Spirale miteinander einen Winkel von 60° und die $(n-m)$-zeilige bildet den gleichen mit der n-zeiligen.

Es wird jedoch nötig sein, die „Richtung" der drei Kontaktspiralen bei dem Auftreten eines dreizähligen Kontaktes noch etwas näher zu betrachten. Wie schon bemerkt, nehmen wir $m < n$ an, sodaß die m-zeilige Spirale geringere Steigung als die n-zeilige

Fig. 11.



haben muß. Wir wollen außerdem die m-zeilige Spirale als „rechtsgewunden" annehmen. Tritt nun der Kontakt m, n und $(m+n)$ auf, dann müssen notwendigerweise die m- und die n-zeilige Spirale

1) Auch die Fälle, bei welchen die Spiralen einen bedeutend kleineren Winkel miteinander bilden als in den genannten Figuren, kommen nicht in Betracht, wie aus § 3 hervorgehen wird.

auf verschiedene Seiten der Vertikalen durch o fallen und es muß die $(m+n)$-zeilige auf dieselbe Seite wie die m-zeilige fallen. Fig. 11 veranschaulicht das. Bei dem Kontakt $(n-m)$, m und n können die m- und die n-zeilige Spirale auf dieselbe Seite der Vertikalen fallen, aber auch auf verschiedene Seiten; auf jeden Fall muß aber die $(n-m)$-zeilige Spirale auf die andere Seite als die m-zeilige fallen. Zur Veranschaulichung des Gesagten dienen die Figuren 12 und 13 (in Fig. 12 ist $\gamma < \varepsilon$, in Fig. 13 dagegen $\gamma > \varepsilon$). Diejenigen Figuren, welche die Fälle veranschaulichen, bei denen die m-zeilige Spirale „links"-gewunden ist, findet man, indem man von den drei genannten Figuren die Spiegelbilder entwirft.

Fig. 12.

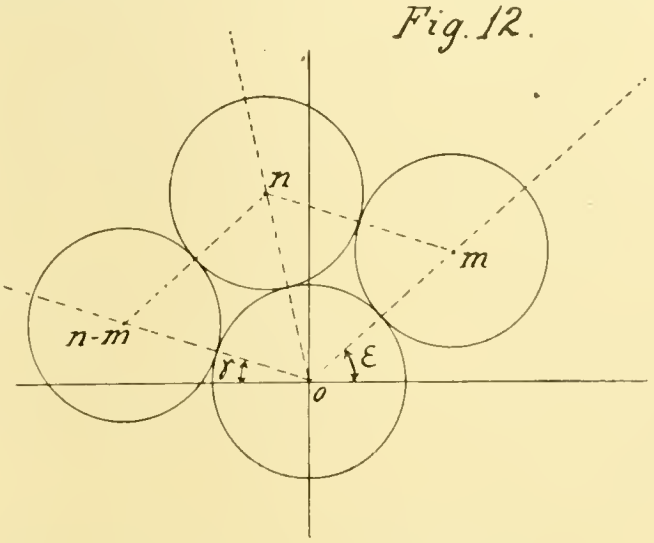
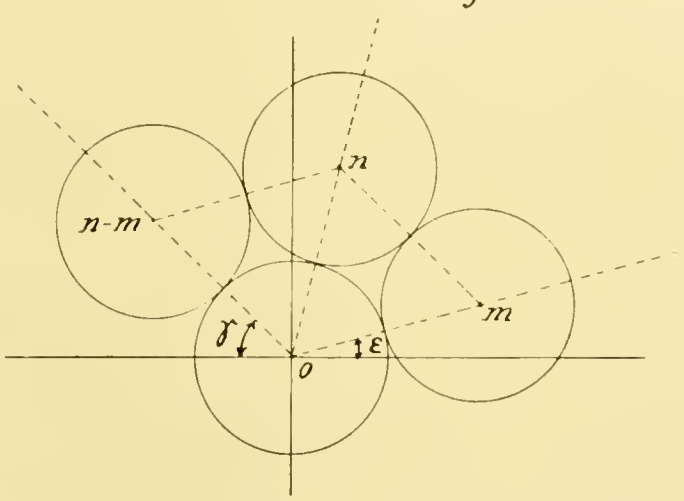


Fig 13.



Der in Fig. 11 dargestellte Fall ist ebenso wie sein Spiegelbild für alle Werte von m und n möglich; doch gilt dieses nicht für die beiden anderen Fälle in Fig. 12 und 13 und deren Spiegelbilder. Denn wenn bei dem Kontakt $(n-m)$, m und n die m- und die n-zeilige Spirale auf verschiedene Seiten der Vertikalen fallen (Fig. 12 und Spiegelbild), muß die $(n-m)$-zeilige notwendigerweise weniger steil verlaufen als die m-zeilige, und das ist allein möglich, wenn:

$$n - m < m \text{ oder } n < 2m.$$

Wenn aber bei diesem Kontakt die m- und die n-zeilige Spirale auf dieselbe Seite von der Vertikalen fallen (Fig. 13 und Spiegelbild), muß die m-zeilige Spirale von allen dreien am wenigsten steil sein, was allein unter der Voraussetzung möglich ist, daß:

$$m < n - m \text{ oder } n > 2m.$$

Dieses führt uns zu folgenden Regeln:

1. Ist $n < 2m$, dann müssen bei dem Auftreten des dreizähligen Kontaktes n, m, $(m+n)$ oder $(n-m)$, m und n die m- und die n-zeilige Spirale in entgegengesetzter Richtung verlaufen. Die $(m+n)$-zeilige hat im ersten Fall dieselbe Richtung wie die n-zeilige, die $(n-m)$-zeilige im zweiten Fall dagegen die entgegengesetzte.

2. Ist $n > 2m$, dann werden ebenso bei dem Auftreten des Kontaktes m, n und $(m+n)$, die m- und die n-zeilige Spirale einander antidrom sein; jedoch werden bei dem Auftreten des Kontaktes $(n-m)$, m und n, die m- und die n-zeilige Spirale in derselben Richtung verlaufen, die $(n-m)$-zeilige aber in entgegengesetzter.

§ 4. Einführung des Faktors b: der relative Kreisdurchmesser. Die Beziehung zwischen b und α.

Wir werden nun versuchen festzustellen, wie die Punktsysteme sein müssen, damit um die Punkte herum die Kreiskonstruktion möglich ist. Zunächst beginnen wir damit, einen Faktor einzuführen, der sich für alle unsere weiteren Besprechungen von größtem Wert erweisen wird, nämlich das Verhältnis des Durchmessers des Kreises der regelmäßigen Kreiskonstruktion zu dem Umfang der Zylinderfläche, auf welcher die Konstruktion ausgeführt wird. Diesen Faktor werden wir mit dem Buchstaben b bezeichnen und andeuten als der „relative Kreisdurchmesser".

Um die Beziehung festzustellen, welche bei den Kreissystemen zwischen dem Faktor b und der Divergenz α besteht, werden wir zwei Fälle, die dabei zu unterscheiden sind, besonders besprechen. Hierbei sei daran erinnert, daß die Hauptspirale rechtsgewunden gedacht wird.

1. Die m-zeilige Spirale, also die am schwächsten steigende Kontaktspirale, sei rechtsgewunden. Die Figuren 7 und 8 (S. 18) geben die Möglichkeiten an, welche der Lauf der n-zeiligen Spirale dabei zeigen kann.

Es gilt ganz allgemein:

$$m\alpha = \delta_m + \Delta_m \cdot 360^0.$$

Für δ_m können wir einsetzen $\frac{d\cos\beta}{AB} \cdot 360^0$, wenn der Durchmesser des Kreises dargestellt wird durch d, die Steigung der m-zeiligen Spirale durch β und der Umfang $(o-o)$ durch AB[1]).

Nun ist jedoch nach unserer Voraussetzung:

$$\frac{d}{AB} = b,$$

so daß $$\delta_m = b \cdot 360^0 \cdot \cos\beta.$$

Man betrachte nun in beiden Figuren $\triangle ABC$; darin wird $AC = nd$ und $BC = md$ sein; weiter gilt hierfür die Formel:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,AB \cdot AC\cos\beta$$

und also: $$m^2d^2 = n^2d^2 + AB^2 - 2\,AB \cdot nd\cos\beta$$

oder, wenn man durch AB^2 dividiert:

$$m\,b^2 = n^2b^2 + 1 - 2\,b\,n\cos\beta$$

---

1) Es wird hier stillschweigend von der Annahme einer rechtsgewundenen Hauptspirale Gebrauch gemacht, denn allein in diesem Falle kann $\delta_m = +\frac{d\cos\beta}{AB} \cdot 360^0$ sein. Ist die Hauptspirale linksgewunden, so ist in den Figuren 7 und 8 $\delta_m = -\frac{d\cos\beta}{AB} \cdot 360^0$.

sodaß
$$\cos\beta = \frac{(n^2 - m^2)\, b^2 + 1}{2\, bm}$$

Es wird also:
$$\delta_m = \frac{1}{2m}\left\{(n^2 - m^2)\, b^2 + 1\right\} 360^0$$

Führen wir dieses in die Formel, von der wir ausgingen, ein, so erhalten wir:
$$\frac{m\, n\, \alpha}{180^0} = (n^2 - m^2)\, b^2 + 1 + 2\, n\, \Delta_m \qquad (4a)$$

2. Betrachten wir nun den Fall, bei dem die m-zeilige Kontaktspirale linksgewunden ist. Die Figuren 9 und 10 (S. 10) veranschaulichen diesen Fall.

Wir gehen aus von der Formel:
$$n\, \alpha = \delta_n + \Delta_n \cdot 360^0$$

Nun ist hier:
$$\delta_n = \frac{d \cos\gamma}{AB} \cdot 360^0$$

oder
$$= b \cos\gamma \cdot 360^0$$

Aus der Betrachtung des $\triangle\ ABC$ folgt nun wieder:
$$n^2 d^2 = m^2 d^2 + AB^2 - 2\, md \cdot AB \cos\gamma$$

also
$$\cos\gamma = \frac{-(n^2 - m^2)\, b^2 + 1}{2\, mb}$$

woraus dann weiter abgeleitet werden kann:
$$\frac{m\, n\, \alpha}{180^0} = -(n^2 - m^2)\, b^2 + 1 + 2\, m\, \Delta_n \qquad (4b)$$

Nun sind diese Formeln 4a und 4b unter der Voraussetzung gebildet, daß die Hauptspirale rechtsgewunden ist. Diejenigen Formeln, welche gelten, wenn die Hauptspirale linksgewunden ist, erhält man, indem man dieselbe Betrachtung wie oben auf die Spiegelbilder der Figuren 7, 8, 9 und 10 anwendet, man sieht aber leicht ein, daß bei der Anfertigung dieser Spiegelbilder nur eine Vertauschung der vier Figuren stattfindet. Man kann also diese Regel aufstellen:

Ist die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom, so gilt Formel 4a, ist sie der Hauptspirale antidrom, so hat die Formel 4b Geltung.

Für jeden Wert, welchen m und n besitzen können, drücken die beiden Formeln 4a und 4b das Verhältnis zwischen dem Wert b und der Divergenz α in dem Kreissystem aus. Ist der Wert von α gegeben, so ist hierdurch der Wert von b bestimmt und umgekehrt.

Zu der vorigen Betrachtung muß nun sofort bemerkt werden, daß bei der Ableitung der beiden Formeln nur Bezug genommen ist auf die Voraussetzung, daß der Kontakt m und n besteht, nicht aber einer zweiten Bedingung entsprochen ist, welcher ein regelmäßiges Kreissystem genügen muß. Es dürfen sich nämlich in einem solchen System nirgends die Kreise schneiden. Ein solcher Schnitt kann aber, wenn auch der Formel 4a oder 4b genügt ist, doch noch stattfinden.

Denkt man sich nun die verschiedenen Lagen, die die Kreise m und n in bezug aufeinander einnehmen können, so wird es deutlich, daß die Lage, bei der sie sich so nahe wie möglich kommen, diejenige sein muß, bei der Kreis m und Kreis n einander berühren,

bei der also der dreizählige Kontakt $(n-m)$, m und n auftritt; dagegen erhält man die Lage, bei der die beiden Kreise so weit wie möglich von einander entfernt sind, wenn der Kontakt m, n und $(m+n)$ besteht. Das sind also die Grenzfälle für den Kontakt m und n. Bei den beiden dreizähligen Kontakten: m, n und $(m+n)$ und $(n-m)$, m und n besitzen aber b und α bestimmte Werte. Alle dazwischen gelegenen Werte entsprechen Kreissystemen mit dem Kontakt m und n, bei welchen kein Schnitt von Kreisen auftritt, die also die gewünschte Kreiskonstruktion möglich machen.

§ 5. Werte von b und α für dreizählige Kontakte. Die Berechnung der Werte für b und α bei dreizähligen Kontakten geschieht auf folgende Weise:

Bei dem Kontakt m, n und $(m+n)$ lassen sich zwei Fälle unterscheiden, entweder ist die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom oder sie ist ihr antidrom.

Ist sie ihr „homodrom", dann gilt, weil bei diesem dreizähligen Kontakt auch der zweizählige Kontakt m und n besteht, die Formel 4a:

$$\frac{mn\,\alpha}{180^0} = (n^2 - m^2)\,b^2 + 1 + 2\,n\,\Delta_m$$

Da nun außerdem der zweizählige Kontakt m und $(m+n)$ vorhanden ist, dürfen wir diese Formel noch einmal anwenden, wenn wir n durch $m+n$ ersetzen, wodurch sie übergeht in die folgende:

$$\frac{m\,(m+n)\,\alpha}{180^0} = (n^2 - 2\,mn)\,b^2 + 1 + 2\,(m+n)\,\Delta_m$$

Da nun bei dem dreizähligen Kontakte die beiden angegebenen zweizähligen gleichzeitig bestehen, so können wir aus diesen zwei Formeln die Werte von b und α für den dreizähligen Kontakt finden. Eine einfache Elimination gibt:

$$b^2 = \frac{1}{m^2+n^2+mn} \tag{5a}$$

$$\frac{m\,\alpha}{180^0} = \frac{2\,n+m}{m^2+n^2+mn} + 2\,\Delta_m \tag{5b}$$

Betrachten wir zweitens den Fall, daß die m-zeilige Spirale der Hauptspirale „antidrom" ist, dann hat die Formel 4b Geltung:

$$\frac{mn\,\alpha}{180^0} = -(n^2 - m^2)\,b^2 + 1 + 2\,m\,\Delta_n$$

Besteht aber der Kontakt m, n und $(m+n)$, dann ist auch der zweizählige Kontakt n und $(m+n)$ vorhanden und da die n-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom ist, können wir für diesen Kontakt Formel 4a anwenden, wenn wir darin m durch n und n durch $(m+n)$ ersetzen, wodurch dieselbe übergeht in:

$$\frac{n\,(m+n)\,\alpha}{180^0} = (m^2 + 2\,mn)\,b^2 + 1 + 2\,(n+m)\,\Delta_n\,.$$

Aus diesen beiden Formeln ergibt sich aber derselbe Wert von b als oben, während α gegeben wird durch:

$$\frac{n\,\alpha}{180^0} = \frac{2\,m+n}{m^2+n^2+mn} + 2\,\Delta_n\,. \tag{5c}$$

Gleichartige Betrachtungen werden für Werte von b und α für den dreizähligen Kontakt $(n-m)$, m und n ergeben:

$$b^2 = \frac{1}{m^2+n^2-mn} \tag{6a}$$

$$\frac{m\alpha}{180^0} = \frac{2n-m}{m^2+n^2-mn} + 2A_m \text{ und } \frac{n\alpha}{180^0} = \frac{2m-n}{m^2+n^2-mn} + 2A_n \tag{6b}$$

Alle Werte von b und α, die zwischen den aus den Formeln 5 und 6 hervorgehenden Größen liegen, werden nach dem vorher Gesagten Kreissystemen entsprechen, bei denen zwischen den Kreisen m und n kein Schneiden auftritt und worin demgemäß nirgends ein Schnitt der Kreise zu finden ist.

Es sei noch bemerkt, daß der Wert von b für den Kontakt m, n und $(m+n)$ kleiner ist als der für den Kontakt $(n-m)$, m und n, bei gleichem Wert von m und n. Bei dem „höheren" dreizähligen Kontakt hat also b einen kleineren Wert als bei dem „niederen".

§ 6. Graphische Darstellung. Graphisch dargestellt können die beiden Formeln 4a und 4b durch eine Parabel veranschaulicht werden, wenn man die Werte von α auf der X-Achse und die zugehörigen von b auf der Y-Achse abträgt. Die Darstellung II Tafel II enthält solche Parabeln bei verschiedenen Werten von m und n; später wird hierüber ausführlich gesprochen werden. Hier wollen wir nur die Aufmerksamkeit darauf lenken, daß die Achse der Parabel zusammenfällt mit derjenigen Koordinatachse, auf der α abgetragen wird, und daß der Scheitel der Parabel auf derselben Achse gelegen ist, was sich unmittelbar aus den genannten Formeln ergibt.

Die Formel 4a wird durch eine Parabel dargestellt, deren beide Zweige nach rechts gerichtet sind, 4b dagegen durch eine solche, deren Zweige nach links laufen. Aus dem vorigen Paragraphen ergibt sich nun, daß nur ein Teil der unendlichen Parabel den Werten von b und α entspricht, mit welchen ein regelmäßiges Kreissystem zu konstruieren ist. Dieser Teil liegt zwischen den Punkten, deren Ordinaten gegeben sind durch $b^2 = \frac{1}{m^2+n^2-mn}$ und $b^2 = \frac{1}{m^2+n^2+mn}$. Diese Endpunkte des betreffenden Teiles, von denen der erstere am höchsten gelegen ist, entsprechen den dreizähligen Kontakten $(n-m)$, m, n und m, n, $(m+n)$.

Nach dem vorher Gesagten müssen nun in jedem der den drei Kontakten entsprechenden Punkte drei Parabeln sich treffen und zwar im Punkt m, n und $(m+n)$ diejenigen, welche mit den zweizähligen Kontakten m und n, m und $(m+n)$ und n und $(m+n)$ übereinstimmen. Über den Verlauf der drei Parabeln von dem Treffpunkt aus werden wir später ausführlich sprechen.

Aus dem Gesagten lassen sich noch einige wichtige Schlüsse ziehen in bezug auf die Richtung der Kontaktspiralen.

§ 7. Richtung der Kontaktspiralen bei zweizähligem Kontakte. Betrachten wir die Serie zusammengehöriger Werte von b und α, die bei einem bestimmten zweizähligen Kontakt und bei einer bestimmten Richtung der Hauptspirale möglich sind und welche also einem bestimmten Stück der Parabel entsprechen. Bei dem Kontakte m, n und $(m+n)$ sind die m- und die n-zeilige

Spirale nach § 3 dieses Kapitels immer antidrom; aber bei dem Kontakte $(n-m)$, m und n, können diese Spiralen einander sowohl anti- als homodrom sein, und zwar antidrom, wenn $n < 2m$, und homodrom, wenn $n > 2m$. Sind sie bei dem Kontakt $(n-m)$, m und n antidrom wie bei dem Kontakte m, n und $(m+n)$, dann müssen bei konstanter Windungsrichtung der Hauptspirale auch notwendigerweise beide Spiralen bei beiden dreizähligen Kontakten dieselbe Richtung besitzen. Wäre das nicht der Fall, so würden bei dem Übergang von Kontakt $n-m$, m und m zum Kontakt m, n und $m+n$ beide ihre Richtung verändert haben müssen, was, ohne daß die Kreise m und n einander schneiden, nicht möglich sein kann. Da aber zwischen dem „höheren" und „niederen" Kontakt keine anderen dreizähligen Kontakte und also auch kein Schnitt von Kreisen vorkommt, so ist ein Passieren der Kreise ausgeschlossen.

Wir kommen also zu folgenden zwei Schlüssen:

1. Ist $n < 2m$, dann müssen bei allen regelmäßigen Kreissystemen mit dem Kontakt m und n, die m- und die n-zeilige Spirale einander antidrom sein.

2. Ist $n > 2m$, dann werden unter den regelmäßigen Kreissystemen mit dem Kontakt m und n sowohl Konstruktionen vorkommen, bei welchen die m- und die n-zeilige Spirale antidrom, als auch solche, bei welchen sie homodrom sind.

Es läßt sich nun, wie leicht einzusehen ist, diesen zwei Regeln noch eine dritte hinzufügen.

3. Die m-zeilige Kontaktspirale zeigt bei konstanter Windungsrichtung der Hauptspirale in allen Fällen mit demselben Kontakt m und n auch gleiche Windungsrichtung und zwar sowohl wenn $n < 2m$, als wenn $n > 2m$ ist.

Es folgt aus dieser letzten Regel, daß in allen Fällen mit demselben Kontakt m und n, die m-zeilige Spirale entweder der Hauptspirale homodrom oder antidrom gewunden ist, daß es aber unmöglich ist, daß in gewissen Fällen mit einem Kontakt m und n die beiden Spiralen homodrom, während sie in anderen Fällen mit diesem Kontakt antidrom laufen. Es ist dies darum von Interesse, weil daraus hervorgeht, daß wir für einen bestimmten Kontakt entweder Formel (4a) oder (4b) anzuwenden haben und nicht etwa für bestimmte Fälle des Kontakts die eine Formel, für andere Fälle die zweite.

Aus dem Gesagten folgt aber, daß, falls $n < 2m$ ist, die n-zeilige Spirale in verschiedenen Fällen mit dem Kontakte m und n wohl die Windungsrichtung ändern kann und daß dabei die Möglichkeit besteht, daß diese Spirale vertikal verläuft; die Divergenz beträgt in diesem letzten Fall $\alpha = \frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0$. Ist $n < 2m$, dann kann dieser Fall nicht vorkommen.

§ 8. Annäherungswerte für die Divergenz beim Kontakt m und n. In der Voraussetzung, daß $n < 2m$ ist, lassen sich nun einige sehr bemerkenswerte Schlüsse ziehen über die Grenzwerte, zwischen welchen sich die Divergenz bei m- und n-zähligem Kontakt bewegt.

Es sind nämlich bei dieser Voraussetzung die m- und die n-zeilige Spirale stets antidrom; und es werden dann auch die n- und

$(m+n)$-zeilige Spirale das immer sein, wobei unter der $(n+m)$-zeiligen Spirale nicht eine „Kontakt"spirale verstanden ist, sondern die $(m+n)$-zeilige Spirale des Punktsystemes, um dessen Punkte die Kreiskonstruktion mit Kontakten m und n ausgeführt werden kann.

Ist nun die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom, die n-zeilige ihr also antidrom, dagegen die $(m+n)$-zeilige ihr homodrom, dann können wir für diese zwei letzten Spiralen die Formel 3b aus § 9, Kap. I anwenden; es wird also:

$$\frac{\Delta_{m+n}}{m+n} \cdot 360^0 < \alpha < \frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0. \tag{7a}$$

Ist dagegen die m-zeilige Spirale der Hauptspirale antidrom, demgemäß die n-zeilige ihr homo- und die $(m+n)$-zeilige ihr antidrom, so können wir für diese zwei letzten Spiralen Formel 3a aus § 9 Kap. I anwenden, und es wird:

$$\frac{\Delta_{m+n}}{m+n} \cdot 360^0 > \alpha > \frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0 \tag{7b}$$

Allgemein gilt also, wenn $n < 2m$, die Formel:

$$\frac{\Delta_{m+n}}{m+n} \cdot 360^0 \lessgtr \alpha \lessgtr \frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0 \tag{7}$$

Die oberen Zeichen gelten, wenn die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom ist, die unteren, wenn sie ihr antidrom ist[1]).

Von Formel (7) wird später eine bedeutungsvolle Anwendung gemacht werden.

§ 9. Rechtwinklige Kontakte. Wir fragen jetzt, welche Werte der Faktor b und die Divergenz α aufweisen, wenn bei einem Kontakt m und n, die m- und n-zeiligen Spiralen einander rechtwinklig schneiden, d. h. wenn ein „rechtwinkliger Kontakt m und n" besteht.

Es wird einleuchten, daß eine solche Lage der Spiralen nur dann verwirklicht sein kann, wenn die m- und n-zeilige Spirale einander antidrom sind, und also Richtungslagen aufweisen, wie sie in Fig. 7 und Fig. 9 abgebildet sind, mit dem Unterschied aber, daß der Winkel zwischen den Spiralen ein rechter sein muß.

Aus diesen beiden Figuren ergibt sich dann, wenn der Kreisdurchmesser wieder gleich d gesetzt wird, daß für rechtwinklige Kontakte

$$AB^2 = m^2 d^2 + n^2 d^2$$

ist, und daraus folgt:

$$b^2 = \frac{1}{m^2+n^2}. \tag{9}$$

Diese Formel gilt also sowohl für den Fall, daß die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom läuft, als für denjenigen, daß diese Spiralen einander antidrom gewunden sind.

Die zugehörigen Werte von α findet man, indem man diesen Wert von b in die Formeln 4a und 4b einsetzt. Also wird, wenn die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom läuft, die Divergenz

---

1) Wir geben dieser Formel in bestimmten Fällen den Vorzug vor der früher gefundenen: $\frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0 \lessgtr \alpha \lessgtr \frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0$, weil sie engere Grenzen angibt als die letztere.

für den rechtwinkligen Kontakt m und n gegeben durch die Formel:

$$m\alpha = \left(\frac{n}{m^2+n^2} + \Delta_m\right) 360^0, \tag{10a}$$

während für den Fall, daß diese beiden Spiralen antidrom gewunden sind, die Divergenz für den genannten Kontakt gefunden wird durch die Formel:

$$n\alpha = \left(\frac{m}{m^2+n^2} + \Delta_n\right) 360^0. \tag{10b}$$

Wir bemerken noch, daß der Wert von b, welcher aus der Formel (9) folgt, zwischen den beiden Werten liegt, welche dieser Faktor bei den dreizähligen Kontakten m, n und $(m+n)$ und $(n-m)$, m und n besitzt und welche durch die Formeln 5a und 6a gegeben sind. Nun waren diese beiden Werte die Grenze von allen Werten von b, welche regelmäßigen Kreissystemen entsprechen. Hieraus folgt also, daß bei allen möglichen Werten für m und n auch eine Kreiskonstruktion mit rechtwinkligem Kontakt realisierbar ist.

Kapitel III. Systeme von tangierenden Kreisen mit Kontakten aus der Hauptreihe auf einer Kreiszylinderfläche.

§ 1. Die Hauptreihe. Die allgemeinen Betrachtungen der vorhergehenden Kapitel wollen wir nun anwenden auf bestimmte Zahlenbeispiele; dadurch wird das Besprochene noch näher erläutert werden.

An erster Stelle wollen wir zwei- und dreizählige Kontaktfälle besprechen, wobei die Werte m und n zwei oder drei aufeinander folgende Zahlen sind aus der Reihe:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 usw.,

eine Reihe, welche sich durch die beiden Eigenschaften auszeichnet, daß die ersten Glieder die einfachen Zahlen 0 und 1 sind und daß jedes folgende Glied gleich der Summe der beiden vorhergehenden ist.

Diese Reihe ist bei den Mathematikern als die Reihe von LAMÉ oder von GERHARDT bekannt, wird jedoch von den Botanikern gewöhnlich als die von FIBONACCI, BRAUN oder auch wohl kurzweg als die Hauptreihe bezeichnet[1]). Weiterhin werden wir ausschließlich diesen letzten Ausdruck anwenden und werden, sobald m und n zwei aufeinander folgende Glieder dieser Reihe sind, von einem zweizähligen Kontakte m und n aus der Hauptreihe sprechen.

In dieser Reihe ist, abgesehen von den ersten vier Gliedern, jedes folgende Glied kleiner als das doppelte vorhergehende. Die Eigenschaften, die wir in § 3 und § 7 des vorigen Kapitels für $n < 2m$ abgeleitet haben, gelten also in allen Fällen, in denen m

---

1) Man vergleiche: F. LUDWIG. Weiteres über Fibonaccikurven (Originalmitteilung), Bot. Zentralbl. Bd. LXVIII, 17. Jahrg. 1896, S. 1—8.

und n zwei aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind. Es wird sich dies für unsere Betrachtungen als von großem Interesse herausstellen.

§ 2. Berechnung von Δ_m und Δ_n für zweizählige Kontakte aus der Hauptreihe. Wie aus dem hervorgeht, was wir in Kapitel I § 8 besprochen haben, lassen sich die Werte Δ_m und Δ_n im allgemeinen bestimmen, indem wir den letzten Annäherungsbruch des Ausdruckes $\frac{m}{n}$ berechnen, dessen Zähler und Nenner sie bilden. Führt man eine solche Berechnung durch in den Fällen, in welchen m und n aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind, so findet man, daß,

$$\begin{array}{ll} \text{wenn:} & \frac{m}{n} = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \ldots \\ \text{dann} & \frac{\Delta_m}{\Delta_n} = \frac{1}{0}, \frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \ldots \end{array} \qquad (11)$$

ist. Dieses Resultat verdient hinsichtlich der ersten drei Glieder einige nähere Erläuterung. Für den Fall $\frac{m}{n} = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$ oder $\frac{1}{2}$ ist, läßt sich ja der Ausdruck $\frac{m}{n}$ nicht ohne Anwendung eines Kunstgriffes in die Form eines Kettenbruches schreiben, dessen letzter Annäherungsbruch zu bestimmen wäre. In diesem Falle ist es nun das Beste, zu der Formel zurückzukehren, aus der wir zu obenstehender Regel gekommen sind. Wir haben nämlich ursprünglich abgeleitet, daß Δ_m und Δ_n die kleinsten ganzen Werte sind, die der Formel $m\Delta_n - n\Delta_m = \pm 1$ entsprechen; sind nun m und n klein, wie in den drei genannten Brüchen, so lassen sich die Werte von Δ_m und Δ_n aus dieser Gleichung durch Probieren mit anderen kleinen Werten unmittelbar finden. Man wird dann auch die Richtigkeit der oben angegebenen Werte von $\frac{\Delta_m}{\Delta_n}$ für die ersten drei Glieder der Identitätsreihe sehr leicht bei Anwendung dieser Formel einsehen.

Man kann nun aus den beiden gegebenen Reihen für $\frac{m}{n}$ und $\frac{\Delta_m}{\Delta_n}$ folgende Eigenschaft herleiten: Abgesehen von dem Werte $\frac{0}{1}$ ist für alle Werte des Ausdruckes $\frac{m}{n}$ der Bruch $\frac{\Delta_m}{\Delta_n}$ identisch gleich $\frac{2m-n}{n-m}$ zu setzen. Man kann dies auch folgendermaßen ausdrücken: Sind m und n zwei aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe, dann ist:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_m = 2m - n \\ \Delta_n = n - m \end{array}\right\} \qquad (12)$$

mit Ausnahme des Falles, wo $m = 0$ und $n = 1$ ist.

Die Tatsache, daß der einfachste Fall $m = 0$, $n = 1$ von dieser Regel ausgeschlossen ist, findet ihre Erklärung in dem Umstande, daß in diesem Falle die Werte von Δ_m und Δ_n die frühere Bedeutung verloren haben. Der diesen Werten entsprechende Kontaktfall,

welcher später näher besprochen wird, ist aber so einfach, daß ein langes Verweilen bei dieser Ausnahme unnötig erscheint.

Der hier gegebene Beweis ist nicht streng mathematisch, es möge ein anderer folgen, der uns zugleich Gelegenheit geben wird, einzelne bedeutende Eigenschaften der Hauptreihe näher zu beleuchten.

Wir nehmen an, daß m und n aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind (jedoch nicht die kleineren), es sind dann $5m - 3n$, $2n - 3m$, $2m - n$, $n - m$ Glieder dieser Reihe, die m und n vorhergehen.

Zuerst sei darauf hingewiesen, daß der Bruch $\frac{m}{n}$ in diesem Falle stets dargestellt werden kann durch einen Kettenbruch, dessen Teilnenner alle gleich 1 sind. Es ist nämlich in dieser Reihe ein folgendes Glied stets kleiner als das doppelte vorhergehende, und es läßt sich darum der Bruch $\frac{m}{n}$ in dieser Form schreiben:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1 + \frac{n-m}{m}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2m-n}{n-m}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2n-3m}{2m-n}}}} = \text{usw.} \qquad (\alpha)$$

Die Teilung kann fortgesetzt werden bis man einen Rest $\frac{1}{1}$ erhält.

Wir können also auch folgende Schreibweise anwenden:

$$\frac{m}{n} \equiv \{\, 1, 1, 1, 1, \ldots . \; s \text{ Glieder } 1 \ldots . 1, 1, 1, 1, 1 \,\}$$

Nun erwähnten wir, daß für die Bestimmung von $\frac{\Delta_m}{\Delta_n}$ der Kettenbruch, der den Ausdruck $\frac{m}{n}$ darstellt, abgebrochen werden muß, sobald ein ganzer Rest erhalten wird; nur dann erhält der letzte Annäherungsbruch den Wert $\frac{\Delta_m}{\Delta_n}$ (siehe S. 20). Darum dürfen wir für den Kettenbruch nicht obenstehende Schreibweise anwenden, sondern haben folgende zu nehmen:

$$\frac{m}{n} = \{\, 1, 1, 1, 1, \ldots . \; s \text{ Glieder } 1 \ldots . 1, 1, 1, 2 \,\}.$$

Der letzte Annäherungsbruch des Kettenbruches ist also:

$$\frac{\Delta_m}{\Delta_n} \equiv \{\, 1, 1, 1, 1, \ldots . \; s \text{ Glieder } 1 \ldots . 1, 1, 1 \,\}$$

oder wieder auf die andere Weise geschrieben:

$$\frac{\Delta_m}{\Delta_n} = \{\, 1, 1, 1, 1, \ldots . \; s \text{ Glieder } 1 \ldots . 1, 2 \,\}$$

Derjenige Kettenbruch, der den Ausdruck $\frac{\Delta_m}{\Delta_n}$ darstellt, unterscheidet sich also von dem, welcher identisch ist mit dem Bruch $\frac{m}{n}$ darin, daß 2 Teilnenner 1 weniger darin vorkommen.

Schreibt man nun den Bruch $\frac{2m-n}{n-m}$ auf dieselbe Weise als Kettenbruch, wie wir oben bei $\frac{m}{n}$ taten, so wird:

$$\frac{2m-n}{n-m} = \frac{1}{1+\frac{2n-3m}{2m-n}} \qquad (\beta)$$

und vergleicht man die Ausdrücke (α) und (β), so ist klar, daß die Kettenbrüche, durch welche die Ausdrücke $\frac{m}{n}$ und $\frac{2m-n}{n-m}$ dargestellt werden können, ebenfalls nur darin verschieden sind, daß in dem ersten Ausdruck zwei Teilnenner 1 mehr vorkommen. Dann ist jedoch notwendigerweise $\frac{\Delta_m}{\Delta_n} \equiv \frac{2m-n}{n-m}$.

Der hier gelieferte Beweis gilt selbstverständlich ausschließlich für die Fälle, bei denen in dem Kettenbruch für $\frac{m}{n}$ mindestens zwei Teilnenner vorkommen, also für alle Werte von $\frac{m}{n} \geqq \frac{3}{5}$. Für die niederen Werte $\left(\text{mit Ausnahme von } \frac{m}{n} \equiv \frac{0}{1}\right)$ kann man sich aber unmittelbar von der Richtigkeit unserer Regel überzeugen.

§ 3. Zahlenbeziehung zwischen m und n in der Hauptreihe. Die gefundene Eigenschaft setzt uns in den Stand eine Beziehung abzuleiten, die zwischen m und n besteht, sobald diese Größen aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind, eine Eigenschaft, von der späterhin Gebrauch gemacht werden soll.

Nach Formel (2) ist:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = \pm 1$$

Setzt man hierin die durch (12) gegebenen Werte von Δ_m und Δ_n ein, so wird:

$$m(n-m) - n(2m-n) = \pm 1$$

oder:
$$n^2 - mn - m^2 = \pm 1 \qquad (13)$$

Von der Richtigkeit dieser Formel kann man sich sehr leicht durch Einsetzen verschiedener Werte aus der Hauptreihe für m und n überzeugen[1]).

§ 4. Die Beziehung zwischen b und α für zweizählige Kontakte aus der Hauptreihe. Setzen wir die Werte, die wir in § 2 für Δ_m und Δ_n fanden, nämlich $\Delta_m = 2m-n$, $\Delta_n = n-m$ in die Formeln 4a und 4b ein, so können wir, wenn wir es mit zweizähligen Kontakten aus der Hauptreihe zu tun haben, die Beziehung zwischen b und α ausdrücken durch folgende Gleichung:

$$\frac{mn\alpha}{180^0} = (n^2-m^2)\,b^2 + 1 + 2n(2m-n) \qquad (14a)$$

1) Diese Eigenschaft gilt auch für $m = 0$, $n = 1$, und ist auf einfachem Wege zu beweisen, ohne von der im vorigen § besprochenen Eigenschaft auszugehen; für unseren Zweck ist der obenstehende Beweis hinreichend.

für den Fall, daß die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom läuft, und durch die Gleichung:

$$\frac{n\,m\,\alpha}{180^0} = -(n^2 - m^2)\,b^2 + 1 + 2\,m\,(n - m) \qquad (14b)$$

für den Fall, daß diese beiden Spiralen einander antidrom sind.

Jedoch muß hierbei der Vorbehalt gemacht werden, daß die Gleichungen $\Delta_m = 2\,m - n$ und $\Delta_n = n - m$ nicht gelten für den Kontaktfall $m = 0$, $n = 1$, sodaß dafür auch die Gleichungen 14a und 14b nicht gültig sind. Um nun für den Kontakt 0 und 1 die Beziehung zwischen b und α zu finden, müssen wir zu den Formeln 4a und 4b zurückkehren. Welche von diesen beiden Gleichungen wir jedoch anwenden müssen, ist nicht ohne weiteres einzusehen, da dies ja davon abhängt, ob die m-zeilige Spirale homo- oder antidrom zur Hauptspirale ist, während dies von der 0-zeiligen Spirale natürlich nicht anzugeben ist. Versucht man aber die Formeln 4a und 4b für $m = 0$, $n = 1$, $\Delta_m = 1$, $\Delta_n = 0$ zu berechnen, so gibt 4a etwas Unmögliches und es bleibt allein 4b für die Anwendung geeignet und diese gibt:

$$b = 1$$

Hieraus erhellt also, daß der Kontakt 0 und 1 bei allen möglichen Werten von α vorkommen kann, aber daß stets $b = 1$ sein muß.

Wir haben hierbei noch keine Rücksicht genommen auf die Bemerkungen, die in § 4 und § 5 Kap. II gemacht sind. Aus diesen folgt nämlich, daß allein die Werte von b und α, die zwischen denjenigen liegen, welche gelten für den Kontakt $(n - m)$, m und n und für den Kontakt m, n und $(m + n)$, für die Konstruktionen mit dem Kontakt m und n brauchbare Werte geben. Wir werden jedoch bei der Besprechung der dreizähligen Kontakte sehen, daß dies für den Kontakt 0 und 1 keine Beschränkung verursacht.

Betrachten wir nun an zweiter Stelle den Kontakt 1 und 1, wofür die Formeln (14) wohl Geltung haben. Welche dieser Gleichungen (14a) oder (14b) müssen wir anwenden? Auch hier stehen wir wieder vor der Schwierigkeit, daß die m-zeilige Spirale, hier also die 1-zeilige, sowohl homodrom als antidrom zur Hauptspirale aufgefaßt werden kann, weil hier kein Unterschied besteht zwischen der m-zeiligen und der n-zeiligen. Wir können uns auch hier auf dieselbe Weise aus der Schwierigkeit helfen. Denn versucht man $m = 1$, $n = 1$, $\Delta_m = 1$, $\Delta_n = 0$ in die Formel (14a) einzusetzen, so kommt man wieder zu einem unmöglichen Resultat und es bleibt nur die Formel (14b) übrig, die uns als Beziehung zwischen b und α bei dem Kontakte 1 und 1 gibt:

$$\alpha = 180^0$$

Hieraus folgt, daß bei dem Kontakte 1 und 1 stets eine Divergenz von 180^0 herrschen muß, daß aber b alle möglichen Werte besitzen kann. Nun wird dieser Kontakt 1 und 1 begrenzt durch den dreizähligen Kontakt 0, 1 und 1 und den dreizähligen Kontakt 1, 1 und 2. Die Werte von α und b für diesen letzten Kontakt bilden auch eine der Grenzen für den Kontakt 1 und 2.

Betrachten wir nun diesen Kontakt 1 und 2, dann ist es deutlich, daß hierbei alle Zweifel über die Anwendung der Formel (14a)

oder (14b) schwinden. Sicher ist ja hier die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom, da ja diese Spiralen identisch sind. Aus der Formel (14a) folgt durch Einsetzen von $m=1$, $n=2$, $\Delta_m=0$ und $\Delta_n=1$:

$$\alpha=(3\,b^2+1)\,90^0$$

Der Kontakt 1 und 2 wird auf der einen Seite, wie gesagt, begrenzt durch den Kontakt 1, 1 und 2, auf der anderen Seite durch den dreizähligen Kontakt 1, 2 und 3, der zugleich den einen Grenzfall bildet für den Kontakt 2 und 3. Welche Formel (14a oder 14b) muß man nun für diesen Kontakt 2 und 3 anwenden? Dies läßt sich in folgender Weise deutlich machen:

Bei dem dreizähligen Kontakt 1, 2 und 3 läuft nach § 3 S. 24 die zweizeilige Spirale sicher antidrom der m-zeiligen, d. h. hier der Hauptspirale; dann aber muß diese zweizeilige Spirale nach § 7 S. 29 auch für alle Kontaktfälle mit dem Kontakt 2 und 3 der Hauptspirale antidrom laufen. Folglich muß für den Kontakt 2 und 3 die Formel (14b) angewendet werden, welche nun ergibt:

$$\alpha=(1-b^2)\,150^0$$

Auf eben dieselbe Weise weist man nach, daß für den Kontakt 3

Tabelle I.

Zweizählige Kontakte aus der Hauptreihe bei regelmäßigen Kreissystemen auf der Kreiszylinderfläche.

Kontakte:	Die Beziehung zwischen α und b:	Werte von α und b für rechtwinklige Kontakte:
0 und 1	$b=1$	$\alpha=\frac{0}{1}\cdot 360^0=0^0$ $b=1$
1 und 1	$\alpha=180^0$	$\alpha=\frac{1}{2}\cdot 360^0=180^0$ $b=0{,}70711$
1 und 2	$\alpha=(1+3b^2)\,90^0$	$\alpha=\frac{2}{5}\cdot 360^0=144^0$ $b=0{,}44721$
2 und 3	$\alpha=(1-b^2)\,150^0$	$\alpha=\frac{5}{13}\cdot 360^0=138^0\,28'$ $b=0{,}27735$
3 und 5	$\alpha=(11+16\,b^2)\,12^0$	$\alpha=\frac{13}{34}\cdot 360^0=137^0\,39'$ $b=0{,}17150$
5 und 8	$2\,\alpha=(31-39\,b^2)\,9^0$	$\alpha=\frac{34}{89}\cdot 360^0=137^0\,31'$ $b=0{,}10600$
8 und 13	$26\,\alpha=(79+105\,b^2)\,45^0$	$\alpha=\frac{89}{233}\cdot 360^0=137^0\,30'\,39''$ $b=0{,}06551$

und 5 die dreizeilige Spirale der Hauptspirale homodrom läuft und also Formel (14a) angewendet werden muß. Wenn man so fortfährt, kann man als allgemeine Regel aufstellen:

Die m-zeilige Spirale läuft der Hauptspirale homodrom für die Kontakte:

1 und 2, 3 und 5, 8 und 13, 21 und 34, 55 und 89 usw.

Dagegen sind diese Spiralen einander antidrom für die Kontakte:

1 und 1, 2 und 3, 5 und 8, 13 und 21, 34 und 55 usw.

Die Formel (14a) gilt also für die erstgenannten Kontakte, die Formel (14b) dagegen für die letztgenannten.

Hiermit sind alle Schwierigkeiten für die Berechnung der Beziehung zwischen b und α für den Fall, daß m und n Glieder der Hauptreihe sind, aus dem Weg geräumt.

In Tabelle I (S. 37) findet man für einige wichtige Kontaktfälle dieser Reihe die Beziehung noch näher angegeben.

§ 5. Dreizählige Kontakte aus der Hauptreihe. Obwohl wir in § 5 Kapitel II den allgemeinen Ausdruck für b und α für dreizählige Kontakte abgeleitet haben, so ist die Berechnung davon doch einfacher auszuführen, wenn man die Beziehungen, die zwischen b und α für die zweizähligen Kontakte gefunden wurden, dabei anwendet.

Es werden nämlich die Werte von b und α für den dreizähligen Kontakt 0, 1 und 1 sowohl der Beziehung, die für b und α bei dem Kontakte 0 und 1 gilt, als auch derjenigen bei dem Kontakte 1 und 1, genügen, d. h. also:

$$b = 1 \text{ und } \alpha = 180^0$$

In gleicher Weise werden die Werte von b und α bei dem Kontakte 1, 1 und 2 sowohl der Beziehung genügen, die bei dem Kontakte 1 und 1 als auch derjenigen, die bei dem Kontakte 1 und 2 gilt, d. h. also:

$$\alpha = 180^0 \text{ und } \alpha = (3\,b^2 + 1)\,90^0$$

woraus folgt: $b = 0{,}57735$.

So wird auch der Kontakt 1, 2 und 3 gefunden werden aus den beiden Beziehungen:

$$\alpha = (3\,b^2 + 1)\,90^0 \text{ und } \alpha = (1 - b^2)\,150^0$$

dies ergibt $b = 0{,}37797$, $\alpha = 128^0\,34'\,37''$.

Tabelle II.

Dreizählige Kontakte aus der Hauptreihe bei regelmäßigen Kreissystemen auf der Kreiszylinderfläche.

Kontakte:	Divergenz (α):	Relative Kreisdurchmesser (b):
0, 1 und 1	180°	1
1, 1 „ 2	180°	0,57735
1, 2 „ 3	128° 34′ 37″	0,37797
2, 3 „ 5	142° 6′ 14″	0,22942
3, 5 „ 8	135° 55′ 6″	0,14285
5, 8 „ 13	138° 8′ 22″	0,08804
8, 13 „ 21	137° 16′ 12″	0,05447
13, 21 „ 34	137° 35′ 56″	0,03358
21, 34 „ 55	137° 28′ 23″	0,02080

Auf diese Weise kann man alle gewünschten dreizähligen Kontakte der Hauptreihe berechnen. In Tabelle II (S. 38) findet man die wichtigsten dieser Werte angegeben und man sieht daraus, daß für höhere dreizählige Kontakte der Wert von b abnimmt, daß aber der Wert von α auf- und abschwankt. (Man vergleiche SCHWENDENER, Mechan. Theorie S. 16.)

Die Werte von b, die für die zweizähligen Kontakte gelten, liegen also stets innerhalb dieser Grenzen; z. B. liegen die Werte von b bei dem Kontakte 1 und 1 zwischen 1 und 0,57735, beim Kontakte 1 und 2 zwischen 0,57735 und 0,37797 usw.

Dabei muß aber eines beachtet werden. Der Kontakt 0 und 1 wird offenbar begrenzt durch den Kontakt 1, 0 und 1 und den Kontakt 0, 1 und 1, aber dies sind natürlich identische Fälle. Der Kontakt 0 und 1 hat also nur einen einzigen Grenzfall. Dies wird noch deutlicher werden, wenn wir das Besprochene an Figuren erläutern.

§ 6. Graphische Darstellung der Beziehung zwischen b und α in der Hauptreihe. Wie bereits früher auseinander gesetzt ist, wird bei dieser graphischen Darstellung der Wert von α auf der X-Achse, der von b auf der Y-Achse abgetragen. Die Beziehung zwischen b und α für den Kontakt 0 und 1, d. h. $b = 1$, wird also dargestellt durch die horizontale Linie, die im Abstand 1 parallel mit der X-Achse läuft und zwar von 0^0 bis 180^0. Man siehe hierfür die graphische Darstellung II, Tafel II.

Die Beziehung zwischen den Größen für den Kontakt 1 und 1 d. i. $\alpha = 180^0$ wird dagegen durch eine vertikale Linie dargestellt. Diese läuft von dem Werte $b = 1$ bis $b = 0{,}57735$. Der erste Punkt entspricht offenbar dem Kontakte 0, 1 und 1, der zweite dem Kontakte 1, 1 und 2.

In diesem letzten Punkte schließt sich die Parabel an, welche die Beziehung zwischen b und α für den Kontakt 1 und 2 wiedergibt (d. i. $\alpha = (3\,b^2 + 1)\ 90^0$). Diese läuft bis zu dem Punkte, der dem Kontakte 1, 2 und 3 entspricht. Hier biegt nun eine Parabel nach rechts um, die dem Kontakte 2 und 3 entspricht (d. i. $\alpha = (1 - b^2)\ 150^0$), diese läuft bis zu dem Punkte, der den Kontakt 2, 3 und 5 darstellt, wo wieder eine Parabel nach links umbiegt, die die Beziehung zwischen b und α für den Kontakt 3 und 5 (d. i. $\alpha = (11 + 16\,b^2)\ 12^0$) wiedergibt usw.

Man findet einzelne der hier angegebenen Parabeln in unserer Figur an den dreizähligen Kontakten vorüber punktiert gezogen, um auf diese Weise zu zeigen, daß die betrachteten Kurven wirkliche Parabeln mit dem Scheitel auf der X-Achse sind.

§ 7. Rechtwinklige Kontakte. Die Berechnung der Werte b und α für den rechtwinkligen Kontakt m und n kann erfolgen durch Anwendung der Formeln (9) und (10) in § 9 Kap. II.

Die Formel (9) d. i.

$$b^2 = \frac{1}{m^2 + n^2}$$

läßt sich für den Fall, daß m und n aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind, nicht vereinfachen. Es wird auch niemand für diese Formel eine noch größere Vereinfachung verlangen.

Dagegen lassen sich die Beziehungen 10a und 10b in diesem Falle wohl auf einfachere Weise schreiben, wenn wir nämlich darin

(mit Ausnahme des Falles $m = 0$, $n = 1$) für Δ_m den Wert $(2m - n)$ und für Δ_n den Wert $(n - m)$ einsetzen. Es wird dann, falls die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom ist, der Wert von α gefunden aus:

$$m\alpha = \left(\frac{n}{m^2 + n^2} + 2m - n\right) 360^0 \qquad (15a)$$

und falls die beiden Spiralen einander antidrom sind, dieser Wert gegeben durch die Gleichung:

$$n\alpha = \left(\frac{m}{m^2 + n^2} + n - m\right) 360^0 \qquad (15b)$$

Nach dem, was wir in § 4 dieses Kapitels hergeleitet haben, gilt die Beziehung (15a) für die Kontakte 1 und 2, 3 und 5, 8 und 13, 21 und 34, 55 und 89 usw., dagegen die Beziehung (15b) für die Kontakte 1 und 1, 2 und 3, 5 und 8, 13 und 21, 34 und 55 usw.

Nun lassen sich zwar die Formeln (15) nicht noch weiter vereinfachen, wohl aber läßt sich das Endresultat, das man erhält, wenn man die Berechnung für die verschiedenen Kontakte ausführt, auf eine einfachere Form bringen. Man wird nämlich finden, daß für die rechtwinkligen Kontakte:

1 und 1, 1 und 2, 2 und 3, 3 und 5, 5 und 8 usw.

die Werte von α sind: $\frac{1}{2}\cdot 360^0$, $\frac{2}{5}\cdot 360^0$, $\frac{5}{13}\cdot 360^0$, $\frac{13}{34}\cdot 360^0$, $\frac{34}{89}\cdot 360^0$ usw.

Nun kann man die hierin angetroffenen Brüche $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{13}, \frac{13}{34}, \frac{34}{89}$ usw. erhalten, wenn man aus der folgenden Reihe, die in der Lehre der Blattstellungen wohl bekannt ist, jedes zweite Glied nimmt:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{21}{55}, \frac{34}{89}, \frac{55}{144}, \frac{89}{233} \text{ usw.}$$

In dieser Reihe sind Zähler und Nenner jedes Bruches gleich der Summe der Zähler und Nenner der vorhergehenden Brüche.

Wie oben bemerkt ist, können die Formeln (15) nicht für die Berechnung von α beim rechtwinkligen Kontakte 0 und 1 angewendet werden. Dieser Fall läßt sich jedoch direkt berechnen. Wenn nämlich die 1-zeilige Spirale rechtwinklig zu der 0-zeiligen steht, so muß die Divergenz gleich 0 sein, sodaß wir nun $\alpha = \frac{0}{1}\cdot 360^0$ setzen können.

Man findet in Tabelle I (S. 37) für die wichtigsten rechtwinkligen Kontakte aus der Hauptreihe die Werte von α und b angegeben, während in der graphischen Darstellung II Tafel II die Punkte, die diesen Werten entsprechen, durch kleine Kreuze dargestellt sind.

§ 8. Anfertigung und Beschreibung der geometrischen Konstruktionen. Um mit einem bestimmten Werte von b bei einem gegebenen Kontakte m und n die Kreiskonstruktion auf der abgerollten Zylinderfläche auszuführen, benutzt man die Eigenschaft, daß der Schnittpunkt der m- und der n-zeiligen Spirale, die durch den Punkt 0 gehen, stets die Nummer mn trägt.

Man nehme nun zuerst eine Zylinderfläche mit bestimmtem Umfang an, auf der man die Konstruktion ausführen will; der Wert

des Kreisdurchmessers d ist dann durch den gegebenen Wert von b bestimmt. Man wähle den Punkt o auf der Linie, längs welcher man sich die Zylinderfläche aufgeschnitten denken muß, dann soll dieser Punkt auf der linken und rechten Grenzlinie der abgerollten Zylinderfläche vorkommen. (Zur Unterscheidung wollen wir, wenn nötig, den rechtsgelegenen Punkt mit o' bezeichnen.) Man beschreibe jetzt von diesen beiden Punkten aus Kreise mit den Radien md und nd, dann wird der Schnittpunkt dieser beiden der Punkt des Systems sein, welcher die Nummer mn trägt. Verbindet man nun o und o' mit diesem Punkt, dann sind damit die m- und die n-zeilige Spirale durch den Punkt o bestimmt. Man braucht nur noch $(m-1)$ Spiralen der m-zeiligen parallel und $(n-1)$ Spiralen der n-zeiligen parallel zu konstruieren und zwar auf solche Weise, daß diese Spiralen von einander gleichen Abstand haben, um in den Schnittpunkten dieser beiden Spiralscharen alle Punkte des Punktsystems zu finden, um die die Kreiskonstruktion möglich ist.

Ein Beispiel, das aus unseren Figuren genommen ist, wird dies noch näher erläutern.

Wir nahmen für die Konstruktion des rechtwinkligen Kontaktes 2 und 3 in Fig. 6 Tafel I einen Zylinder mit dem Umfang = 5 cm. Nach Tabelle I ist für diesen Kontaktfall $b = 0{,}27735$, sodaß der Durchmesser der Kreise dieser Konstruktion $d = 5 \cdot 0{,}27735 = 1{,}387$ cm betragen muß. Um den linksgelegenen Punkte o wird nun mit einem Radius $2d = 2{,}774$ cm ein Kreis beschrieben, um den rechtsgelegenen Punkte o mit einem Radius $3d = 4{,}161$ cm. Der Schnittpunkt dieser Kreise trägt dann notwendigerweise die Nummer $2 \cdot 3 = 6$. Hiermit ist nun die zwei- und die dreizeilige Spirale durch den Punkt o bestimmt, gleichzeitig aber auch der Punkt 3 und die Punkte 2 und 4, die auf diesen Spiralen liegen. Durch den Punkt 3 kann die zweite zweizeilige Spirale und durch die Punkte 2 und 4 können die beiden anderen dreizeiligen Spiralen gezogen werden. Die Schnittpunkte dieser Spiralscharen liefern uns alle Punkte des regelmäßigen Punktsystems und um diese Punkte können nun mit dem Radius $\frac{d}{2} = 0{,}693$ cm die Kreise beschrieben werden, die den gewünschten Kontakt 2 und 3 zeigen.

Die Figuren 1—3 der Tafel IX und die Figuren 1—11 der Tafel I stellen nun eine Reihe Kreiskonstruktionen dar[1]), die auf die oben beschriebene Weise ausgeführt sind. In allen Figuren ist der Umfang des Zylinders 5 cm angenommen, während die Hauptspirale in allen diesen Fällen als rechts gewunden vorausgesetzt wird. Es sind darin durch gestrichelte Linien (außer der Linie 0—0) die m- und die n-zeiligen und, soweit sie vorhanden sind, auch die $(m+n)$ zeiligen Kontaktspiralen angegeben und zwar auf solche Weise, daß man in der Anzahl paralleler Linien die Zahlen m, n und $(m+n)$ des Kontaktes wiederfindet.

Außer Fig. 2 Tafel IX, worüber bald näheres gesagt wird, wählten wir als Beispiele ausschließlich rechtwinklige und dreizählige Kontaktfälle und ordneten diese so, daß jede folgende Figur ein höheres Kontakt darstellt als die vorhergehende.

---

1) Fig. 3 Tafel IX und Fig. 1 Tafel I sind identisch, der Grund, der uns zu dieser Wiederholung Anlaß gibt, wird später klar werden.

Fig. 1 Tafel IX stellt den senkrechten Kontakt 0 und 1 dar und die Divergenz dafür kann also durch $\frac{0}{1}$ dargestellt werden. Fig. 2 dieser Tafel ist, wie bereits gesagt, weder senkrechter Kontakt noch dreizähliger, sondern stellt den Kontakt 0 u. 1 dar bei dem Werte $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$. Man sieht in dieser Figur als Kontaktspiralen die 0- und 1-zeilige.

Fig. 3 Tafel IX und Fig. 1 Tafel I stellen den niedrigsten dreizähligen Kontakt, d. h. den Kontakt 0, 1 und 1 dar. Hierin wird man dann auch die 0-zeilige und zwei einzeiligen Kontaktspiralen angegeben finden.

Fig. 2 Tafel I gibt den Fall bei rechtwinkligem Kontakt 1 u. 1 wieder, während Fig. 3 dieser Tafel den zweiten dreizähligen Kontakt d. i. 1, 1 und 2 darstellt. In den drei letztgenannten Figuren ist die Divergenz gleich 180^0.

Fig. 4 dieser Tafel erläutert den rechtwinkligen Kontakt 1 und 2, dieser Fall entspricht einer Divergenz von $\frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$. Hier steht also der Mittelpunkt des Kreises 5 vertikal über dem vom Kreis 0.

Fig. 5 gibt den dreizähligen Kontakt 1, 2 und 3, der für unsere Betrachtungen eine große Bedeutung besitzt, wie sich später herausstellen wird.

Fig. 6 veranschaulicht den rechtwinkligen Kontakt 2 und 3. Die Bedeutung der übrigen Figuren bis Figur 11 wird dem Leser nach dem Vorhergehenden klar sein.

In allen abgebildeten Figuren wurde, wie gesagt, die Hauptspirale als rechts gewunden angenommen; man erhält die Konstruktionen, die auf die links gewundene Hauptspirale Bezug haben dadurch, daß man die Spiegelbilder dieser entwirft. Hierbei ist noch zu bemerken, daß die Spiegelbilder der Konstruktionen mit dem Kontakte 1 und 1 mit diesen identisch sind.

Daß wir für unsere Figuren ausschließlich solche mit rechtwinkligen und mit dreizähligen Kontakten wählten, hat einen besonderen Grund; es wird jedoch deutlich sein, daß die Konstruktionen für jeden anderen Kontaktfall auf dieselbe Weise auszuführen sind.

Endlich muß nun noch darauf hingewiesen werden, daß in allen unseren Konstruktionen der Durchmesser des Zylinders 5 cm angenommen und also konstant ist. Dadurch kann der Durchmesser der Kreise dieser Konstruktionen als Maß genommen werden für den Faktor b und wir können durch Vergleichung der Längen der Radien der einzelnen Kreise unmittelbar einen Eindruck von dem Werte von b bekommen. Es besitzen dann auch in den Konstruktionen mit dem rechtwinkligen Kontakt m und n die Radien der Kreise Längen, die liegen zwischen denen, welche man bei dem dreizähligen Kontakte $(m-n)$, m und n und dem dreizähligen Kontakte m, n und $(m+n)$ antrifft.

§ 9. Näherungswerte für die Divergenz. Obwohl wir für einen bestimmten zweizähligen Kontakt in den Werten von α bei den dreizähligen Kontakten $(n-m)$ m und n und m, n und $(m+n)$ die wirklichen Grenzwerte für die Divergenz gefunden haben,

ist es doch nicht ohne Interesse auch noch diejenigen Näherungswerte zu betrachten, die uns durch die Formeln 7a und 7b gegeben werden. Daß wir diese Formeln anwenden können, folgt nämlich unmittelbar aus der Erwägung, daß, wenn m und n aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind, stets $n < 2m$ ist.

Die Beziehung:

$$\frac{\Delta_{m+n}}{m+n} \cdot 360^0 \lessgtr \alpha \lessgtr \frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0$$

läßt sich, für den Fall, daß m und n aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind, in dieser Form schreiben:

$$\frac{m}{m+n} \cdot 360^0 \lessgtr \alpha \lessgtr \frac{n-m}{n} \cdot 360^0$$

Die oberen Zeichen ($<$) gelten, wenn die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom ist, d. i. also für die Kontakte 1 und 2, 3 und 5, 8 und 13, 21 und 34, usw. Die unteren ($>$) für den Fall, daß diese beiden Spiralen einander antidrom sind, d. i. also für die Kontakte 2 und 3, 5 und 8, 13 und 21, 34 und 55, usw.[1]).

Wenden wir nun diese Formel auf den Kontakt 1 und 2 an, so finden wir:

$$\frac{1}{3} \cdot 360^0 < \alpha < \frac{1}{2} \cdot 360^0$$

für den Kontakt 2 und 3 ergibt sich:

$$\frac{2}{5} \cdot 360^0 > \alpha > \frac{1}{3} \cdot 360^0$$

für den Kontakt 3 und 5:

$$\frac{3}{8} \cdot 360^0 < \alpha < \frac{2}{5} \cdot 360^0$$

usw. Man sieht, daß die Näherungswerte für die Divergenz als Teile des Umfangs ausgedrückt, durch die Glieder der Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}$, usw. dargestellt werden.

Für die Bestimmung der Näherungswerte hätten wir auch die allgemeinen Formeln 3a und 3b anwenden können und würden dann gefunden haben:

$$\frac{2m-n}{m} \cdot 360^0 \lessgtr \alpha \lessgtr \frac{n-m}{n} \cdot 360^0$$

woraus für den Kontakt 1 und 2 folgt:

$$0^0 < \alpha < \frac{1}{2} \cdot 360^0$$

für den Kontakt 2 und 3:

$$\frac{1}{2} \cdot 360^0 > \alpha > \frac{1}{3} \cdot 360^0$$

für den Kontakt 3 und 5:

$$\frac{1}{3} \cdot 360^0 < \alpha < \frac{2}{5} \cdot 360^0$$

---

1) Der Kontakt 1 und 1 bildet eine Ausnahme von dieser Regel.

usw. Man sieht hieraus, daß diese Formeln weniger genaue Näherungswerte für die Divergenz angeben als die vorigen.

§ 10. Limitwerte der Divergenz beim Fortrücken in der Hauptreihe. Unter dem Limitwert beim Fortrücken in der Hauptreihe versteht man diejenige Divergenz, die entsteht, wenn die Werte m und n zwei aufeinander folgende, unendlich große Glieder dieser Reihe sind.

Um diesen Wert annäherungsweise zu bestimmen, können wir sowohl die Formel, welche wir im vorigen Paragraphen aus den Beziehungen 7a und 7b ableiteten, als auch diejenigen Formeln, welche aus 3a und 3b folgen, anwenden. Wir wählen das letztere aus später anzugebenden Gründen. Diese Formel drückt aus, daß der Wert von α für einen Kontakt m und n stets liegen muß zwischen den Näherungswerten

$$\frac{2m-n}{m}\cdot 360^0 \text{ und } \frac{n-m}{n}\cdot 360^0$$

gleichgültig, welche Werte m und n besitzen, wofern sie nur zwei aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind.

Wir werden nun zeigen, daß diese beiden Ausdrücke immer mehr einander näher kommen, je größer m und n werden, und daß sie schließlich sich ein und derselben Limite nähern; dies muß dann notwendigerweise die gesuchte Limitdivergenz sein.

Betrachten wir den Faktor $\frac{2m-n}{m}$, dann läßt dieser sich wie folgt schreiben:

$$\frac{2m-n}{m}=\frac{1}{2+\frac{2n-3m}{2m-n}}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{5m-3n}{2n-3m}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{5n-8m}{5m-3n}}}}$$

Die Teilung läßt sich weiter fortsetzen bis zu einem Reste 1.

Auf gleiche Weise kann der Faktor $\frac{n-m}{n}$ dargestellt werden:

$$\frac{n-m}{n}=\frac{1}{2+\frac{2m-n}{n-m}}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{2n-3m}{2m-n}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{5m-3n}{2n-3m}}}}=$$

$$=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{5n-8m}{5m-3n}}}}}$$

und daraus folgt dann, daß, wenn man für den ersten Faktor diese Schreibweise einführt:

$$\frac{2m-n}{m}=\{2,\ 1,\ \ldots.\ s \text{ Glieder } 1\ \ldots.\ 1,\ 1\}$$

für den zweiten Faktor notwendigerweise die folgende gilt:

$$\frac{n-m}{n} = \{2,\ 1,\ 1,\ \ldots.\ s \text{ Glieder } 1\ \ldots.\ 1,\ 1\},$$

woraus sich ergibt, daß $\frac{2m-n}{m}$ und $\frac{n-m}{n}$ aufgefaßt werden können als zwei aufeinander folgende Näherungsbrüche des unendlich fortlaufenden Kettenbruches:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots.}}}}}$$

oder in anderer Schreibart:

$$\{2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ \ldots.\ \text{bis ins Unendliche Glieder } 1\}$$

Hieraus folgt dann zugleich, daß, wenn m und n größer werden, die oben angegebenen Faktoren sich immer mehr nähern müssen und daß sie bei unendlich großen Werten von m und n beide gleich der Limite dieses unendlich fortlaufenden Kettenbruches werden müssen.

Im folgenden Paragraphen werden wir nun nachweisen, daß diese Limite dargestellt werden kann durch $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$, sodaß dann: die Limitdivergenz der Hauptreihe $= \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\ 360^0 = 137^0 30' 28''$ ist.

Die Näherungswerte der Divergenz, die wir für bestimmte Werte von m und n im vorigen Paragraphen fanden, sind also anzusehen als Näherungswerte an diese Limitdivergenz. Dies gilt sowohl für die Näherungswerte, die wir aus Formel (3), als auch für die, welche wir aus Formel (7) abgeleitet haben. Es ist dies auch der Fall für die wirklichen Näherungswerte der Divergenz, die durch die Werte von α für die dreizähligen Kontakte dargestellt werden. Dies wird ein Blick auf die graphische Darstellung sogleich klar machen, da ja die beiden dreizähligen Kontakte, die einen bestimmten zweizähligen Kontakt begrenzen, auf verschiedenen Seiten derjenigen Ordinate liegen, welche dem Werte von $\alpha = 137^0 30' 28''$ entspricht, und sich dieser Ordinate um so mehr nähern, je höhere Kontakte betrachtet werden. Daraus folgt dann zugleich, daß bei jedem Kontakt m und n eine Konstruktion möglich ist, welche die Limitdivergenz zeigt. Eine Ausnahme von diesen beiden Regeln macht allein der Kontakt 1 und 1, aber wir sahen bereits, daß dafür auch die Formeln (3) und (7) nicht anzuwenden sind. Auch der Kontakt 0 und 1 nimmt eine besondere Stellung ein, weil hier nur ein begrenzender dreizähliger Kontakt (0, 1 und 1) anzugeben ist.

Fragen wir uns noch einmal, welche Formeln wir für das Auffinden der Limitdivergenz gebrauchten; es wurden angewandt: 1. die Formel (3) und 2. die Beziehungen $\Delta_m = 2m - n$, $\Delta_n = n - m$, welche für den Fall gelten, daß m und n aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind. Diese beiden Beziehungen sind jedoch ganz unabhängig von den Betrachtungen, die wir bei den

Kreiskonstruktionen angestellt haben, wir hätten die Berechnung der Limitdivergenz also ebenso gut schon in Kap. I geben können. Hieraus folgt, daß, wenn in einem regelmäßigen Punktsystem auf einer abgerollten Zylinderfläche die m- und die n-zeilige Spirale „zugeordnet" und die Werte m und n zwei unendlich große, aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind, die Divergenz stets der oben gefundenen Limitdivergenz gleich sein muß. Je nachdem m und n größere Glieder dieser Reihe sind, werden die Divergenzen sich weniger von diesem Limitwerte unterscheiden.

Diese Eigenschaften werden wir benutzen, wenn wir andere Systeme als die regelmäßigen Kreissysteme auf der abgerollten Zylinderfläche betrachten. Für unseren Zweck haben diese Kreissysteme jedoch bei weitem den größten Wert und darum meinten wir, die Ableitung der Limitdivergenz auch bei der Besprechung derselben geben zu müssen.

§ 11. Die stetige oder göttliche Proportion, der goldene Schnitt und die goldenen Reihen. In diesem Paragraphen werden einzelne Ableitungen gegeben werden, die, obwohl durchaus nicht neu, hier doch einen Platz finden müssen, teils weil sie für den Begriff unserer ferneren Betrachtungen unentbehrlich sind, teils auch, weil sie in verschiedenen Werken verbreitet angetroffen werden. Wer sich über die geschichtliche Entwicklung der hier besprochenen Begriffe näher orientieren will, sei auf die Werke von A. Zeising [1]) und von Fr. X. Pfeifer [2]) verwiesen.

In § 2 dieses Kapitels haben wir nachgewiesen, daß, wenn m und n zwei aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind, der Bruch $\frac{m}{n}$ in der Form eines Kettenbruches geschrieben werden kann, dessen Teilnenner alle gleich 1 sind, sodaß wir folgende Schreibweise anwenden konnten:

$$\frac{m}{n} = \{1,\ 1,\ \ldots.\ s \text{ Glieder } 1\ \ldots.\ 1,\ 1\}$$

Je höhere Glieder der Hauptreihe m und n sind, desto größer wird die Anzahl der Teilnenner in diesem Kettenbruch, für unendlich große Werte von m und n wird:

$$\operatorname{Lim} \frac{m}{n} = \{1, 1, \ldots. \text{ bis ins Unendliche Glieder } 1\}$$

Diese Limite läßt sich bequem bestimmen; bezeichnet man sie nämlich mit χ, so können wir anstelle von:

$$\chi = \operatorname{Lim} \frac{m}{n} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots.}}}}$$

1) Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers, Leipzig 1854. Das Normal-Verhältnis der chemischen und morphologischen Proportionen, Leipzig 1856. Der goldene Schnitt, Halle 1884.

2) Der goldene Schnitt und dessen Erscheinungsformen usw. Augsburg 1885. Als neuere Literatur über diesen Gegenstand verdient noch Beachtung: A. Goeringer. Der goldene Schnitt und seine Beziehung zum menschlichen Körper usw. München 1893.

auch schreiben:

$$\chi = \frac{1}{1+\chi}$$

woraus dann folgt:

$$\chi^2 + \chi - 1 = 0, \tag{16}$$

was ergibt

$$\chi = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}).$$

Die zweite Wurzel der Gleichung kommt nicht in Betracht.

Die Berechnung dieser irrationalen Zahl ist auf 34 Dezimalstellen ausgeführt worden, für unseren Zweck können wir uns mit folgendem Näherungswerte begnügen:

$$\chi = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) = 0{,}6180340 \tag{17}$$

Das jetzt berechnete Verhältnis hat den Namen „göttliche" oder „stetige Proportion" oder auch „Proportio divina" erhalten.

Da nun einmal die Limite des unendlich fortlaufenden Kettenbruches mit der ausschließlichen Indexzahl 1 bekannt ist, kann man mit deren Hilfe sofort die Limite desjenigen Kettenbruches finden, welchem wir im vorigen Paragraphen begegneten:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots.}}}}$$

Diese können wir nämlich darstellen durch:

$$\frac{1}{2+\chi}$$

und dieser Ausdruck läßt sich noch dadurch vereinfachen, daß man Zähler und Nenner mit $1-\chi$ multipliziert, woraus sich dann ergibt:

$$\frac{1-\chi}{2-\chi-\chi^2} = 1-\chi = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) = 0{,}3819660.$$

Hiermit ist die Richtigkeit des Wertes, den wir im vorigen Paragraphen einsetzten, bewiesen.

Wir weisen noch darauf hin, daß diese letzte Limite auch als der Grenzwert aufgefaßt werden kann, welchem sich die folgende Reihe nähert:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21} \text{ usw.}$$

Wir werden nun nachweisen, daß, wenn man mit zwei willkürlichen Zahlen als Anfangszahlen eine Reihe bildet, wobei jede folgende Zahl gleich der Summe der beiden vorhergehenden ist, die Limite des Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder der göttlichen Proportion χ gleich wird.

Eine solche Reihe läßt sich stets darstellen durch:

$$p,\ q,\ p+q,\ p+2p,\ 2p+3q,\ 3p+5q,\ 5p+8q \text{ usw.}$$

und man sieht sogleich ein, daß die Koeffizienten der Zahlen p und q stets zwei aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind. Man kann also zwei aufeinander folgende Glieder m und n dieser Reihe darstellen durch:

$$m = m_1 p + n_1 q \text{ und } n = n_1 p + (m_1 + n_1) q,$$

wenn m_1 und n_1 aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind, die stets größer werden, je höher die betrachteten Glieder m und n der Reihe sind.

Der gesuchte Limitwert wird also:

$$\operatorname{Lim}\frac{m}{n} = \operatorname{Lim}\frac{m_1 p + n_1 q}{n_1 p + (m_1 + n_1) q} = \operatorname{Lim}\frac{\frac{m_1}{n_1} p + q}{p + \left(\frac{m_1}{n_1} + 1\right) q} =$$

$$\frac{\chi p + q}{p + (\chi + 1) q} = \frac{\chi(\chi p + q)}{\chi p + \chi^2 q + \chi q} = \frac{\chi(\chi p + q)}{\chi p + q + (\chi^2 + \chi - 1) q} = \chi$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Die Größe χ besitzt noch eine andere Bedeutung, sie stellt nämlich das Verhältnis der beiden Teile dar, in die eine Gerade zerlegt wird, wenn man sie so teilt, daß der größere Abschnitt mittlere Proportionale zwischen der ganzen Geraden und dem kleineren Abschnitt wird.

Nennt man die ganze Länge der Linie l, den größten Abschnitt χl, so muß:

$$l : \chi l = \chi l : (l - \chi l)$$

oder:

$$\chi^2 + \chi - 1 = 0,$$

was nach (11) richtig ist, wenn χ das Verhältnis der göttlichen Proportion darstellt.

Man hat nun diese Teilung der Geraden denjenigen des goldenen Schnittes genannt; χ stellt also auch das Verhältnis des goldenen Schnittes dar.

Endlich gibt χ noch den Quotienten der goldenen Reihen an; das sind diejenigen geometrischen Reihen, bei denen jedes Glied gleich ist der Differenz oder der Summe der beiden unmittelbar vorhergehenden Glieder.

Stellen wir eine solche geometrische Reihe dar durch:

$$\ldots\ldots \frac{a}{\chi^4}, \frac{a}{\chi^3}, \frac{a}{\chi^2}, \frac{a}{\chi}, a, a\chi, a\chi^2, a\chi^3, a\chi^4, \ldots\ldots$$

in welcher a eine willkürliche Zahl vorstellt, dann muß diese Schreibweise identisch sein mit der folgenden:

$$\ldots\ldots a\left(2 + \frac{3}{\chi}\right), a\left(1 + \frac{2}{\chi}\right), a\left(1 + \frac{1}{\chi}\right), \frac{a}{\chi}, a, a\chi, a(1 - \chi), a(2\chi - 1),$$
$$a(2 - 3\chi), \ldots\ldots$$

Damit nun hierin die dritten Glieder von a ab gerechnet identisch sind, muß:

$$a\chi^2 = a(1 - \chi) \text{ oder } \chi^2 + \chi - 1 = 0,$$

sein, was nach (16) in der Tat der Fall ist, wenn χ das Verhältnis der göttlichen Proportion darstellt. Sind die dritten Glieder identisch, gleichviel welchen Wert a besitzt, dann sieht man leicht ein, daß dies auch für alle anderen Glieder gelten muß[1]).

Da nun der Faktor a willkürlich ist, so gibt es unendlich viele goldene Reihen; es ist χ der Quotient für alle diese Reihen. Als Faktor a nimmt man gewöhnlich die Einheit und spricht in diesem Fall dann wohl von „der" goldenen Reihe, die sich wie folgt schreiben läßt:

$$\ldots\ldots \frac{1}{\chi^4}, \frac{1}{\chi^3}, \frac{1}{\chi^2}, \frac{1}{\chi}, 1, \chi, \chi^2, \chi^3, \chi^4, \ldots\ldots$$

oder mit Näherungswerten:

$$\ldots\ldots 6{,}854092;\ 4{,}236068;\ 2{,}618034;\ 1{,}618034;\ 1;\ 0{,}618034;\ 0{,}381966;\ 0{,}236068;\ 0{,}145898;\ \ldots\ldots$$

Die „Hauptreihe" kann selbstverständlich keine „goldene Reihe" sein, sie ist ja keine geometrische; dennoch zeigt sie mit den „goldenen Reihen" bedeutende Übereinstimmung. Sowohl die „Hauptreihe" als die „goldenen Reihen" können nämlich als besondere Fälle dieser allgemeinen Reihe:

$$p,\ q,\ p+q,\ p+2q,\ 2p+3q,\ 3p+5q, \text{ usw.}$$

aufgefaßt werden. Außerdem sahen wir soeben, daß, je höhere Glieder der Hauptreihe man betrachtet, der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder sich χ immer mehr nähert. Hieraus folgt, daß die Hauptreihe in den höheren Gliedern sich mehr und mehr einer goldenen Reihe nähert.

Als Anfangsglied einer goldenen Reihe nimmt man auch oft die Zahl 1000 und findet dann annäherungsweise diese Reihe:

$$1000{,}00;\ 618{,}03;\ 381{,}96;\ 236{,}07;\ 145{,}90;\ 90{,}17;\ 55{,}73;\ 34{,}44;\ 21{,}29;\ 13{,}15;\ 8{,}13;\ 5{,}02;\ 3{,}11;\ 1{,}92;\ 1{,}19;$$

oder bei einer weniger genauen Annäherung:

$$1000;\ 618;\ 382;\ 236;\ 146;\ 90;\ 56;\ 34;\ 21;\ 13;\ 8;\ 5;\ 3;\ 2;\ 1.$$

Vergleicht man diese Reihe mit der in umgekehrter Reihenfolge geschriebenen „Hauptreihe":

$$987;\ 610;\ 377;\ 233;\ 144;\ 89;\ 55;\ 34;\ 21;\ 13;\ 8;\ 5;\ 3;\ 2;\ 1$$

so wird auch hierdurch einleuchten, daß die letzte Reihe sich einer goldenen Reihe nähert. Daß bei dieser Schreibart die Abweichung zwischen den höheren Gliedern der Hauptreihe und der goldenen Reihe größer ist als zwischen den niederen, findet seine Ursache in der vollkommen willkürlichen Annahme der Zahl 1000 als Anfangszahl der goldenen Reihe. Hätte man 987 als solche gewählt, so wäre die Abweichung von der Hauptreihe in den niederen Gliedern sehr bedeutend gewesen, in den höheren jedoch beinahe unmerkbar.

---

[1]) Dies läßt sich z. B. für die vierten Glieder wie folgt nachweisen:

$$\chi^3 = \chi\,\chi^2 = \chi\,(1-\chi) = \chi - \chi^2 = 2\chi - 1.$$

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY WOODS HOLE LIBRARY MASS.

Kapitel IV. Systeme tangierender Kreise mit Kontakten aus den Nebenreihen auf einer Kreiszylinderfläche.

§ 1. Nebenreihen. An erster Stelle wollen wir die Kontaktfälle betrachten, deren Kontakte dargestellt werden durch zwei oder drei aufeinander folgende Glieder der Reihe:

$$1,\ z,\ 1+z,\ 1+2z,\ 2+3z,\ 3+5z,\ \text{usw.}$$

worin z eine ganze Zahl darstellt, die größer als 2 ist, also 3, 4, 5, 6 usw.

Wir werden diese Reihe bezeichnen als die Nebenreihe 1, z und weiterhin sprechen von „Kontakten aus einer Nebenreihe", wie wir es von „Kontakten aus der Hauptreihe" taten.

Für den Fall $z = 3$ wollen wir die Nebenreihe 1, z auch wohl die „erste Nebenreihe" nennen, wegen der größeren Bedeutung, die diese Reihe für die Lehre der Blattstellung besitzt.

Nachdem die Reihe 1, z besprochen ist, soll dann die noch allgemeinere zur Sprache kommen, die dargestellt werden kann durch:

$$p,\ q,\ p+q,\ p+2q,\ 2p+3q,\ 3p+5q,\ \text{usw.}$$

und die wir bezeichnen werden als die Nebenreihe p, q.

Es muß noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß bei dieser Schreibweise angenommen wird, daß p die kleinste Zahl der Reihe darstellt, auch wenn man die Reihe nach links verfolgt. Es wird deutlich sein, daß dies der Fall ist, sobald $q > 2p$ ist.

In der Reihe 1, z sowohl wie in der Reihe p, q wird mit Ausnahme der beiden ersten Glieder jedes folgende Glied kleiner sein als das Doppelte des vorhergehenden. Bei den Kontakten aus Nebenreihen gelten also alle Eigenschaften, die wir in § 3 und § 7 Kap. II abgeleitet haben für den Fall, daß $n < 2m$ ist.

§ 2. Berechnung von Δ_m und Δ_n, wenn m und n aufeinander folgende Glieder der Reihe 1, z sind. Schreiben wir die Nebenreihe 1, z und die Hauptreihe in folgender Weise untereinander:

$$\begin{array}{llllllll} 1, & z, & 1+z, & 1+2z, & 2+3z, & 3+5z, & \ldots. & m, \quad n, \quad \ldots. \\ 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & \ldots. & m_1, \quad n_1, \quad \ldots. \end{array}$$

(also unter Fortlassung des ersten Gliedes aus der Hauptreihe), dann nennen wir die Glieder, welche in beiden Reihen untereinander zu stehen kommen: „korrespondierende". Es wird nun deutlich sein, daß wir die Glieder der Nebenreihe ausdrücken können durch die korrespondierenden der Hauptreihe und durch das Glied z. So finden wir allgemein:

$$\begin{aligned} m &= (2m_1 - n_1) + (n_1 - m_1)z \\ n &= (n_1 - m_1) + m_1 z \end{aligned}$$

Wir werden dann nachweisen, daß die Ausdrücke Δ_m und Δ_n gegeben werden durch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_m &= n_1 - m_1 \\ \Delta_n &= m_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Dazu müssen wir beweisen, daß diese Werte der Gleichung (2) genügen:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = \pm 1$$

daß sie außerdem die kleinsten Werte sind, bei denen das der Fall ist.

Setzen wir die gefundenen Werte von m und n und diejenigen von Δ_m und Δ_n aus den Formeln (18) in die Gleichung ein, so muß bewiesen werden:

$$\{(2m_1 - n_1) + (n_1 - m_1)z\}\, m_1 - \{(n_1 - m_1) + m_1 z\}(n_1 - m_1) = \pm 1$$

oder ausgerechnet:

$$m_1^2 + m_1 n_1 - n_1^2 = \pm 1$$

Da nun m_1 und n_1 aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe sind, so besteht hier nach Formel (13) S. 35 eine Identität, sodaß die Werte (18) in der Tat der Gleichung (2) genügen.

Um nun nachzuweisen, daß es auch die kleinsten sind, bei denen das der Fall ist, bedenke man, daß alle Lösungen der Gleichung (2) wiedergegeben werden müssen durch:

$$\Delta_m = (n_1 - m_1) + h\,m \text{ und } \Delta_n = m_1 + h\,n$$

worin $h = \pm(0, 1, 2, 3, 4, 5, \text{usw.})$.

Es lassen sich diese Werte auch folgendermaßen schreiben:

$$\Delta_m = (n_1 - m_1) + h\{(2m_1 - n_1) + (n_1 - m_1)z\}$$
$$\Delta_n = m_1 + h\{(n_1 - m_1) + m_1 z\}$$

und es wird deutlich sein, daß sobald hierin $z \geqq 2$ ist, für jeden Wert von h, der größer als o ist, auch ein absolut größerer Wert der Ausdrücke Δ_m und Δ_n als $(n_1 - m_1)$ und m_1 erhalten wird. Daraus folgt nun, daß die Werte (18) wirklich die kleinsten sind und mithin die gesuchten.

Die Berechnung von Δ_m und Δ_n ist also sehr einfach und das Ergebnis einer solchen läßt sich in dieser Form schreiben:

$$\begin{array}{lll} \text{Ist:} & \dfrac{m}{n} \equiv \dfrac{1}{z}, \dfrac{z}{1+z}, \dfrac{1+z}{1+2z}, \dfrac{1+2z}{2+3z}, \dfrac{2+3z}{3+5z}, & \text{usw.} \\ \text{dann ist:} & \dfrac{\Delta_m}{\Delta_n} \equiv \dfrac{0}{1}, \dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{5}, & \text{usw.} \end{array} \qquad (19)$$

Daraus sieht man, daß Δ_m und Δ_n die Koeffizienten von z sind, die in den Ausdrücken von m und n vorkommen.

Nimmt man $z = 2$, so geht die Nebenreihe $1, z$ über in die Hauptreihe, und wie man sieht, ist dann auch das Ergebnis, das man nach (19) erhält, identisch mit dem, welches aus (11) S. 33 gefunden wurde[1]).

§ 3. Die Beziehung zwischen b und α für zweizählige Kontakte aus der Nebenreihe $1, z$. Setzen wir die Werte (18) in die Formeln (4) ein, so finden wir für den Fall, daß die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom läuft:

$$\frac{m\,n\,\alpha}{180^0} = (n^2 - m^2)\,b^2 + 1 + 2n(n_1 - m_1) \quad . \quad . \quad . \quad (20\text{a})$$

und für den Fall, daß sie antidrom der Hauptspirale ist:

$$\frac{m\,n\,\alpha}{180^0} = -(n^2 - m^2)\,b^2 + 1 + 2m\,m_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\text{b})$$

1) Man darf nicht $z = 1$ setzen, denn dann ist die Richtigkeit der oben gegebenen Ableitung, wobei vorausgesetzt wurde, daß $z \geqq 2$ ist, hinfällig.

Es erhebt sich nun die Frage, welche von diesen Formeln muß in einem bestimmten Falle angewendet werden.

Es ist klar, daß für den Kontakt 1 und z die Frage sofort zu beantworten ist, denn die m-zeilige Spirale ist hier ja die Hauptspirale selbst; also gilt für diesen Kontakt die Formel (20a).

Bei dem Kontakt 1, z, $(1+z)$ muß nun die z-zeilige Spirale nach § 3 Kap. II sicher der 1-zeiligen Spirale antidrom laufen, und dies muß dann auch nach § 7 desselben Kapitels für alle Kontaktzustände $(1+z)$ und $(1+2z)$ gelten. So findet man folgende Regeln:

Formel 20a gilt für die Kontakte:

1 und z, $(1+z)$ und $(1+2z)$, $(2+3z)$ und $(3+5z)$ ....

Formel 20b gilt für die Kontakte:

z und $(1+z)$, $(1+2z)$ und $(2+3z)$, $(3+5z)$ und $(5+8z)$ ....

Hiermit ist jede Schwierigkeit für die Anwendung dieser Formeln gehoben.

Wählen wir als Beispiel die erste Nebenreihe, wobei $z=3$ ist, so geht für den Kontakt 1 und 3 die Formel (20a) über in:

$$\alpha = (1+8\,b^2)\,60^0,$$

Tabelle III.

Zweizählige Kontakte aus den Nebenreihen bei regelmäßigen Kreissystemen auf der Kreiszylinderfläche.

Kontakte:	Die Beziehung zwischen α und b:	Werte von α und b für rechtwinklige Kontakte:
1 und 3	$\alpha = (1+8\,b^2)\,60^0$	$\alpha = \frac{3}{10}\cdot 360^0 = 108^0$ $b = 0{,}31623$
3 und 4	$\alpha = (1-b^2)\,105^0$	$\alpha = \frac{7}{25}\cdot 360^0 = 100^0\,48'$ $b = 0{,}2$
4 und 7	$7\,\alpha = (15+33\,b^2)\,45^0$	$\alpha = \frac{18}{65}\cdot 360^0 = 99^0\,42'$ $b = 0{,}12404$
7 und 11	$77\,\alpha = (43-72\,b^2)\,180^0$	$\alpha = \frac{47}{170}\cdot 360^0 = 99^0\,32'$ $b = 0{,}076696$
1 und 4	$\alpha = (1+15\,b^2)\,45^0$	$\alpha = \frac{4}{17}\cdot 360^0 = 84^0\,42'$ $b = 0{,}24254$
4 und 5	$\alpha = (9-9\,b^2)\,9^0$	$\alpha = \frac{9}{41}\cdot 360^0 = 79^0\,1'$ $b = 0{,}15617$
2 und 5	$\alpha = (9-21\,b^2)\,18^0$	$\alpha = \frac{12}{29}\cdot 360^0 = 148^0\,58'$ $b = 0{,}18570$

für den Kontakt 3 und 4 geht (20b) über in:

$$\alpha = (1 - b^2)\, 105^0$$

Die Anwendung auf andere Reihen als diejenige 1, 3 wird auch keine Schwierigkeit bereiten.

In Tabelle III (S. 52) findet man die Beziehungen zwischen α und b für einige andere Werte aus diesen Reihen angegeben.

§ 4. Eigentümlichkeit des Kontaktes 1 und z. Wir sahen bereits hier oben, daß die zwei ersten Glieder der Reihe 1, z insofern von den folgenden abweichen, als für diese das zweite Glied größer ist als das Doppelte des ersten. Für den Kontakt 1 und z gelten also die Eigenschaften, die wir in Kap. II § 3 und § 7 für den Fall $n > 2m$ abgeleitet haben.

Bei den Kontaktfällen mit diesem Kontakt werden also sowohl solche vorkommen, bei denen die 1- und die z-zeilige Spirale einander antidrom sind, als auch solche, bei denen sie einander homodrom verlaufen. Auch muß dabei ein Fall angetroffen werden, bei dem die z-zeilige Spirale vertikal verläuft und die Divergenz dargestellt wird durch $\frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0$, also hier durch $\frac{m_1}{n} \cdot 360^0 = \frac{1}{z} \cdot 360^0$. Bei dem Kontakt 1 und 3 ist also ein Fall nachzuweisen mit vertikal verlaufender dreizeiliger Kontaktspirale und einer Divergenz gleich $\frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$. Der dazugehörende Wert von b wird aus der oben gegebenen Beziehung zwischen b und α gefunden und beträgt $b = \frac{1}{4}\sqrt{2} = 0{,}35355$.

Ebenso kommt bei dem Kontakte 1 und 4 ein Fall vor mit einer Divergenz $\frac{1}{4} \cdot 360^0 = 90^0$ und hierfür wird $b = \frac{1}{15}\sqrt{15} = 0{,}258$. Diesen Beispielen kann man leicht andere hinzufügen.

§ 5. Dreizählige Kontakte aus der Nebenreihe 1, z. Bei dem dreizähligen Kontakt aus der Nebenreihe 1, z können wir uns kurz fassen, die Berechnung von α und b könnte aus den Formeln (5) oder (6) erfolgen, geschieht aber einfacher durch Anwendung zweier aufeinander folgender Gleichungen, die für zweizählige Kontakte gelten.

Das Ergebnis der Berechnung findet man für einzelne dieser Kontakte in Tabelle IV.

Tabelle IV.

Dreizählige Kontakte aus den Nebenreihen bei regelmäßigen Kreissystemen auf der Kreiszylinderfläche.

Kontakte:	Divergenz (α):	Relative Kreisdurchmesser (b):
1, 3 und 4	96° 55′	0,2773
3, 4 „ 7	102° 10′	0,1644
4, 7 „ 11	98° 43′	0,1037
1, 4 „ 5	77° 8′,5	0,2182
4, 5 „ 9	79° 40′	0,1280
2, 5 „ 7	152° 18′,5	0,16013

Von Interesse ist eine nähere Betrachtung des dreizähligen Kontaktes $(z-1)$, 1, z, welcher den Kontakt 1 und z an einer Seite begrenzt. Es läßt sich dieser Kontakt auch schreiben: 1, $(z-1)$, z; er ist also auch ein dreizähliger Kontakt der Reihe 1, $(z-1)$. In diesem Punkt, den man als Anfangspunkt der Nebenreihe 1, z betrachten kann, schließt sich also diese Reihe an die Nebenreihe 1, $(z-1)$ an.

So wird z. B. der Kontakt 1 und 3 begrenzt durch den Kontakt 2, 1 und 3 oder 1, 2 und 3 und diesen haben wir als dreizähligen Kontakt der „Hauptreihe" kennen gelernt. Dieser Punkt kann also als Ausgangspunkt der Nebenreihe 1, 3 aufgefaßt werden.

§ 6. Die graphische Darstellung der Beziehung zwischen b und α für Kontakte aus der Nebenreihe 1, z. Die Betrachtung, mit welcher der vorhergehende Paragraph endete, wird deutlicher werden, wenn wir die graphische Darstellung der Beziehungen 20 a und 20 b suchen.

In derselben graphischen Darstellung, die wir zum Teil bereits besprochen haben und die als Figur II auf Tafel II wiedergegeben ist, findet man links neben der Serie Parabeln, die sich auf die Hauptreihe bezieht, eine Serie, die für Kontakte aus der Nebenreihe 1, 3 gilt und daneben eine für solche aus der Nebenreihe 1, 4 und endlich noch eine für solche aus der Nebenreihe 1, 5. Man sieht aus der Figur, wie die Parabel, die für den Kontakt 1 und 3 gilt, bei dem Kontakte 1, 2 und 3 ihren Anfang nimmt. Man findet ferner den Fall mit der Divergenz $\frac{1}{3} \cdot 360^0$ auf dieser Kurve mit einem kleinen Kreuz angegeben. Alle Punkte zwischen diesem und zwischen dem Kontakt 1, 2 und 3 entsprechen, wie sich aus dem Vorhergehenden ergibt, Kontaktfällen, in denen die 1- und die 3-zeilige Spirale homodrom sind; alle Punkte zwischen $^1/_3$ und dem Kontakt 1, 3 und 4 solchen, bei denen die zwei Spiralen antidrom sind. Eine solche Betrachtung läßt sich auch auf die Kontakte 1 und 4, 1 und 5 usw. anwenden.

Hiermit ist ein wichtiger Unterschied zwischen den Kontakten aus den Nebenreihen und solchen aus der Hauptreihe angegeben, denn bei diesen waren die m- und die n-zeiligen Spiralen niemals homodrom.

§ 7. Rechtwinklige Kontakte aus der Nebenreihe 1, z. Der Wert b für diese Kontakte wird wieder gefunden aus der Beziehung (9), d. h.:

$$b^2 = \frac{1}{m^2 + n^2}$$

der von α aus:

$$m\,\alpha = \left(\frac{n}{m^2 + n^2} + n_1 - m_1\right) 360^0,$$

wenn die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom ist, und aus:

$$n\,\alpha = \left(\frac{m}{m^2 + n^2} + m_1\right) 360^0,$$

wenn sie dieser antidrom läuft.

Das Ergebnis der Berechnung läßt sich nicht in so einfacher Form niederschreiben, wie das bei den rechtwinkligen Kontakten der Hauptreihe der Fall war.

Man findet das Resultat einzelner Ausrechnungen in Tabelle III (S. 52), auch sind die betreffenden Punkte in der graphischen Darstellung angegeben.

§ 8. Anfertigung und Beschreibung der geometrischen Konstruktionen. Die Art, auf welche die Kreiskonstruktionen ausgeführt werden, wenn einmal die Werte von b und α bekannt sind, bedarf nach dem, was wir darüber bei der Besprechung der Hauptreihe gesagt haben, keiner näheren Erläuterung. Auf Tafel I findet man in Figur 12 bis 16 dergleichen Konstruktionen für Nebenreihen 1, 2 angefertigt. Fig. 12 stellt den Kontaktfall 1 und 3 mit der Divergenz $^1/_3 \cdot 360^0 = 120^0$ dar, wobei also die dreizeiligen Spiralen vertikal verlaufen. Fig. 13 gibt den Fall wieder mit dem rechtwinkligen Kontakte 1 und 3, wobei $\alpha = {}^3/_{10} \cdot 360^0$, Fig. 14 ist der dreizählige Kontakt 1, 3 und 4, Fig. 15 der rechtwinklige Kontakt 3 und 4, während endlich Fig. 16 denjenigen Kontaktfall 1 und 4 darstellt, wobei $\alpha = {}^1/_4 \cdot 360^0 = 90^0$ ist.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß wir für diese Konstruktionen wieder eine Zylinderfläche mit dem Umfang 5 cm wählten, und daß also die Durchmesser der Kreise in den einzelnen Konstruktionen ein direktes Maß für den Faktor b sind. Vor allem ist eine Vergleichung mit den Größenverhältnissen der Kreise bei den Konstruktionen für die Hauptreihe sehr lehrreich, später kommen wir hierauf näher zurück.

§ 9. Die Berechnung von Δ_m und Δ_n, wenn m und n aufeinander folgende Glieder der Nebenreihe p, q sind. Wir schreiben die Nebenreihe p, q und die Hauptreihe folgendermaßen untereinander:

$$\begin{array}{llllllll} p, & q, & p+q, & p+2q, & 2p+3q, & 3p+5q, & \ldots & m, \; n, \; \ldots. \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & \ldots & m_1, n_1, \; \ldots. \end{array}$$

und nennen die untereinander stehenden Glieder „korrespondierende". Wir können dann m und n ausdrücken durch m_1, n_1, p und q und erhalten:

$$\begin{aligned} m &= (2m_1 - n_1)p + (n_1 - m_1)q \\ n &= (n_1 - m_1)p + m_1 q \end{aligned}$$

Denken wir uns nun den Bruch $\frac{p}{q}$ als Kettenbruch geschrieben, und nennen wir den Zähler und Nenner des letzten Näherungsbruches μ und ν, dann werden wir nachweisen, daß:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_m &= (2m_1 - n_1)\mu + (n_1 - m_1)\nu \\ \Delta_n &= (n_1 - m_1)\mu + m_1 \nu \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

ist. Dazu werden wir beweisen, daß diese Werte der Gleichung (2): $m\Delta_n - n\Delta_m = \pm 1$ entsprechen, und daß sie außerdem die kleinsten Werte sind, mit denen das der Fall ist.

Setzt man die Werte (21) in die Gleichung (2) ein, so muß also bewiesen werden:

$$\{(2m_1 - n_1)\mu + (n_1 - m_1)\nu\}\{(n_1 - m_1)p + m_1 q\} - \{(n_1 - m_1)\mu + m_1 \nu\}\{(2m_1 - n_1)p + (n_1 - m_1)q\} \equiv \pm 1$$

oder ausgerechnet:

$$(m_1^2 + m_1 n_1 - n_1^2)\{\mu q - \nu p\} \equiv \pm 1$$

Nun ist der erste Faktor dieses Produktes nach Formel (13) sicher gleich ± 1, aber auch der zweite Faktor ist dem gleich, weil μ und ν Zähler und Nenner des letzten Näherungsbruches des Quotienten $\frac{p}{q}$ sind. Die Beziehung stellt also in der Tat eine Identität vor.

Um ferner nachzuweisen, daß die Werte (21) auch die kleinsten sind, die der Gleichung (2) genügen, bedenke man, daß alle Lösungen dieser Gleichung enthalten sein müssen in den Ausdrücken:

$$\Delta_m = (2\,m_1 - n_1)\,\mu + (n_1 - m_1)\,\nu + h\,m$$

und

$$\Delta_n = (n_1 - m_1)\,\mu + m_1\,\nu + h\,n,$$

wenn

$$h = \pm(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \text{ usw.})$$

ist, oder, wenn man die Werte für m und n einsetzt, in diesen:

$$\Delta_m = (2\,m_1 - n_1)\,\mu + (n_1 - m_1)\,\nu + h\{(2\,m_1 - n_1)\,p + (n_1 - m_1)\,q\}$$

$$\Delta_n = (n_1 - m_1)\,\mu + m_1\,\nu + h\{(n_1 - m_1)\,p + m_1\,q\}$$

Es ist klar, daß, wenn $p \geqq 2$ und $q \geqq 2$ ist, keine kleineren Werte für Δ_m und Δ_n (absolut genommen) bestehen als diejenigen, welche man erhält, wenn man $h = 0$ setzt; daraus folgt also, daß die Werte (21) wirklich die gesuchten sind.

Nun wird die Berechnung von Δ_m und Δ_n in der Regel viel einfacher geschehen durch direkte Anwendung des Lehrsatzes, daß diese Größen Zähler und Nenner des letzten Näherungsbruches des Quotienten $\frac{m}{n}$ sind; die gefundenen Ausdrücke für Δ_m und Δ_n werden sich aber für die weitere Ableitung als so wichtig herausstellen, daß sie hier doch einen Platz finden mußten.

§ 10. Konstruktionen und graphische Darstellung in der Nebenreihe p, q. Die Beziehung zwischen α und b wird für diese Nebenreihe in der Regel am besten gefunden durch Anwendung der Formeln (4 a) und (4 b). Welche von diesen beiden man nun gebrauchen muß, läßt sich nicht im allgemeinen angeben, ist aber in der Regel sehr schnell herauszufinden.

Nehmen wir als Beispiel die Kontakte der Nebenreihe 2, 5. Der Kontakt 2 und 5 wird an der einen Seite begrenzt durch den dreizähligen Kontakt 3, 2 und 5 oder 2, 3 und 5, d. i. also durch einen Kontakt aus der „Hauptreihe“ von dem bekannt ist, daß die zweizeilige Spirale der Hauptspirale antidrom läuft; also gilt dies auch für alle Kontaktfälle 2 und 5. Damit ist gezeigt, daß Formel 4 b für diesen Kontakt angewendet werden muß; diese ergibt bei der Ausrechnung:

$$\alpha = (9 - 21\,b^2)\,18^0$$

In dem Kontakt 2, 5 und 7 läuft die 5-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom, dies gilt auch für alle Kontaktfälle 5 und 7, sodaß dafür Formel (4 a) gebraucht werden muß, welche ergibt:

$$7\,\alpha = (24\,b^2 + 29)\,36^0$$

Für den Kontakt 7 und 12 hat wieder Formel 4 b Geltung und in dieser Weise kann man weiter schließen.

Wie wir es uns eben für die Kontakte aus der Nebenreihe 2, 5 veranschaulichten, kann man auch Kontakte aus anderen Nebenreihen p, q auf bekannte Fälle zurückführen.

Außerdem werden die allgemeinen Regeln, die wir späterhin über den Lauf der Kurven in der graphischen Darstellung aufstellen werden, in vielen Fällen die Wahl zwischen den Formeln (4 a) und (4 b) noch vereinfachen.

Mehrere Parabeln, die sich auf Kontakte aus den Nebenreihen p, q beziehen, findet man in der graphischen Darstellung II Tafel II angegeben. Es wird dem Leser nicht schwer fallen, sich vorzustellen, in welcher Weise diese Darstellung auch für andere Kontaktfälle fortgesetzt werden könnte.

Es ist noch von Interesse darauf hinzuweisen, daß der Kontakt p und q wieder von den höheren Kontakten aus der Reihe p, q abweicht, weil $q > 2p$ ist und also die Eigenschaften gelten, die wir für Kontakte, bei denen $n > 2m$ ist, abgeleitet haben. Bei diesem Kontakte p und q kommen also Fälle vor, bei denen die p- und die q-zeilige Spirale homodrom und solche, in denen sie antidrom laufen. Außerdem kommt noch ein Fall vor, bei welchem die q-zeilige Spirale vertikal läuft und wobei die Divergenz gleich $\frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0$ ist. Berechnet man diesen letzten Fall für den Kontakt 2 und 5, so findet man die Divergenz $\frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$, während $b = \frac{1}{21}\sqrt{21} = 0{,}218$ ist. Dieser Fall ist als einziger Vertreter der Reihen p, q in Fig. 17 Tafel I abgebildet.

§ 11. Berechnung der Limitdivergenz für die Nebenreihe 1, z. Die Werte von α für einen Kontakt m und n liegen nach § 9 Kap. I für den Fall, daß die m- und die n-zeilige Spirale einander antidrom sind, zwischen $\frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0$ und $\frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0$. Diese Grenzen gelten mit Ausnahme des Kontaktes 1 und z für alle Kontakte aus der Nebenreihe 1, z. Setzen wir nun in diese Näherungswerte die Ausdrücke für Δ_m und Δ_n und die für m und n ein, welche wir in § 2 dieses Kapitels gefunden haben, so liegen die Werte von α zwischen:

$$\frac{n_1 - m_1}{(2m_1 - n_1) + (n_1 - m_1)z} \cdot 360^0 \text{ und } \frac{m_1}{(n_1 - m_1) + m_1 z} \cdot 360^0$$

Nun sind die Brüche, welche in den Ausdrücken vor 360^0 stehen, zwei aufeinander folgende Näherungsbrüche des Kettenbruches:

$$\cfrac{1}{z + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

oder auf andere Weise geschrieben:

$$\{z, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$$

Es läßt sich dies in folgender Weise verständlich machen.

Bricht man diesen Kettenbruch irgendwo ab, so erhält man stets bei der Ausrechnung von allem, was auf den Teilnenner z folgt, einen Annäherungsbruch des unendlichen Kettenbruches:

$$\{1, 1, 1, 1, \ldots.\}$$

Man kann diesen letzten Kettenbruch immer so abbrechen, daß als Näherungsbruch gefunden wird: $\frac{2m_1 - n_1}{n_1 - m_1}$. Der erstgenannte Kettenbruch geht jedoch, wenn er in gleicher Weise abgebrochen wird, über in:

$$\frac{1}{z + \frac{2m_1 - n_1}{n_1 - m_1}} = \frac{n_1 - m_1}{(2m_1 - n_1) + (n_1 - m_1)z}$$

d. h. in den ersten der obengenannten Annäherungswerte.

Hätte man den Kettenbruch in einem folgenden Teilnenner abgebrochen, so würde als Näherungswert dieses Bruches entstanden sein:

$$\frac{1}{z + \frac{n_1 - m_1}{m_1}} = \frac{m_1}{(n_1 - m_1) + m_1 z}$$

d. h. der zweite der oben angegebenen Annäherungswerte.

Es ist also klar, daß die Limitdivergenz, welche man erhält durch die Betrachtung immer höherer Werte aus der Nebenreihe $1, z$, dargestellt wird durch:

$$\text{Limite } \{z, 1, 1, 1, 1, \ldots.\}\ 360^0$$

Der Wert dieser Limite ist sehr leicht anzugeben, denn wir fanden in § 11 Kap. III als Limite für den Kettenbruch $\{1, 1, 1, 1, \ldots.\}$ die „göttliche Proportion“ χ, sodaß:

$$\text{Lim} \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots.}}}} \cdot 360^0 = \frac{1}{z + \chi} \cdot 360^0 \qquad (22)$$

wird.

Für $z = 3$ findet man also:

$$\text{Limitdivergenz} = \frac{1}{3 + \chi} \cdot 360^0 = 99^0\,30'\,6'',$$

für $z = 4$:

$$\text{Limitdivergenz} = \frac{1}{4 + \chi} \cdot 360^0 = 77^0\,57'\,19'',$$

für $z = 5$:

$$\text{Limitdivergenz} = \frac{1}{5 + \chi} \cdot 360^0 = 64^0\,4'\,45'',$$

usw.

Die hier berechneten Limitdivergenzen sind in der mehrfach besprochenen graphischen Darstellung durch dickere Ordinaten angegeben. Jede dieser Ordinaten schneidet, wie sich aus dem Vor-

hergehenden ergibt, alle Parabeln, die Bezug haben auf Kontakte aus solchen Reihen, für welche die betrachtete Ordinate die Limitdivergenz angibt. Die dreizähligen Kontakte aus ein und derselben Reihe liegen abwechselnd an verschiedenen Seiten der Limitordinaten und nähern sich um so mehr dieser Linie, je höhere Kontakte betrachtet werden.

§ 12. Berechnung der Limitdivergenz für Kontakte aus der Nebenreihe p, q. Auch für die Kontakte aus der Nebenreihe p, q (allein mit Ausnahme des niedrigsten Kontaktes p und q) liegen alle Werte von α zwischen den Näherungswerten $\frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0$ und $\frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0$ oder, wenn wir die Werte für Δ_m, Δ_n, m und n einsetzen, die wir in § 9 gefunden haben, zwischen den Näherungswerten:

$$\frac{(2m_1 - n_1)\mu + (n_1 - m_1)\nu}{(2m_1 - n_1)p + (n_1 - m_1)q} \cdot 360^0 \text{ und } \frac{(n_1 - m_1)\mu + m_1\nu}{(n_1 - m_1)p + m_1 q} \cdot 360^0$$

Nun sind hierin die Koeffizienten von 360^0 aufzufassen als Größen, die man bekommt, wenn man in dem Ausdruck:

$$\frac{\nu + \mu \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots.}}}}}}{q + p \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots.}}}}}} \tag{23}$$

die beiden darin vorkommenden Kettenbrüche bei zwei aufeinander folgenden Teilnenner abbricht, aber so, daß das Abbrechen in beiden Kettenbrüchen bei einem Teilnenner gleicher Ordnung geschieht.

Man erhält nämlich beim Abbrechen dieser Kettenbrüche stets einen Näherungsbruch des Kettenbruches: $\{1, 1, 1, 1, \ldots.\}$ und man kann also auch in der Weise abbrechen, daß man als Näherungsbruch dafür findet: $\frac{2m_1 - n_1}{n_1 - m_1}$. Bricht man darauf bei beiden Kettenbrüchen einen Teilnenner weiter ab, so erhält man als Näherungsbruch $\frac{n_1 - m_1}{m_1}$. Berechnet man nun mit diesen beiden Werten den Ausdruck (23), so findet man die oben angegebenen Näherungswerte für die Divergenz.

Der Limitwert der Divergenz in der Nebenreihe p, q wird also dargestellt durch:

$$\text{Limitdivergenz} = \frac{\chi\mu + \nu}{\chi p + q} \cdot 360^0 \tag{24}$$

Nehmen wir als Beispiel die Nebenreihe 2, 5, so wird dafür $\mu = 1$, $\nu = 2$ und folglich

$$\text{die Limitdivergenz} = \frac{\chi+2}{2\chi+5} \cdot 360^0 = 151^0\,8'\,8''.$$

Für die Nebenreihe 2, 7 wird $\mu = 1$, $\nu = 3$ und

$$\text{die Limitdivergenz} = \frac{\chi+3}{2\chi+7} \cdot 360^0 = 158^0\,8'.$$

Für die Nebenreihe 3, 8 wird $\mu = 1$, $\nu = 3$ also:

$$\text{die Limitdivergenz} = \frac{\chi+3}{3\chi+8} \cdot 360^0 = 132^0\,10'.$$

Diese Beispiele lassen sich leicht weiter fortsetzen.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß die Formel (24) auch die Ausdrücke umfaßt, die wir im vorigen Paragraphen für die Limitdivergenz der Nebenreihe $1, z$ und in Kap. III für die der Hauptreihe abgeleitet haben; setzt man nämlich in der Nebenreihe p, q die Werte $p = 1$ und $q = z$, so geht diese über in die Nebenreihe $1, z$ und da nun hierfür $\mu = 0$, $\nu = 1$ wird, geht die Beziehung (24) über in

$$\text{Limitdivergenz} = \frac{1}{z+\chi} \cdot 360^0$$

Setzt man in der Nebenreihe p, q den Wert $p = 1$ und $q = 2$, so geht diese Reihe über in die Hauptreihe, und da ferner $\mu = 0$, $\nu = 1$ wird, ergibt die Beziehung (24) hier:

$$\text{Limitdivergenz} = \frac{1}{2+\chi} \cdot 360^0 = (1-\chi) \cdot 360^0.$$

Kap. V. Fortsetzung der allgemeinen Betrachtungen über regelmäßige Kreissysteme auf einer Kreiszylinderfläche.

§ 1. Die Beziehung zwischen b und α in ihrer Gesamtheit. Nachdem wir in den vorigen Kapiteln die Beziehung zwischen b und α für bestimmte Werte von m und n besprochen haben, kehren wir nun zur Betrachtung der allgemeinen Beziehung zurück. Die Lösung der Frage, wie diese zu bestimmen sei, liegt in dem Vorhergehenden bereits eingeschlossen. Wenn man nämlich einen ganz willkürlichen Kontakt m und n betrachtet, sind nur zwei Fälle möglich: $n > 2m$ oder $n < 2m$. Im ersten Falle können m und n immer betrachtet werden als Anfangsglieder der Nebenreihe p, q, im zweiten jedoch lassen sich wieder zwei Möglichkeiten unterscheiden und zwar: $m > 2(n-m)$ und $m < 2(n-m)$. Ist das erste richtig, dann können $(n-m)$ und m als die ersten Glieder einer Nebenreihe p, q aufgefaßt werden; gilt das zweite, dann lassen sich wieder zwei Fälle denken: $(n-m) > 2(2m-n)$ oder $(n-m) < 2(2m-n)$ usw. Wenn man so fortfährt, sieht man ein, daß, sobald $n < 2m$ ist, die Zahlen m und n immer angesehen werden können als zwei aufeinander folgende Glieder einer Nebenreihe p, q.

Damit ist also nachgewiesen, daß die Bestimmung der allgemeinen Beziehung zwischen b und α in den vorigen Kapiteln in der Tat bereits geschehen ist, und man braucht nur die graphische Darstellung II auf Tafel II vollkommen auszuarbeiten, um darin diese Beziehung ganz und gar zum Ausdruck zu bringen. Theoretisch müssen darin natürlich alle Reihen p, q schließlich in der Abszissenachse endigen.

Alle Punkte der Kurven dieser Gesamtdarstellung entsprechen also den Werten von b und α, mit denen die Kreiskonstruktionen auszuführen sind. Mit dieser Darstellung ist also auch die Frage gelöst, die wir in Kap. II § 1 gestellt haben: anzugeben, um welche „regelmäßigen Punktsysteme auf der abgerollten Zylinderfläche" die gewünschten Kreiskonstruktionen möglich sind.

§ 2. Die Lage der Parabeln in der Nähe eines dreizähligen Kontaktes. Obwohl sich die Lage der Kurven, die die Beziehung zwischen b und α ausdrücken, aus der graphischen Darstellung in der Hauptsache ablesen läßt, mögen doch die damit verknüpften wichtigen Eigentümlichkeiten noch näher hervorgehoben und die allgemeine Gültigkeit auch für die Teile, welche nicht in unserer Figur vorkommen, nachgewiesen werden.

Daß in dieser graphischen Darstellung in jedem Punkt, der einem dreizähligen Kontakt m, n und $(m+n)$ entspricht, drei Parabeln zusammentreffen und zwar die, welche auf die Kontakte m und n, m und $(m+n)$ und n und $(m+n)$ Bezug haben, wurde bereits in Kap. II § 6 besprochen, hier mögen nur noch einige Bemerkungen über die „Lage" dieser drei Parabeln Platz finden.

Läuft die m-zeilige Spirale bei dem Kontakte m und n der Hauptspirale homodrom, so wird die Beziehung zwischen b und α für diesen Kontakt ausgedrückt durch die Formel (4 a), und diese stellt eine Parabel dar mit nach rechts laufenden Ästen. Aber auch für den Kontakt m und $(m+n)$ muß dann nach § 7 Kap. II diese Formel 4 a angewendet werden; dagegen wird für den Kontakt n und $(m+n)$ die Beziehung (4 b) Gültigkeit haben, und diese stellt eine Parabel dar mit nach links laufenden Ästen.

Ist dagegen die m-zeilige Spirale des Kontaktes m und n der Hauptspirale antidrom, so gilt dafür die Formel (4 b), und dann wird diese auch anzuwenden sein auf den Kontakt m und $(m+n)$, während für den Kontakt n und $(m+n)$ die Formel 4 a gebraucht werden muß.

Von den vier dreizähligen Kontakten: $(n-m)$, m, n; m, n $(m+n)$; m, $(m+n)$, $(2m+n)$; n, $(m+n)$, $(m+2n)$, liegt der erste am höchsten, dann folgt der zweite, danach der dritte und endlich der vierte. Dies wird deutlich werden, wenn man bedenkt, daß der Wert von b^2 in allen diesen Fällen gefunden wird durch Anwendung der Formeln 5 a oder 6 a.

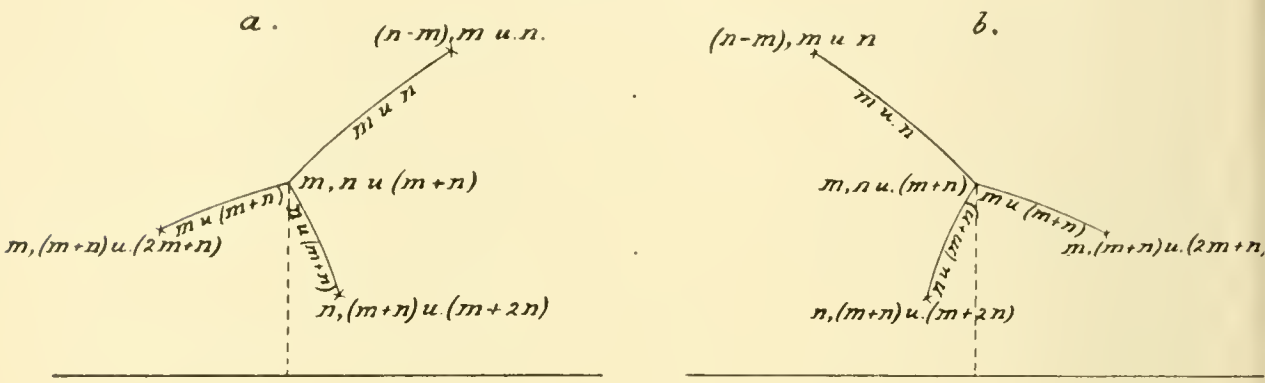
Daraus folgt dann, daß von dem Punkte aus, der den Kontakt m, n und $(m+n)$ darstellt, die Parabel für den Kontakt m und n aufwärts läuft, diejenige für den Kontakt m und $(m+n)$ und diejenige für n und $(m+n)$ beide abwärts laufen.

Aus den Gleichungen der Parabeln läßt sich nun überdies noch ableiten, daß in dem Punkte m, n und $(m+n)$ die Parabel für den Kontakt m und $(m+n)$ stets weniger steil ist als die beiden anderen Parabeln. (Die Steilheit wird gemessen durch den Winkel,

welchen die in diesem Punkt an die Parabel gezogene Tangente mit der Abszissenachse bildet.)

In der Textfigur 14 sind die beiden Fälle abgebildet, die sich in bezug auf die Lage der Parabeln ergeben können, welche in

Fig. 14.

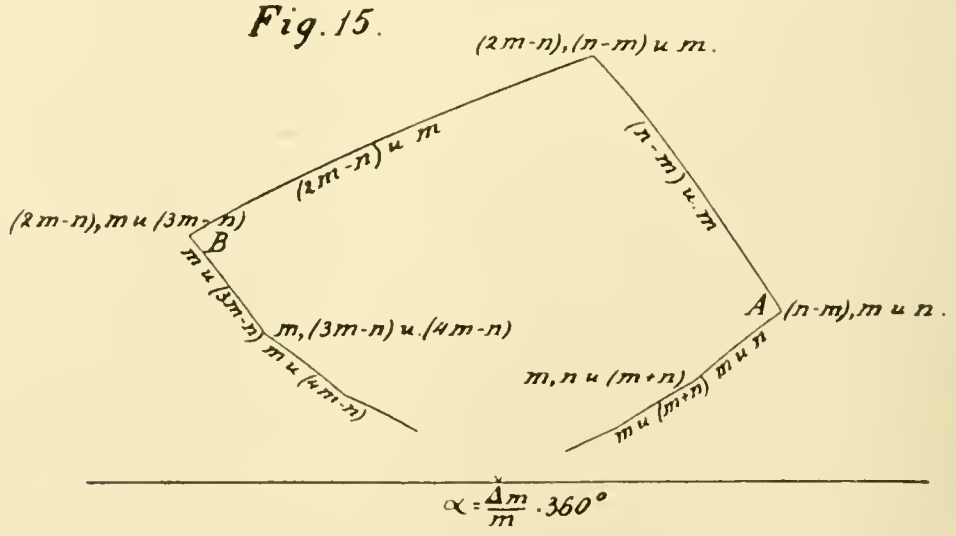


einem Punkte m, n und $(m+n)$ zusammenkommen. In unserer graphischen Darstellung wird man beide Fälle leicht auffinden.

§ 3. Die Einteilung der graphischen Darstellung in viereckige Figuren. Betrachtet man einen Kontakt m und n, in welchem die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom ist und deren Parabel beide Äste nach rechts kehrt, so schließt sich daran ein Kontakt m und $(m+n)$ an, der seinerseits wieder Anschluß findet an einen Kontakt m und $(2m+n)$; dieser schließt sich wieder an einen Kontakt m und $(3m+n)$ an usw. Man kann also ausgehen von dem dreizähligen Kontakte $(n-m)$, m und n und übergehen zu Kontakten, welche dargestellt werden durch m und $(\lambda m+n)$, wenn $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ usw. ist. Alle diese Kontakte entsprechen Parabeln, welche ihre beiden Äste nach rechts senden und die nach dem vorigen Paragraphen immer weniger steil laufen.

In der Textfigur 15 findet man von den Parabeln, welche dieser Serie Kontakte entsprechen, einige angegeben und man kann

Fig. 15.



sichtlich diese Reihe auffassen als eine diskontinuierliche Kurve, welche von dem Punkte $(n-m)$, m und n (A) ausgeht und schließlich die Abszissenachse erreicht.

Im Punkte $(m-n)$, m und n (A) findet man jedoch auch Anschluß an den Kontakt $(n-m)$ und m. Diesem entspricht eine Parabel mit nach links gerichteten Ästen. Er wird begrenzt durch den dreizähligen Kontakt $(2m-n)$, $(n-m)$ und m, und in diesem Punkt findet man wieder Anschluß an einen Kontakt $(2m-n)$ und m, der seinerseits begrenzt wird durch den dreizähligen Kontakt $(2m-n)$, m und $(3m-n)$ (B). Es wird wohl deutlich sein, daß sich in diesem Punkte wieder eine ganze Serie Kontakte anschließt, die dargestellt werden können durch m und $(\lambda' m-n)$, wenn $\lambda' = 3, 4, 6, 7, 8$ usw. ist. Die Äste aller dieser Parabeln sind nach links gerichtet. Auch jetzt werden wir wieder diese Serie betrachten als eine diskontinuierliche, von B ausgehende Kurve. Schließlich muß auch diese in der Abszissenachse ihr Ende finden.

Zuerst muß man nun darauf achten, daß wir die Kontakte in unserer Figur so wählten, daß in allen der Wert m vorkommt; weiterhin wird es deutlich sein, daß aus jedem Eckpunkte der Figur noch eine andere Parabel ausläuft als die, welche wir betrachteten, daß aber in den Kontakten, welche diesen Parabeln entsprechen, der Wert m nicht angetroffen werden kann. Behält man dies im Auge, so wird man sogleich in der graphischen Darstellung II Tafel II Beispiele angeben können für die hier gemeinte Parabelserie.

Wir werden nun nachweisen, daß die Reihe Parabeln, die von A ausgeht und den Kontakten m und $(\lambda m+n)$ entspricht, in demselben Punkte der Abszissenachse endigt wie die Reihe der Parabeln, die von B ausgeht und den Kontakten m und $(\lambda' m-n)$ entspricht.

Bei der erstgenannten Serie Parabeln läuft die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom, und gilt also Formel (4a). Für den Fall nun, daß $\lambda = \infty$ wird, muß man darin $n = \infty$ und $b = o$ setzen und findet dann daraus $\alpha = \frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0$ als Punkt, in welchem die Serie Parabeln in der Abszissenachse endigt.

Von der zweiten Serie Parabeln läuft die m-zeilige Spirale der Hauptspirale antidrom und darum ist also Formel (4b) anzuwenden, die jedoch durch Hinzuziehung der Formel (2) auch in dieser Form geschrieben werden kann: $\frac{m n \alpha}{180^0} = -(n^2 - m^2)\, b^2 + 1 \pm 2 + 2n\, \Delta_n$. Für den Fall, daß nun $\lambda' = \infty$ wird, muß hierin ebenfalls $n = \infty$ und $b = o$ gesetzt werden und man findet also auch hier $\alpha = \frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0$ als den Punkt, in welchem die Serie Parabeln in der Abszissenachse endigt.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß die Parabeln, die den Kontakten entsprechen, deren eine Zahl immer m ist, eine Figur bilden, die der Form nach annähernd ein Viereck ist. Von großem Interesse ist es nun, darauf zu achten, daß innerhalb dieser Figur keine Parabeln der graphischen Darstellung angetroffen werden können.

Da m willkürlich angenommen wurde, kann man im allgemeinen jeden Wert dafür einsetzen. Jedoch gibt es zwei Ausnahmen bei diesen Betrachtungen und zwar für die Fälle, bei denen $m = 1$ oder $m = 2$ ist. Es schließt sich ja dem dreizähligen Kontakte 0,

1 und 1 zwar eine Serie Kontakte an, welche dargestellt werden können durch 1 und $(\lambda+1)$, wenn $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ usw. ist, und diese endigt in dem Punkte der Abszissenachse, der gegeben wird durch $\frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0 = \frac{0}{1} \cdot 360^0 = 0^0$; nach der anderen Seite aber kann man nur in den Kontakt 0 und 1 übergehen, der mit dem rechtwinkligen Kontakt $b = 1$, $\alpha = 0^0$ endigt. Es ist noch von Interesse, daß sich auch innerhalb des Raumes, der durch diese Parabeln und durch die Ordinatenachse begrenzt wird, keine Parabeln der graphischen Darstellung befinden können.

Auch an den dreizähligen Kontakt 1, 2 und 3 schließt sich eine Serie Kontakte an, die darzustellen ist durch 2 und $(2\lambda+3)$, wenn $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$ usw. ist, und diese endigt in der Abszissenachse, in dem Punkte $\alpha = 180^0$; aber nach der anderen Seite schließt sich dieser Kontakt nur an den Kontakt 1 und 2 an, sodaß die Kontakte, in denen die Zahl „2" vorkommt, endigen in dem Kontakt 1, 1 und 2. Auch hier können innerhalb der dreieckigen Figur, welche durch die genannten Kontakte und durch die Ordinatenachse gebildet wird, keine Parabeln vorkommen.

Außer diesen beiden Werten kann m in obenstehender Betrachtung, wie gesagt, alle möglichen Werte besitzen, und immer wird man in der vollendet gedachten graphischen Darstellung die viereckige Figur nachweisen können. Doch muß sogleich bemerkt werden, daß zu ein und demselben Wert von m mehrere solche Figuren gehören können.

Für $m = 3$ findet man nur eine viereckige Figur, und darin ist $n = 5$, sodaß $\frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0 = \frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$ ist. Man kann sich in der graphischen Darstellung II Tafel II von dieser Figur, bei welcher der Punkt 1, 2 und 3 der höchstgelegene Eckpunkt ist, leicht eine Vorstellung machen.

Auch für $m = 4$ besteht nur eine solche Figur, und hierfür ist $n = 7$, sodaß $\frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0 = 90^0$ ist. Für $m = 5$ gibt es dagegen zwei solche Figuren; bei der einen ist $n = 7$, und $\frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0 = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$; bei der zweiten ist $n = 9$ und $\frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0 = \frac{1}{5} \cdot 360^0 = 72^0$.

Es hat für unseren Zweck kein Interesse, die Frage nach der Anzahl möglicher viereckiger Figuren mit ein und demselben Werte von m weiter zu verfolgen; wir weisen darum auf die graphische Darstellung hin, in der man solche Figuren für mehrere Werte teilweise wiedergegeben findet. Erwähnt sei hier nur noch die Figur für $m = 8$, $n = 13$, wobei $\frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0 = \frac{3}{8} \cdot 360^0 = 135^0$ ist, weil dieselbe für unsere weitere Betrachtungen von Interesse ist.

Hat man sich einmal von den in diesem Paragraphen besprochenen Tatsachen gut Rechenschaft gegeben, so wird man sich ohne Mühe eine Vorstellung machen können von der Lage der Kurven in der vollkommen durchgeführten graphischen Darstellung, und es wird die Unvollständigkeit unserer Figur kein Hindernis bilden, die allgemeinen Folgerungen daraus zu ziehen.

§ 4. Die verschiedenen regelmäßigen Kreissysteme, welche mit ein und demselben bestimmten Werte von α möglich sind. Wenn einmal die graphische Darstellung vollkommen bekannt ist, kann die Frage leicht beantwortet werden, welche Kreissysteme mit ein und demselben bestimmten Werte von α zu konstruieren sind. Man braucht dazu nur eine Ordinate zu zeichnen, welche diesem Werte von α entspricht, es werden dann die Schnittpunkte mit den Kurven der Darstellung uns sogleich in den Stand setzen, die gewünschten Werte für b und die dazugehörenden Kontakte abzulesen.

Im allgemeinen werden mit ein und demselben Werte von α zahlreiche regelmäßige Kreissysteme zu konstruieren sein, aber in einigen besonderen Fällen wird diese Anzahl sehr beschränkt sein. Bei einer Divergenz $\alpha = \frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$ z. B. wird diese Anzahl zwei sein, denn eine Ordinate, die in dem Punkte $\alpha = 120^0$ errichtet ist, schneidet, wie aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen folgt, nur die Parabel für den Kontakt 1 und 3 und die Gerade für den Kontakt 0 und 1. (Die Konstruktion mit $b = 0$ besitzt als Grenzfall natürlich keine praktische Bedeutung.) Der erstgenannte Kontaktfall ist, wie wir bereits früher gesagt haben, abgebildet in Fig. 12 Tafel I; der andere mit dem Kontakt 0 und 1 zeigt eine sehr große Übereinstimmung mit der Konstruktion, die in Fig. 2 Tafel IX wiedergegeben ist.

Man kann allgemein sagen, daß für alle Werte von α, die dargestellt werden können, durch $\frac{1}{q}$, wenn $q = 3, 4, 5, 6, 7$ usw. ist, nur zwei Kreiskonstruktionen möglich sind, von denen die eine den Kontakt 0 und 1 und $b = 1$ zeigt, während die andere den Kontakt 1 und q zeigt und einen Wert von b, der mit wachsendem q abnimmt.

Von Interesse sind auch die Konstruktionen mit $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$. Aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen folgt, daß mit dieser Divergenz drei Konstruktionen möglich sind, denn die Ordinate in diesem Punkt zeigt drei Schnittpunkte mit Kurven der Darstellung: 1. mit dem Kontakt 2 und 5, 2. mit dem Kontakt 1 und 2, und 3. mit dem Kontakt 0 und 1. Man findet diese drei Konstruktionen in Fig. 17 und Fig. 4 der Tafel I und in Fig. 2 der Tafel IX. Andere Konstruktionen als diese sind mit $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$ nicht möglich.

Mit $\alpha = \frac{3}{8} \cdot 360^0 = 135^0$ sind, wie man aus der graphischen Darstellung ablesen kann, vier verschiedene Konstruktionen möglich.

Weiter wollen wir diese Beispiele nicht ausführen.

§ 5. Die verschiedenen regelmäßigen Kreissysteme, welche mit ein und demselben bestimmten Werte von b möglich sind. Von viel größerer praktischer Bedeutung als die Frage, welche wir im vorigen Paragraphen behandelt haben, wird sich die Frage herausstellen: Welches sind die verschiedenen regel-

mäßigen Kreissysteme, die sich mit ein und demselben Werte von b konstruieren lassen?

Die Lösung ist auch jetzt sehr einfach. Man braucht nur eine Abszisse zu ziehen, die dem gegebenen Werte von b entspricht, um in den Schnittpunkten derselben mit den Kurven der Darstellung die gesuchten Werte von α und diejenigen von m und n ablesen zu können. Im allgemeinen gibt es mehrere Kreissysteme mit ein und demselben Werte von b, für den Fall, daß $b = 0$ ist, theoretisch sogar unendlich viele, aber bei größeren Werten von b nimmt diese Anzahl ab, um endlich sehr beschränkt zu werden, obwohl für $b = 1$ ausnahmsweise wieder unendlich viele verschiedene Konstruktionen möglich sind.

Für alle Werte von b, welche zwischen 1 und 0,57735 (Kontakt 1, 1 und 2) liegen, ist nur eine einzige Kreiskonstruktion und zwar ausschließlich mit dem Kontakt 1 und 1 möglich. Aber auch für alle Werte von b, welche zwischen 0,57735 und 0,37797 (Kontakt 1, 2 und 3) liegen, ist nur eine Konstruktion auszuführen, diesmal aber mit dem Kontakte 1 und 2. Für alle Werte dieses Faktors, welche zwischen 0,37797 und 0,27735 (Kontakt 1, 3 und 4) liegen, sind zwei Kreiskonstruktionen auszuführen, und zwar eine mit dem Kontakte 2 und 3 und eine mit dem Kontakte 1 und 3. Für jeden Wert von b, der zwischen 0,27735 und 0,22942 (Kontakt 2, 3 und 5) liegt, sind drei Kreiskonstruktionen möglich: eine mit dem Kontakte 2 und 3, eine mit dem Kontakte 3 und 4, und eine mit dem Kontakte 1 und 4. Schließt man so weiter, so stellt sich heraus, daß, je kleiner die Werte von b werden, um so größer die Anzahl möglicher Konstruktionen wird.

§ 6. Änderung der Kreiskonstruktion durch kontinuierliche Zu- oder Abnahme von b. Zwei Kreissysteme, mit demselben Kontakte m und n, deren Werte von b nur einen unendlich kleinen Wertunterschied zeigen, werden in der graphischen Darstellung angegeben durch zwei auf der betreffenden Parabel nebeneinander liegende Punkte. Man kann sich nun vorstellen, daß die eine Konstruktion durch eine geringe Änderung des Wertes von b und eine gleichzeitige Verschiebung der Kreise in die andere übergehen kann. Diese Änderung des Wertes von b kann dabei auf verschiedene Weise zustande gekommen sein: entweder durch Änderung des Kreisdurchmessers, wobei der des Zylinders derselbe bleibt, oder durch Änderung des Zylinderdurchmessers, wobei der Kreisdurchmesser derselbe bleibt, oder endlich durch gleichzeitige Änderung beider Durchmesser. Ein solcher Übergang eines Systems in ein anderes hat also im allgemeinen eine Änderung der Divergenz und der Neigung der Hauptspirale zur Folge.

Denkt man sich eine Reihe solcher kleiner Änderungen, so kann man in ununterbrochen fortlaufender Weise alle Kontakte m und n durchlaufen. Betrachten wir zuerst die Änderung, welche eintritt durch kontinuierliche „Zunahme“ von b. Man muß dadurch schließlich in dem Kontakt $(n - m)$, m und n endigen. Ist nun $n < 2m$, so ist die Parabel des Kontaktes m und n die steilste der beiden Parabeln, die von dem Punkte $(n - m)$, m und n abwärts laufen. Bei weiterer Zunahme des Wertes von b muß man nun notwendigerweise in die Parabel für den Kontakt $(n - m)$ und m aufsteigen. Ist jedoch $n > 2m$, so ist die Parabel für den Kontakt

m und n die am wenigsten steile, die in dem Punkte $(n-m)$, m und n ausläuft; und nun wird man bei fortgesetzter Zunahme des Wertes von b in den Kontakt m und $(n-m)$ kommen. In jedem Falle ist also eine der Zahlen, die den neuen Kontakt angeben, auch im alten enthalten, während die andere Zahl gleich der Differenz $(n-m)$ ist. Steigt man in dem neuen Kontakte weit genug auf, so kommt man schließlich wieder in einen dreizähligen Kontakt und von da bei fortgesetzter Zunahme des Wertes von b wieder in einen zweizähligen.

Ein Beispiel möge dies näher erklären. Ist $m = 13$, $n = 16$, so werden bei kontinuierlicher Zunahme des Wertes von b folgende Kontakte durchlaufen: 13 und 16, 3 und 13, 3 und 10, 3 und 7, 3 und 4, 1 und 3, 1 und 2, 1 und 1, 0 und 1.

Es ist nun an der Hand der graphischen Darstellung leicht einzusehen, daß man, von welchem Kontakte man auch ausgeht, durch kontinuierliche Zunahme von b, stets in dem Kontakt 0 und 1 enden muß.

Wir weisen noch darauf hin, daß man, sobald m und n aufeinander folgende Glieder der Reihe p, q sind, durch kontinuierliche Zunahme des Wertes von b erst Kontakte durchläuft, die durch aufeinander folgende Glieder dieser Reihe angegeben werden, bis man endlich in dem Kontakte p und q anlangt und nun in eine andere Reihe übergeht. Wenn m und n Glieder der Hauptreihe sind, so folgt hieraus, daß man durch kontinuierliche Zunahme des Wertes von b auch stets in der Hauptreihe bleiben wird.

Denkt man sich, wenn man von einem bestimmten Kontakte m und n ausgeht, den Wert von b kontinuierlich „abnehmend", so kommt man schließlich auf den Kontakt m, n und $(m+n)$; nun aber wird durch weitere Abnahme des Wertes von b die Möglichkeit bestehen, daß entweder ein Kontakt m und $(m+n)$ oder ein Kontakt n und $(m+n)$ erreicht wird. Die kontinuierliche Abnahme von b führt also zu Zweideutigkeiten und es ist z. B. nicht notwendig, daß dabei eine Reihe p, q durchlaufen wird, wenn m und n Glieder einer solchen Reihe sind.

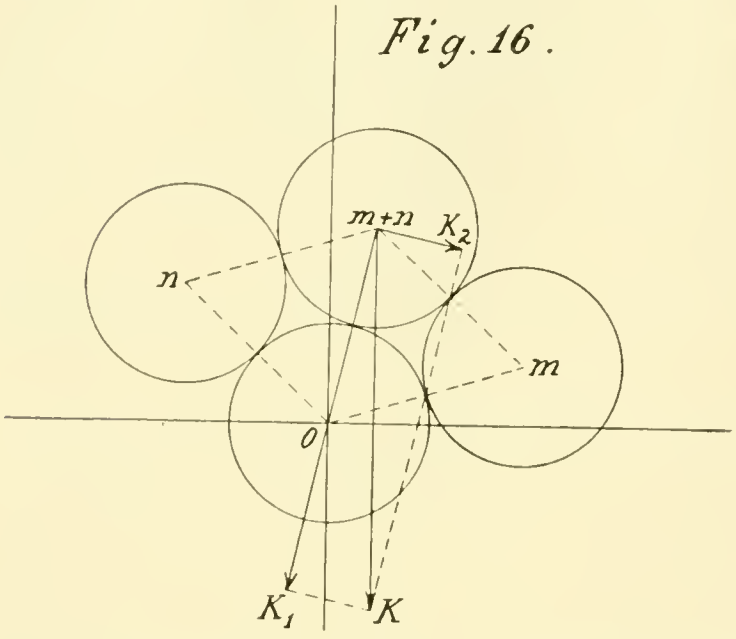
§ 7. Einführung mechanischer Kräfte. Obwohl vorausgesetzt werden muß, daß in der Theorie, wie wir sie im zweiten Teil dieser Arbeit für das „Zustandekommen" der Blattstellungen entwickeln werden, mechanische Kräfte nicht in Betracht gezogen werden, so muß dennoch eine kurze Behandlung der Einführung solcher Kräfte hier stattfinden, teils, weil sie, auch meiner Meinung nach, bei den „Änderungen der Blattstellungen nach ihrer Anlage" eine obwohl wenig bedeutende Rolle spielen, teils, weil SCHWENDENER eine Betrachtung mechanischer Vorgänge als Ausgangspunkt seiner Theorie wählte.

Denkt man sich die Kreise eines regelmäßigen Kreissystems durch materielle Scheiben ersetzt und nimmt man an, daß in allen Mittelpunkten der Scheiben ein vertikal nach unten gerichteter Druck herrscht, während eine der Scheiben feststeht, so werden wir nachweisen, daß dann auch bei einer kontinuierlichen „Abnahme" von b, eine Kontaktreihe m, n, $(m+n)$, $(m+2n)$, usw. durchlaufen werden muß und ein Übergang in andere Reihen unmöglich ist.

Durch die kontinuierliche Abnahme von b kommen wir von einem Kontakt m und n ausgehend nach einiger Zeit in den Kontakt m, n und $(m+n)$. Die Scheiben o, m, $(m+n)$ und n nehmen

in diesem Kontaktfall eine Lage ein, wie sie in Fig. 16 dargestellt ist. Betrachten wir nun den Kreismittelpunkt $(m+n)$, und fragen wir uns, wie sich dieser Mittelpunkt bewegen wird, wenn wir die Voraussetzung machen, daß die Scheibe o ihre Stellung nicht ändert. Man denke sich dazu einen Augenblick die Scheiben m und n weggenommen. Die vertikale Kraft K, die im Mittelpunkt der Scheibe $(m+n)$ angreift, läßt sich zerlegen in zwei andere: eine K_1, welche den Normaldruck zwischen den Scheiben o und $(m+n)$ darstellt und eine K_2, welche senkrecht auf diesem Normaldruck steht und nach der Scheibe m gerichtet ist.

Fig. 16.



Es wird nun einleuchten, daß, falls sich die Scheibe $(m+n)$ bewegt, diese Bewegung der Richtung nach Scheibe m den Vorzug geben wird. Hieraus folgt dann aber, daß bei der kontinuierlichen Abnahme von b der Kontakt zwischen $(m+n)$ und m, d. h. der n-zählige bestehen bleibt, während der Kontakt zwischen $(m+n)$ und n, d. h. der m-zählige aufgehoben wird. Hiermit ist also unsere Voraussetzung erwiesen.

Wir bemerken noch, daß über die Größe der vertikalen Kraft keine Annahme gemacht wurde, und unser Schluß also Geltung hat, auch wenn diese Kraft nur unendlich klein ist.

§ 8. Verschiebungskurven. Denkt man sich wieder bei einer bestimmten Kreiskonstruktion den Mittelpunkt eines der Kreise, z. B. des Kreises o, fest, und läßt man dann b sich so kontinuierlich verändern, daß diejenigen aufeinander folgenden Konstruktionen erhalten werden, welche durch die Punkte der Parabel für den Kontakt m und n angegeben werden, so müssen, wie bereits früher bemerkt wurde, die Mittelpunkte der anderen Kreise ihre Stellung ändern. Die Kurven, welche dabei von diesen Punkten beschrieben werden, werden wir als Verschiebungskurven bezeichnen. Dadurch, daß die Änderung des Wertes von b auf verschiedene Art geschieht (siehe § 6), können diese Kurven allerlei Formen annehmen, bei bestimmten Voraussetzungen läßt sich jedoch die Art dieser Kurven leicht angeben.

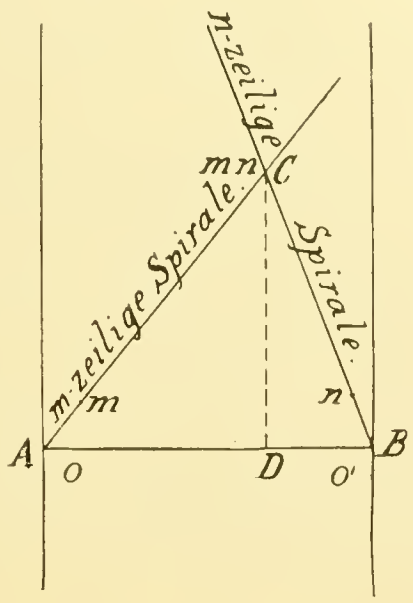
Wir werden hier die Gleichung der Verschiebungskurven aufstellen unter der Voraussetzung, daß die Änderung des Wertes von b ausschließlich zustande kommt durch Änderung des Kreisdurchmessers, während der Zylinderflächendurchmesser derselbe bleibt. Zuerst werden wir die Verschiebungskurven für den Punkt 1 zu bestimmen suchen.

Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes 1 mit x und y und drücken beide in Teilen des Zylinderumfangs aus. Ebenso

wollen wir für unsere Ableitung alle Divergenzwinkel in solchen Teilen ausdrücken. Bei dieser Annahme ist: $x = \alpha$ und

$$\delta_m = m\,x - \Delta_m$$
$$\delta_n = n\,x - \Delta_n$$

Fig. 17.



Betrachtet man nun das Dreieck, das die Punkte o, o' und $m\,n$ zu Eckpunkten hat (siehe Fig. 17), so ist darin die Höhe $CD = mny$, während

$$AD = n\,\delta_m = m\,n\,x - n\,\Delta_m$$
$$BD = m\,\delta_n = m\,n\,x - m\,\Delta_n$$

ist. Ferner gilt dafür:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$
$$CB^2 = DB^2 + CD^2$$

oder:

$$n^2 d^2 = (m\,n\,x - n\,\Delta_m)^2 + m^2 n^2 y^2$$
$$m^2 d^2 = (m\,n\,x - m\,\Delta_n)^2 + m^2 n^2 y^2$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen den Faktor d, d. h. den Kreisdurchmesser, so findet man:

$$x^2 + y^2 - 2\,x\,\frac{n\,\Delta_n - m\,\Delta_m}{n^2 - m^2} - \frac{\Delta^2_m - \Delta^2_n}{n^2 - m^2} = 0 \qquad (24)$$

Dieser Ausdruck gibt also die Beziehung an, welche zwischen x und y besteht, unabhängig von dem Werte d, und stellt folglich die Gleichung der Verschiebungskurve für den Punkt 1 dar. Es ist diese Gleichung der analytische Ausdruck eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf der Abszissenachse liegt und gegeben wird durch:

$$x_0 = \frac{n\,\Delta_n - m\,\Delta_m}{n^2 - m^2} \qquad (25),$$

während der Radius dargestellt wird durch:

$$r = \frac{1}{n^2 - m^2} \qquad (26)$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke kann man für jeden Wert von m und n die Verschiebungskurven des Kreismittelpunktes 1 konstruieren.

Da wir gewöhnlich auf der Abszissenachse die Divergenz in Graden ausgedrückt, abtragen, und dann den Umfang der Zylinderfläche nicht gleich 1, wie es bei der obigen Ableitung geschehen ist, sondern gleich 360^0 setzen, so werden wir auch diese Ausdrucksweise für die Abszisse des Mittelpunkts des Verschiebungskreises anwenden, und finden dann:

$$\alpha_0 = \frac{n\,\Delta_n - m\,\Delta_m}{n^2 - m^2} \cdot 360^0 \qquad (25\,a)$$

Weil aber der Radius dieses Kreises am einfachsten auf derselben Achse abgetragen wird, auf der der Mittelpunkt liegt, so

werden wir auch r in derselben Einheit ausdrücken und finden dann:

$$r = \frac{1}{n^2 - m^2} \cdot 360^0 \qquad (26a)$$

Es sind in Tabelle V und VI für die wichtigsten Werte von m und n die Größen α_0 und r_0 in dieser Einheit ausgedrückt.

Tabelle V.

Verschiebungskreise des Mittelpunktes 1 bei Kontakten aus der Hauptreihe.

Kontakte:	Mittelpunktsabszisse (α_0) in Graden:	Radius (r) des Verschiebungskreises in Graden:
0 und 1	0^0	360^0
1 „ 1	$-\infty^0$	∞^0
1 „ 2	240^0	120^0
2 „ 3	72^0	72^0
3 „ 5	$157^0, 5$	$22^0, 5$
5 „ 8	$129^0, 24$	$9^0, 24$
8 „ 13	$140^0, 571$	$3^0, 429$

Tabelle VI.

Verschiebungskreise des Mittelpunktes 1 bei Kontakten aus Nebenreihen.

Kontakte:	Mittelpunktsabszisse (α_0) in Graden:	Radius (r) des Verschiebungskreises in Graden:
1 und 3	135^0	45^0
3 „ 4	$51^0, 43$	$51^0, 43$
4 „ 7	$109^0, 0909$	$10^0, 9091$
7 „ 11	95^0	5^0
1 „ 4	96^0	24^0
4 „ 5	40^0	40^0
2 „ 5	$137^0, 14$	$17^0, 14$

Erwähnung verdient, daß für $m = o$ und $n = 1$ der Radius des Kreises gleich dem Umfange des Zylinders wird, während dieser Radius für $m = 1$ und $n = 1$ unendlich groß ist, der Kreis also übergeht in eine Gerade, welche senkrecht auf der Abszissenachse steht.

Auf Tafel III findet man in der graphischen Darstellung I diese Verschiebungskurven abgebildet. Dabei wurde angenommen, daß die Hauptspirale rechtsgewunden war, wie man daraus sehen kann, daß der Punkt 1 sich stets rechts vom Punkte o befindet. Punkt o fällt natürlich mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen. Will man die Darstellung der Verschiebungskurven erhalten für den Fall, daß die Hauptspirale linksgewunden ist, so hat man nur das Spiegelbild dieser Figur in bezug auf die Ordinatenachse zu zeichnen. Denkt man sich dieses ausgeführt, so hat man in der vollendeten graphischen Darstellung die Antwort auf die Frage, welches der geometrische Ort der Punkte sei, mit denen der Mittelpunkt von Kreis 1 zusammenfallen kann. Denkt man sich unsere Figur derart verkleinert, daß der Umfang der Zylinderfläche 5 cm wird, dann geben alle Punkte, bei denen auf Tafel I und Tafel IX die Zahl 1 steht, auch Punkte der nun erhaltenen Kurven an.

Wir weisen darauf hin, daß Punkt 1, wenn er die Verschiebungskurve für den Kontakt 1 und 2 abwärts durchläuft, und in Punkt 1, 2 und 3 ankommt, dort vor die Wahl gestellt wird, entweder den Kreis für den Kontakt 1 und 3 entlang hinab zu gleiten oder den für den Kontakt 2 und 3 entlang. Wird bei diesem Vorgang nichts vorausgesetzt als eine Abnahme des Wertes von b, dann hat keiner dieser Wege den Vorzug. Nimmt man jedoch wieder einen vertikalen Druck an auf die Kreise, die nun als materielle Scheiben zu denken sind, dann wird der Punkt 1 notwendigerweise den Kreis für den Kontakt 2 und 3 entlang hinabsteigen, weil dieser die steilste Neigung besitzt.

Was nun die Verschiebungskurven der anderen Kreismittelpunkte betrifft, so wird, wenn man die Koordinaten des Kreismittelpunkts m mit x' und y' bezeichnet, gelten: $x' = m\,x - \Delta_m$ und $y' = m\,y$, sodaß man die Gleichung der Verschiebungskurven dadurch findet, daß man in die Formel (24) $x = \dfrac{x' + \Delta_m}{m}$ und $y = \dfrac{y'}{m}$ einsetzt. Man sieht leicht ein, daß man dadurch als Verschiebungskurve wieder einen Kreis erhält, dessen Mittelpunkt auf der Abszissenachse liegt und zwar so, daß:

$$x'_0 = m\,\frac{n\,\Delta_n - m\,\Delta_m}{n^2 - m^2} - \Delta_n \tag{27}$$

während der Radius des Kreises

$$r' = \frac{m}{n^2 - m^2} \tag{28}$$

ist, also m mal so groß als der für den Kreis 1.

Für den Mittelpunkt des Kreises mn kann die Gleichung der Verschiebungskurve noch ein wenig vereinfacht werden. Nimmt man nämlich an, daß die Hauptspirale rechtsgewunden ist, so findet man, wie man leicht einsieht, für eine linksgewundene m-zeilige Spirale:

$$x_0 = -\frac{m^2}{n^2 - m^2} \tag{29a}$$

und für eine rechtsgewundene n-zeilige Spirale:

$$x_0 = \frac{n^2}{n^2 - m^2} \tag{29b}$$

während in beiden Fällen der Radius des Kreises ausgedrückt wird durch:

$$r = \frac{m\,n}{n^2 - m^2} \tag{30}$$

Diese Verschiebungskurven des Punktes mn sind von SCHWENDENER zum Ausgangspunkt seiner Betrachtungen genommen worden. Dieser Forscher gab von denselben eine geometrische Konstruktion, die in der Theorie der Dachstuhlverschiebungen begründet ist, er stellte jedoch keine nähere Nachforschung nach der Art der Kurven an. Soweit SCHWENDENER angenommen hat, daß der Zylinderumfang konstant bleibt, sind nach unseren Darlegungen die von ihm konstruierten Kurven Kreise. Dies gilt z. B. für die Kurve $c\,c'_1\,c'_2\,c'_3\,c'_4$, welche auf Tafel III in Figur 15 seiner Schrift: „Mechanische Theorie der Blattstellungen“ abgebildet ist; der Radius

dieses Kreises beträgt $\frac{6}{5} \cdot 39 = 47{,}8$ mm und der Mittelpunkt liegt auf der Verlängerung der Linie $b\,a$ in einem Abstand von $\frac{4}{5} \cdot 39 = 31{,}2$ mm links von a. Auch die Kurve in Fig. 16 ebenderselben Tafel und die verschiedenen Kurven auf der Tafel in SCHWENDENERS Abhandlung „Zur Theorie der Blattstellung" aus dem Jahre 1883[1]), sind alle Kreise, deren Mittelpunkte auf der Abszissenachse liegen.

Natürlich wird die Art der Verschiebungskurve anders, wenn man annimmt, daß der Durchmesser der Zylinderfläche sich ändert, aber für unseren Zweck hat es kein Interesse, dies weiter zu verfolgen. Hier war die Hauptsache, nachzuweisen, daß, obwohl das System der Verschiebungskurven mit dem der Parabeln aus der graphischen Darstellung von der Beziehung zwischen b und α Übereinstimmung zeigt, doch die Kurven beider Systeme grundverschieden sind.

§ 9. Einige Zahlenbeziehungen. Zum Schlusse müssen hier noch einige Zahlenbeziehungen behandelt werden, die für unsere späteren Betrachtungen wohl von Nutzen sind, obgleich sie für die vorhergehenden ohne Bedeutung waren.

Bezeichnen wir den Wert von b für den rechtwinkligen Kontakt m und n mit b_1 und den für den rechtwinkligen Kontakt n und $(m+n)$, d. h. also für den folgenden höheren rechtwinkligen Kontakt in der Reihe m, n, $m+n$, $m+2n$ usw., mit b_2, so stellt sich bei der Berechnung des Quotienten $\frac{b_2}{b_1}$ für verschiedene Werte von m und n heraus, daß dieser sich umsomehr der „göttlichen Proportion" $\chi = 0{,}61803\ldots$ nähert, je höhere Glieder der Reihe die Zahlen m und n sind. Um dies näher zu zeigen und Einsicht zu verschaffen in die Größe der Abweichung des Quotienten $\frac{b_2}{b_1}$ von der Limite χ bei den niederen Gliedern, sind in Kolumne 3 der nachstehenden Tabellen die Werte dafür berechnet bei Gliedern aus der Hauptreihe und bei solchen aus zwei Nebenreihen.

Vergleicht man die Werte aus Tabelle VII und VIII mit einander, so wird sogleich auffallen, daß darin dieselben Ausdrücke für den Quotienten $\frac{b_2}{b_1}$ vorkommen; in Tabelle IX (S. 74) trifft man dafür jedoch andere Größen an. Es sei hier nebenbei bemerkt, daß die Gleichheit der Werte nur in der Hauptreihe und in der ersten Nebenreihe gefunden wird, und daß in allen anderen Nebenreihen Abweichungen davon vorkommen.

In den drei verschiedenen Tabellen findet man sehr deutlich ausgedrückt, was oben von dem Quotienten $\frac{b_2}{b_1}$ gesagt wurde: für die niederen Werte ist die Annäherung an χ bereits merkbar, bei den höheren Gliedern wird sie immer deutlicher.

Was wir nun durch Berechnung gefunden haben, läßt sich auch mathematisch beweisen. Wir werden dazu zeigen, daß, wenn

1) Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1883, S. 741.

Tabelle VII.

Das Verhältnis $\frac{b_2}{b_1}$ und $\frac{b_3}{b_1}$ für Kontakte aus der Hauptreihe.

Kontakte	b (rechtwinkl. Kontakte)	$\frac{b_2}{b_1}$	$\frac{b_3}{b_1}$
0 u. 1	$\sqrt{\frac{1}{1}} = 1$		
1 u. 1	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}70711$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071$	
1 u. 2	$\sqrt{\frac{1}{5}} = 0{,}44721$	$\sqrt{\frac{2}{5}} = 0{,}6325$	$\sqrt{\frac{1}{5}} = 0{,}4472$
2 u. 3	$\sqrt{\frac{1}{13}} = 0{,}27735$	$\sqrt{\frac{5}{13}} = 0{,}6202$	$\sqrt{\frac{2}{13}} = 0{,}3922$
3 u. 5	$\sqrt{\frac{1}{34}} = 0{,}17150$	$\sqrt{\frac{13}{34}} = 0{,}6184$	$\sqrt{\frac{5}{34}} = 0{,}3835$
5 u. 8	$\sqrt{\frac{1}{89}} = 0{,}10600$	$\sqrt{\frac{34}{89}} = 0{,}6181$	$\sqrt{\frac{13}{89}} = 0{,}3822$
8 u. 13	$\sqrt{\frac{1}{233}} = 0{,}06551$	$\sqrt{\frac{89}{233}} = 0{,}6180$	$\sqrt{\frac{34}{233}} = 0{,}3820$
13 u. 21	$\sqrt{\frac{1}{610}} = 0{,}04049$	$\sqrt{\frac{233}{610}} = 0{,}6180$	$\sqrt{\frac{89}{610}} = 0{,}3820$
21 u. 34	$\sqrt{\frac{1}{1597}} = 0{,}02502$	$\sqrt{\frac{610}{1597}} = 0{,}6180$	$\sqrt{\frac{233}{1597}} = 0{,}3820$
34 u. 55	$\sqrt{\frac{1}{4181}} = 0{,}01546$	$\sqrt{\frac{1597}{4180}} = 0{,}6180$	$\sqrt{\frac{610}{4180}} = 0{,}3820$

Tabelle VIII.

Das Verhältnis $\frac{b_2}{b_1}$ und $\frac{b_3}{b_1}$ für Kontakte aus der 1. Nebenreihe.

Kontakte	b (rechtwinkl. Kontakte)	$\frac{b_2}{b_1}$	$\frac{b_3}{b_1}$
1 u. 3	$\sqrt{\frac{1}{10}} = 0{,}31623$		
3 u. 4	$\sqrt{\frac{1}{25}} = 0{,}2$	$\sqrt{\frac{2}{5}} = 0{,}6325$	
4 u. 7	$\sqrt{\frac{1}{65}} = 0{,}12404$	$\sqrt{\frac{5}{13}} = 0{,}6202$	$\sqrt{\frac{2}{13}} = 0{,}3922$
7 u. 11	$\sqrt{\frac{1}{170}} = 0{,}07670$	$\sqrt{\frac{13}{34}} = 0{,}6184$	$\sqrt{\frac{5}{34}} = 0{,}3855$
11 u. 18	$\sqrt{\frac{1}{445}} = 0{,}04740$	$\sqrt{\frac{34}{89}} = 0{,}6181$	$\sqrt{\frac{13}{89}} = 0{,}3822$
18 u. 29	$\sqrt{\frac{1}{1165}} = 0{,}02930$	$\sqrt{\frac{89}{233}} = 0{,}6180$	$\sqrt{\frac{34}{233}} = 0{,}3820$

Tabelle IX.

Das Verhältnis $\frac{b_2}{b_1}$ und $\frac{b_3}{b_1}$ für Kontakte aus der Nebenreihe 1, 4.

Kontakte	b (rechtwinkl. Kontakte)	$\frac{b_2}{b_1}$	$\frac{b_3}{b_1}$
1 u. 4	$\sqrt{\frac{1}{17}} = 0{,}24254$		
4 u. 5	$\sqrt{\frac{1}{41}} = 0{,}15617$	$\sqrt{\frac{17}{41}} = 0{,}6439$	
5 u. 9	$\sqrt{\frac{1}{106}} = 0{,}09713$	$\sqrt{\frac{41}{106}} = 0{,}6219$	$\sqrt{\frac{17}{106}} = 0{,}4005$
9 u. 14	$\sqrt{\frac{1}{277}} = 0{,}06008$	$\sqrt{\frac{106}{277}} = 0{,}6186$	$\sqrt{\frac{41}{277}} = 0{,}3847$
14 u. 23	$\sqrt{\frac{1}{725}} = 0{,}03714$	$\sqrt{\frac{277}{725}} = 0{,}6181$	$\sqrt{\frac{106}{725}} = 0{,}3824$
23 u. 37	$\sqrt{\frac{1}{1898}} = 0{,}02295$	$\sqrt{\frac{725}{1898}} = 0{,}6180$	$\sqrt{\frac{277}{1898}} = 0{,}3820$

m und n unendlich große Glieder einer Reihe p, q sind, gleichgültig welche Werte p und q besitzen, stets als Limitwert des Quotienten $\frac{b_2}{b_1}$ der Wert χ gefunden wird. Wir drücken m und n wieder aus in p und q und in den „übereinstimmenden Gliedern“ m_1 und n_1 aus der Hauptreihe, auf dieselbe Weise wie wir dies in § 9 Kap. IV angegeben haben, sodaß:

$$m = (2m_1 - n_1)p + (n_1 - m_1)q$$
$$n = (n_1 - m_1)p + m_1 q$$

und
$$m + n = m_1 p + n_1 q$$

Es wird nun:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2 + (m+n)^2}}}{\sqrt{\frac{1}{m^2 + n^2}}} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{n^2 + (m+n)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{p^2(5m_1^2 - 6m_1 n_1 + 2n_1^2) + q^2(2m_1^2 - 2m_1 n_1 + n_1^2) + p^2(n_1^2 - 2m_1 n_1 + 2m_1^2) + q^2(2m_1^2 + n_1^2) + 2pq\,m_1(2n_1 - m_1) + 2pq(n_1 - m_1)(3m_1 - n_1)}}$$

sodaß:

$$\text{Limite}\,\frac{b_2}{b_1} = \sqrt{\frac{p^2(5\chi^2 - 6\chi + 2) + q^2(2\chi^2 - 2\chi + 1) + 2pq(1-\chi)(3\chi - 1)}{p^2(1 - 2\chi + 2\chi^2) + q^2(1 + \chi^2) + 2pq\chi(2 - \chi)}}$$

Nun läßt sich durch Anwendung der Formel (16) nachweisen, daß:

$$5\chi^2 - 6\chi + 2 = \chi^2(1 - 2\chi + 2\chi^2),\quad 2\chi^2 - 2\chi + 1 = \chi^2(1 + \chi^2)$$

und $(1-\chi)(3\chi-1) = \chi^3(2-\chi)$[1]), sodaß:

$$\text{Limite}\,\frac{b_2}{b_1} = \chi \tag{31}$$

ist.

Aus dem Vorhergehenden folgt weiter noch, daß, wenn man den Wert von b für den Kontakt $(m+n)$ und $(m+2n)$ mit b_3 bezeichnet, die Beziehung gilt:

$$\text{Limite}\,\frac{b_3}{b_1} = \chi^2 \tag{32}$$

Für niedere Kontakte ist die Abweichung von diesem Limitwerte wieder deutlich merkbar, wie aus der vierten Kolumne der obenstehenden Tabellen abgelesen werden kann.

Es ist klar, daß, wenn man mit b_4 den Wert von b für den Kontakt $(m+2n)$ und $(2m+3n)$ bezeichnet, gelten wird:

$$\text{Limite}\,\frac{b_4}{b_1} = \chi^3$$

und in dieser Weise kann man weiter schließen.

Was wir nun hier bei den Werten von b für die rechtwinkligen Kontakte nachgewiesen haben, läßt sich auch in gleicher Weise für die dreizähligen Kontakte beweisen. Sind b_1 und b_2 die Werte von b für zwei aufeinander folgende dreizählige Kontakte, so gilt dafür die Beziehung (31) usw. Auch hier wird bei den niederen dreizähligen Kontakten nur eine Annäherung des Quotienten an den Limitwert gefunden. Für unseren Zweck werden sich die Beziehungen für die rechtwinkligen Kontakte als wichtiger herausstellen.

Aus dem Gesagten geht noch hervor, welche wichtige Bedeutung die „göttliche Proportion" für ein richtiges Verständnis der graphischen Darstellung von der Beziehung zwischen b und α besitzt.

Kapitel VI. Regelmäßige Systeme tangierender Ellipsen auf einer Kreiszylinderfläche.

Bereits in § 1 Kap. II haben wir darauf hingewiesen, daß es möglich ist, um die Punkte jedes regelmäßigen Punktsystems auf einer abgerollten Zylinderfläche kongruente und parallel liegende Ellipsen derart zu konstruieren, daß jede Ellipse von mindestens vier anderen berührt wird, daß sie also zusammen ein „regelmäßiges System tangierender Ellipsen" bilden. Um diese Konstruktion auszuführen, braucht man nur zwei „zugeordnete" Richtungen in dem Punktsystem aufzusuchen; wenn dies z. B. die m- und die n-zeilige Spirale sind, so beschreibe man um 0 mit $\frac{0\,m}{2}$ und $\frac{0\,n}{2}$ als halbe zugeordnete Durchmesser eine Ellipse und konstruiere danach auch

1) So ist z. B. $\chi^2(1-2\chi+2\chi^2) = \chi^2(3-4\chi) = \chi(3\chi-4\chi^2) = \chi(7\chi-4) = 7\chi^2-4\chi = 5\chi^2-6\chi+2$.

um alle anderen Punkte des Systems kongruente und parallel liegende Ellipsen. Da unendlich viele zugeordnete Richtungen in einem regelmäßigen Punktsystem nachzuweisen sind, kann man auch unendlich viele, verschiedene regelmäßige Ellipsensysteme um die Punkte konstruieren. Diese allgemeine Möglichkeit hört jedoch auf, sobald man an die Art der Ellipsen bestimmte Bedingungen knüpft, z. B. wenn man verlangt, daß sie eine gegebene Exzentrizität besitzen oder, daß eine der Achsen in einer gegebenen Richtung läuft oder eine bestimmte Größe besitzt.

Obwohl diese allgemeine Frage für unsere weiteren Betrachtungen keinen Wert besitzt, wollen wir doch nicht unterlassen, in einem besonderen Falle nachzuweisen, wie unsere früheren Ableitungen sich bei einer Ellipsenkonstruktion ändern. Wir nehmen ein Beispiel, das bereits durch SCHWENDENER in seiner Schrift „Mechanische Theorie der Blattstellungen" besprochen wurde, um unseren Standpunkt neben dem dieses Forschers auseinandersetzen zu können.

Denkt man sich bei einem regelmäßigen Kreissystem auf einer abgerollten Zylinderfläche die Zeichnung über einen bestimmten Winkel um eine horizontale Linie gedreht und darauf die Zeichnung auf die ursprüngliche Fläche zurück projiziert. Die Projektion des ursprünglichen Punktsystems bildet dann ein neues regelmäßiges Punktsystem und um die Punkte dieses letzteren wird in der Projektion ein regelmäßiges System tangierender Ellipsen vorhanden sein, deren große Achsen horizontal gerichtet sind. Hätte man die Drehung um eine vertikale Linie ausgeführt, so würde man ein System tangierender Ellipsen erhalten haben, deren große Achsen vertikal stehen. In beiden Fällen zeigt das Ellipsensystem dieselbe Divergenz und dieselben Kontakte wie das ursprüngliche Kreissystem[1]). Nennt man in dem Ellipsensystem das Verhältnis zwischen dem horizontalen Ellipsendurchmesser und dem Zylinderumfange wieder b, dann hat auch b hier dieselbe Größe wie bei dem Kreissystem.

Da nun umgekehrt jedes System von Ellipsen, deren eine Achse horizontal läuft, immer als die Projektion eines regelmäßigen Kreissystems betrachtet werden kann mit demselben Kontakte, derselben Divergenz und demselben Werte von b, so wird auch für solche Ellipsensysteme die Beziehung zwischen α und b durch dieselben Formeln und durch dieselbe graphische Darstellung ausgedrückt, wie für die regelmäßigen Kreissysteme. Alle Eigenschaften, die wir oben für die Kreissysteme ableiteten, gelten also auch für die regelmäßigen Ellipsensysteme. Mit der Auffassung von SCHWENDENER, daß dies auch für Systeme mit anderen geschlossenen symmetrischen Figuren gelten soll, deren Symmetrieachsen horizontal und vertikal laufen (s. S. 33 seiner Mechanischen Theorie), kann ich mich nicht einverstanden erklären.

Ellipsensysteme, deren Ellipsenachsen nicht horizontal und vertikal laufen, werden bei demselben Kontakte und demselben Werte von b andere Divergenzen zeigen als diejenigen, bei denen die Ellipsenachsen wohl so gestellt sind. Die dreizähligen Kontakte z. B. besitzen in einem solchen Systeme andere Divergenzen. Es sei

1) SCHWENDENER hat hierfür auch noch einen direkten Beweis gegeben.

jedoch darauf hingewiesen, daß, je höhere Kontakte betrachtet werden, eine desto größere Annäherung an die Divergenzen der Kreiskonstruktionen erreicht werden muß, während man stets dieselben Limitwerte erhalten wird, wenn man Kontakte betrachtet, die durch unendlich große aufeinander folgende Zahlen aus ein und derselben Kontaktreihe ausgedrückt werden. Dies folgt aus der Überlegung, daß die Annäherungswerte für die Divergenz, die wir in § 9 Kap. I abgeleitet haben, sowie die Limitwerte für die Divergenz, die wir in § 10 Kap. III und in § 12 Kap. IV ableiteten, gefunden wurden, ohne daß wir irgend eine Annahme machten über die Form der Figuren, die um die Punkte des Punktsystems beschrieben waren. (Man vergleiche S. 45.)

Kapitel VII. Regelmäßige Systeme tangierender Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Kreiszylinderfläche liegen. Zylindrische Kugelsäulen.

§ 1. Fragestellung. Denkt man sich um die Punkte eines regelmäßigen Punktsystems auf einer Kreiszylinderfläche Kugeln mit gleichem Radius beschrieben, so wird es im allgemeinen nicht möglich sein, einen solchen Radius für diese Kugeln zu wählen, daß jede von vier oder sechs anderen berührt wird, ohne daß die Kugelflächen sich schneiden.

Und doch werden wir nachweisen, daß regelmäßige Punktsysteme auf einer Kreiszylinderfläche anzugeben sind, bei denen solche Kugelsysteme sich wohl konstruieren lassen. Dabei wird dann jede Kugel auf zwei oder drei anderen ruhen und als Stütze von zwei oder drei anderen gleichen Kugeln dienen. Einem solchen Systeme werden wir den Namen zylindrische Kugelsäule geben.

Hier besprechen wir wieder ausschließlich Punktsysteme, bei denen eine Hauptspirale vorkommt, sodaß wir eine kontinuierliche Numerierung der Punkte ausführen können.

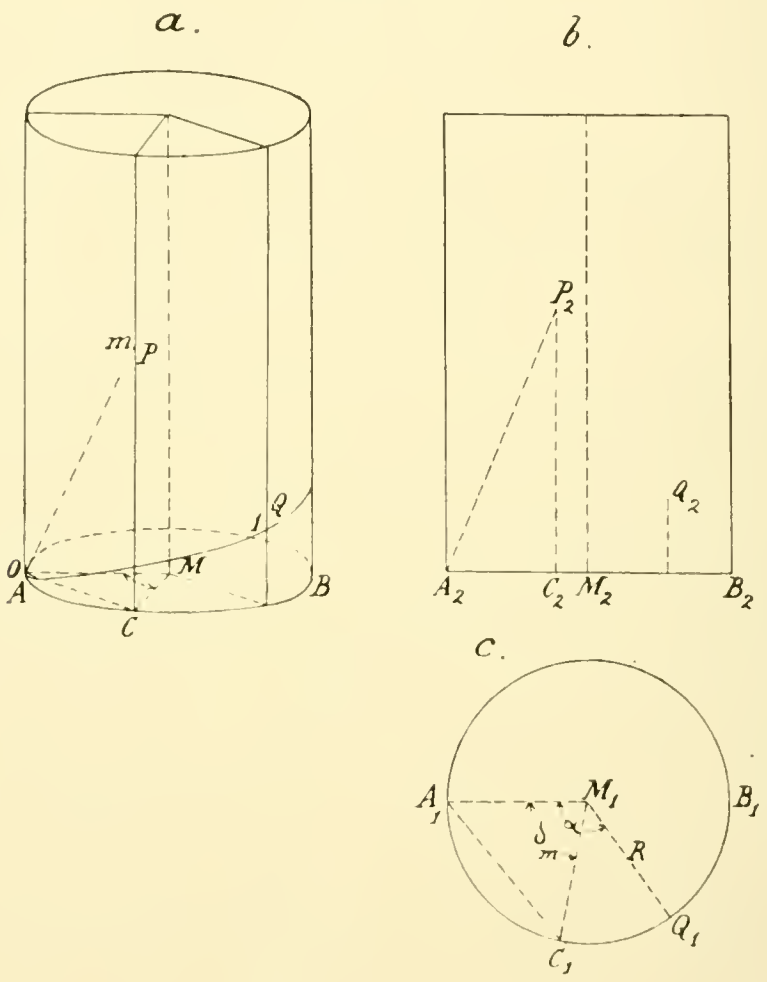
Betrachten wir in einem solchen Systeme die Punkte m und n, die am nächsten beim Punkt 0 liegen (der Abstand ist auf der abgerollten Zylinderfläche zu messen), sodaß die m- und die n-zeilige Spirale „zugeordnete“ Spiralen bilden, dann läuft die oben gestellte Frage darauf hinaus, daß wir die Bedingungen zu erforschen uns bemühen, die in einem regelmäßigen Punktsystem erfüllt sein müssen, damit um 0 eine Kugel beschrieben werden kann, welche gleiche Kugeln um die Punkte m und n berührt. Es leuchtet ein, daß dann auch die Kugel um m eine gleiche Kugel um $2m$ berühren muß, und diese wieder eine solche um $3m$ usw. Man wird also bei einem derartigen System eine Serie sich berührender Kugeln finden müssen, deren Mittelpunkte auf einer Schraubenlinie liegen, und zwar werden sich in derselben Richtung m derartige parallele Kontaktreihen finden müssen und in einer anderen Richtung n. Wir sprechen in diesem Falle wieder vom Kontakte in der Richtung der m- und der n-zeiligen Spirale, oder kurzweg vom zweizähligen Kontakt m und n.

§ 2. Ableitung der Formeln für den zweizähligen Kontakt. Nennen wir die Steigung der Hauptspirale (richtiger „Schraubenlinie") β und bezeichnen wir den Radius der Kreiszylinderfläche mit R, die Divergenz des Punktsystems, die wir hier in Radien ausgedrückt denken, mit α, dann ist deutlich, daß der senkrechte Abstand des Punktes 1 über dem Punkte 0 gegeben wird durch:

$$R\,\alpha\,tg\,\beta.$$

Infolgedessen wird der Punkt m (man siehe Fig. 18, worin 18a

Fig. 18.



eine perspektivische Ansicht, 18b die vertikale und 18c die horizontale Projektion darstellt) sich in einem Abstande:

$$P\,C = m\,R\,\alpha\,tg\,\beta$$

über diesem Punkte 0 befinden müssen.

Der horizontale Winkelabstand, welcher zwischen den Punkten 0 und m besteht (die sekundäre Divergenz des Punktes m), ist in Radien ausgedrückt:

$$\delta_m = m\,\alpha - \Delta_m \,.\, 2\,\pi\,.$$

Hieraus läßt sich unmittelbar der horizontale Abstand $A\,C$ des Punktes 0 von m berechnen; es wird dieser gleich:

$$A\,C = 2\,R \sin \frac{\delta_m}{2} = 2\,R \sin \frac{(m\,\alpha - \Delta_m \,.\, 2\,\pi)}{2},$$

und da A_m stets eine ganze Zahl ist:

$$A\,C = 2\,R \sin \frac{m\,\alpha}{2}$$

Der wirkliche Abstand $A\,P$ des Punktes 0 von m ist also:

$$A\,P = \sqrt{R^2\,m^2\,\alpha^2\,tg^2\,\beta + 4\,R^2 \sin^2 \frac{m\,\alpha}{2}}$$

Nimmt man an, daß um den Punkt 0 eine Kugel beschrieben ist, und stellt man die Bedingung auf, daß diese eine zweite gleiche Kugel um Punkt m berühren soll, dann wird diese Berührung in der Mitte der Linie $A\,P$ geschehen, und es wird $A\,P$ gleich dem doppelten Radius dieser Kugel sein. Diesen Radius bezeichnen wir mit r. Es wird dann:

$$2\,r = \sqrt{R^2\,m^2\,\alpha^2\,tg^2\,\beta + 4\,R^2 \sin^2 \frac{m\,\alpha}{2}}$$

Setzt man außerdem noch als Bedingung fest, daß die um 0 beschriebene Kugel auch die gleiche um Punkt n beschriebene Kugel berühren soll, so findet man auf genau dieselbe Weise:

$$2\,r = \sqrt{R^2\,n^2\,\alpha^2\,tg^2\,\beta + 4\,R^2 \sin^2 \frac{n\,\alpha}{2}}$$

Man kann also als Bedingung dafür, daß die Kugel um 0 gleichzeitig gleiche Kugeln, die m und n umschrieben sind, berührt, schreiben:

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{m^2\,\alpha^2\,tg^2\,\beta}{4} + \sin^2 \frac{m\,\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{n^2\,\alpha^2\,tg^2\,\beta}{4} + \sin^2 \frac{n\,\alpha}{2}} \qquad (33)$$

Aus diesen beiden Gleichheiten läßt sich noch die folgende ableiten:

$$\frac{n^2 - m^2}{4}\,\alpha^2\,tg^2\,\beta = \sin^2 \frac{m\,\alpha}{2} - \sin^2 \frac{n\,\alpha}{2} \qquad (34\,a)$$

oder:

$$\frac{(n-m)(n+m)}{4}\,\alpha^2\,tg^2\,\beta = -\sin \frac{m+n}{2}\,\alpha \sin \frac{n-m}{2}\,\alpha \qquad (34)$$

Diese Gleichung gibt die Beziehung an, welche zwischen den Größen α und β bestehen muß, damit die Kugelsäule mit dem Kontakt m und n um die Punkte beschrieben werden kann. Bei jedem Werte von α ergibt Formel (34) einen dazu gehörenden Wert von β, und da durch diese beiden Größen das regelmäßige Punktsystem auf der Kreiszylinderfläche vollkommen bestimmt ist, so wäre damit die in § 1 gestellte Frage gelöst: solche Punktsysteme anzugeben, um deren Punkte die gewünschte Kugelsäulenkonstruktion möglich ist. Der Wert von r bei einem gegebenen Wert von R wird durch Gleichung (33) bestimmt und umgekehrt.

Dennoch ist es nicht hinreichend, daß α und β der Gleichung (34) genügen, um mit diesen Werten Kugelsäulen konstruieren zu können, in denen ausschließlich Berührungen und keine Schnitte von Kugeln vorkommen.

Denkt man sich ein Punktsystem, das der Bedingung (34) entspricht, gleichzeitig mit der Zylinderfläche auf einer Ebene abgerollt, dann werden die Punkte o, m, n und $(m+n)$ ein Parallelogramm bilden, ebenso wie die Punkte o, m, n und $(n-m)$, und

innerhalb dieser Vierecke wird kein einziger Punkt des Systems zu finden sein (die m- und n-zeilige Spirale waren ja zugeordnet). Daraus folgt, daß die einzige Bedingung, die erfüllt werden muß, wenn man wirklich eine Kugelsäule ohne Schnitt der Kugeln konstruieren will, lautet: der „wirkliche" Abstand von o bis $(m+n)$ und der von o bis $(n-m)$ muß größer als der Durchmesser der Kugeln und höchstens ihm gleich sein. Denn ist diese Bedingung erfüllt, so kann kein Durchschneiden der Kugel mit den Kugeln $(m+n)$ oder $(n-m)$ stattfinden, aber auch nicht mit irgend einer anderen Kugel.

Die Werte von α und β, die Punktsystemen entsprechen, um deren Punkte eine Konstruktion von Kugelsäulen möglich ist, bei denen die Kugeln sich nicht schneiden, werden zwischen denjenigen Werten dieser Größen liegen, welche für den dreizähligen Kontakt m, n und $(m+n)$ und den dreizähligen Kontakt $(n-m)$, m und n gelten.

§ 3. Ableitung der Formeln für dreizählige Kontakte. Wir bemerken, daß die Werte von α und β, die für den Kontakt m, n und $(m+n)$ gelten, sowohl der Gleichung genügen müssen, welche für den Kontakt m und n gilt, als auch derjenigen, welche für den Kontakt n und $(m+n)$ gültig ist, d. h. also den folgenden zweien:

$$\frac{(n+m)\,(n-m)}{4}\,\alpha^2\,tg^2\beta = -\sin\frac{m+n}{2}\,\alpha\sin\frac{n-m}{2}\,\alpha$$

$$\frac{(2n+m)\,m}{4}\,\alpha^2\,tg^2\beta = -\sin\frac{2n+m}{2}\,\alpha\sin\frac{m}{2}\,\alpha$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{(n+m)(n-m)}{(2n+m)\,m} = \frac{\sin\frac{m+n}{2}\,\alpha\sin\frac{n-m}{2}\,\alpha}{\sin\frac{2n+m}{2}\,\alpha\sin\frac{m}{2}\,\alpha} \tag{36a}$$

und diese Beziehung ermöglicht uns, denjenigen Wert von α zu finden, der dem Kontakte m, n und $(m+n)$ entspricht.

Ebenso finden wir, daß der Wert von α, der zu dem Kontakt $(n-m)$, m und n gehört, gegeben wird durch die Beziehung:

$$\frac{(2m-n)\,n}{m\,(m+n)} = \frac{\sin\frac{2m-n}{2}\,\alpha\sin\frac{n}{2}\,\alpha}{\sin\frac{m}{2}\,\alpha\sin\frac{m+n}{2}\,\alpha} \tag{36b}$$

Die Werte von α, welche zwischen denen liegen, welche aus 36a und 36b folgen, sind also solche, für die eine Kugelsäule mit dem Kontakte m und n ohne Schnitt von Kugeln möglich ist.

§ 4. Die Beziehung zwischen b und α. Sind einmal die Werte von α und β für ein Punktsystem, um dessen Punkte eine Kugelsäule möglich ist, bekannt, so ergibt die Gleichung (33) den Wert von $\frac{r}{R}$, d. i. das Verhältnis des Kugelradius zu dem des Zylinders. Wir können also für jeden Wert von α den dazu gehörigen Wert von $\frac{r}{R}$ berechnen, und zwar dadurch, daß wir erst mit Hilfe von Formel (34) die zugehörigen Werte von β

und dann mit Hilfe von Formel (33) diejenigen von $\frac{r}{R}$ bestimmen. Die Beziehung, welche zwischen α und $\frac{r}{R}$ besteht, läßt sich jedoch auch direkt ausdrücken. Eliminiert man nämlich aus (33) und (34a) die Größe $\alpha\, tg\, \beta$, so findet man:

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{n^2 \sin^2 \frac{m\alpha}{2} - m^2 \sin^2 \frac{n\alpha}{2}}{n^2 - m^2}} \tag{37}$$

Bei der Kreiskonstruktion haben wir die Beziehung gesucht, die zwischen einer Größe b und der Divergenz α besteht. Nun stellte die Größe b das Verhältnis des Kreisdurchmessers zum Umfang der Zylinderfläche dar, auf die das Punktsystem beschrieben ist. Führen wir hier dieselbe Größe ein, so ist $b = \frac{2r}{2\pi R} = \frac{r}{\pi R}$, also können wir die letzte Formel auch folgendermaßen schreiben:

$$b = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{n^2 \sin^2 \frac{m\alpha}{2} - m^2 \sin^2 \frac{n\alpha}{2}}{n^2 - m^2}} \tag{38}$$

Diese Gleichung tritt bei den Kugelsäulen an die Stelle der Gleichungen (4a) und (4b), die für die Kreiskonstruktionen gelten.

§ 5. Die Gleichung der Verschiebungskurven. Bevor wir das hier Besprochene an einigen Zahlenbeispielen erläutern, wollen wir noch darauf hinweisen, daß auch die Gleichung der Verschiebungskurven für die Kugelsäulen aus dem Abgeleiteten unmittelbar folgt. Nimmt man die Kugel o als fest an, und denkt man sich den Umfang der Zylinderfläche konstant, dann wird bei der Änderung von b, d. h. bei Änderung des Kugeldurchmessers, auch die Höhe h, in der sich Punkt 1 über Punkt 0 befindet, sich ändern. Die Kurve, die dieser Punkt bei kontinuierlicher Änderung von b beschreibt, ist wieder die „Verschiebungskurve“ des Punktes 1. Nun haben wir oben gesehen, welchen Wert die Höhe des Punktes 1 über 0 besitzt:

$$h = \alpha R\, tg\, \beta.$$

Setzt man diesen Wert in (34) ein, so wird:

$$\frac{h^2}{R^2} = -\frac{4 \sin \frac{m+n}{2}\alpha \sin \frac{n-m}{2}\alpha}{(m+n)(n-m)}.$$

Drückt man die Höhe nun wieder in Teilen des Zylinderumfangs aus, wie wir das bei den Verschiebungskurven für die Kreiskonstruktionen taten, und bezeichnen wir sie dann mit z, so ist $z = \frac{h}{2\pi R}$, also:

$$z^2 = -\frac{\sin \frac{m+n}{2}\alpha \sin \frac{n-m}{2}\alpha}{\pi^2 (m+n)(n-m)} \tag{39}$$

Diese Gleichung ist der analytische Ausdruck für die Verschiebungskurven des Mittelpunktes der Kugel 1, und stellt also

für die Kugelsäulenkonstruktionen das dar, was die Gleichung (24) (S. 69) für die Kreiskonstruktion war.

Die Verschiebungskurven des Mittelpunktes (z', α') der Kugel m findet man dadurch, daß man in Formel (39) $z = \frac{z'}{m}$ und $\alpha = \frac{\alpha' + \Delta_m \cdot 2\pi}{m}$ setzt.

§ 6. Unterschied und Übereinstimmung zwischen den Eigenschaften der Kugelsäulen und der Kreiskonstruktionen. Obwohl man aus den Abweichungen der Formeln bereits ersehen kann, daß die Punktsysteme, um deren Punkte regelmäßige Kreiskonstruktionen möglich sind, andere sind als die, um deren Punkte Kugelsäulen konstruiert werden können, so wollen wir diesen Unterschied im Folgenden doch näher erläutern. Man denke sich ein Punktsystem, um dessen Punkte eine Kugelsäule mit dem Kontakte m und n möglich ist, mit der Zylinderfläche, auf der die Punkte liegen, in einer Ebene abgerollt. Dann wird das Viereck o, m, $(m+n)$, n ein Parallelogramm sein, aber niemals ein Rhombus, denn die n-zeilige Spirale muß steiler laufen als die m-zeilige und der wirkliche, direkte Abstand von o bis m muß dem von o bis n gleich sein, sodaß der Abstand von o bis m, an der Schraubenlinie entlang gemessen, größer als der von o bis n sein muß. Nur wenn die Kugeln sehr klein werden, also für $b = o$, kann das Parallelogramm als ein Rhombus betrachtet werden.

Nun ist das Viereck o, m, $(m+n)$, n bei der Kreiskonstruktion mit dem Kontakte m und n wohl immer ein Rhombus, und es können also die Punktsysteme für Kreiskonstruktionen und Kugelsäulen nicht identisch sein, außer wenn $b = o$ ist. Je größer b wird, desto mehr weichen die Punktsysteme für die beiden Konstruktionen von einander ab. Wir werden dies bei den Zahlenbeispielen noch näher nachweisen.

Im Übrigen zeigen die beiden Konstruktionen in wichtigen Punkten große Übereinstimmung: sowohl bei den Kugelsäulen als bei den regelmäßigen Kreissystemen können wir durch kontinuierliche Abnahme von b von einem Kontakte m und n aus, übergehen in einen Kontakt m, n und $(m+n)$ und von hier aus entweder in einen Kontakt m und $(m+n)$ oder in einen Kontakt n und $(m+n)$. So können wir z. B., wenn wir von dem Kontakt 1 und 1 ausgehen, in den Kontakt 1 und 2 kommen und von da aus in den Kontakt 2 und 3, von hier aus wieder in 3 und 5, usw. Wir können also durch kontinuierliche Änderung von b stets in der Hauptreihe bleiben. Daß wir hier in diesem Fall, bei kontinuierlicher Abnahme von b, schließlich zu demselben Limitwerte der Divergenz gelangen, den wir bei den Kreiskonstruktionen gefunden haben, läßt sich auf genau dieselbe Weise wie für jenen Fall nachweisen; es folgt dies aber auch noch aus der soeben gemachten Bemerkung, daß bei $b = o$ beide Konstruktionen um dieselben Punktsysteme möglich sind.

Bleiben wir bei kontinuierlicher Abnahme von b in einer Nebenreihe, so werden wir ebenfalls notwendigerweise bei $b = o$ denselben Limitwert der Divergenz in dieser Nebenreihe antreffen müssen wie bei der Kreiskonstruktion.

§ 7. Zahlenanwendung auf zweizählige Kontakte. Wir verweisen auf Tabelle X (S. 84/85), in der man für verschiedene Werte

von m und n die Gleichung (38) und (39) aufgestellt findet. Die graphische Darstellung der Gleichungen (38) findet man als Fig. I auf Tafel II; sie ist in demselben Maßstab abgebildet wie die graphische Darstellung II auf dieser Tafel, welche letzte die Beziehung zwischen α und b für die zweizähligen Kontakte bei den Kreiskonstruktionen angibt. Bei einer oberflächlichen Betrachtung fällt eine große Übereinstimmung zwischen beiden Darstellungen auf, aber bei näherer Prüfung findet man wichtige Unterschiede an ihnen.

Die graphische Darstellung für die Kugelsäulen beginnt in dem Punkte, welcher bezeichnet ist mit 1, 1 und 2, jedoch muß hierbei bedacht werden, daß der Kontakt 1 und 1 bei diesen Säulen nicht zu realisieren ist, denn das Auftreten dieses Kontaktes würde ja bedeuten, daß Kugel 0 zwei Kontaktpunkte mit Kugel 1 besitzt, und das ist absurd. Auch der Kontakt 0 und 1 ist hier unmöglich, denn Kugel 0 kann nicht mit sich selbst in Kontakt treten. Dennoch könnte man sich die Frage vorlegen, was denn geschehen würde, wenn wir die Kugelsäule mit immer größerem Werte für $b \left(= \frac{r}{\pi R}\right)$ konstruierten. Man kann sich nämlich denken, daß dem Kontakt 1 und 2 eine ganze Reihe Kontaktfälle vorhergehen, wobei ein einzähliger anstatt eines zweizähligen Kontaktes besteht. Wir kommen hierauf später zurück.

Wie uns die Berechnung lehrt, wird der Punkt, welcher in der graphischen Darstellung für die Kugelsäulen dem Kontakt 1, 1 und 2 entspricht, bedeutend niedriger liegen als der entsprechende Punkt bei der graphischen Darstellung für die Kreiskonstruktionen. Von diesem Punkte aus nehmen jedoch die Linien einen Verlauf, der in beiden graphischen Darstellungen große Übereinstimmung zeigt, obgleich anfänglich bei der graphischen Darstellung für die Kugelsäulen die dreizähligen Kontakte näher an der Ordinaten für die Limitdivergenz liegen.

In der Darstellung II Tafel III findet man die „Verschiebungskurven“ für den Mittelpunkt der Kugel 1 abgebildet. Ihr Maßstab ist derselbe wie die von der graphischen Darstellung I derselben Tafel, welche für die Verschiebungskurven für den Mittelpunkt des Kreises 1, bei den Kreiskonstruktionen gilt. Eine Vergleichung der beiden genannten Darstellungen zeigt einige Abweichungen. Zunächst fehlt hier die Gerade, welche bei der Kreiskonstruktion dem Kontakt 1 und 1 entspricht, oder kann nur theoretische Bedeutung besitzen. Weiter läuft die Kurve, welche dem Kontakte 1 und 2 entspricht, hier in dem Punkte 1, 1 und 2 horizontal. Man kann nämlich mit Hilfe der Differentialrechnung leicht nachweisen, daß diese Kurve ein Maximum zeigt für $\alpha = 180^0$. Im Punkte 1, 2 und 3 kann Punkt 1 sich entweder längs der Kurve 2 und 3 „abwärts“ bewegen, oder längs der Kurve 1 und 3 „aufwärts“, obwohl in beiden Fällen b dabei abnimmt (es zeigt ja in der graphischen Darstellung I Tafel II die Kurve für den Kontakt 1 und 3 keine Steigung links vom Punkte 1, 2 und 3). Diese Betrachtung läßt sich wie folgt verallgemeinen. Geht man von einem Kontakt m und n aus, so kann man durch kontinuierliche Abnahme von b stets in einer Reihe m, n, $m+n$, $m+2n$, $2m+3n$ usw. bleiben, aber auch in eine andere Reihe übergehen. Jedoch muß man im letzten Fall mit Punkt 1 aufwärts steigen, während im ersten Fall

Tabelle X. Zweizählige Kontakte bei zylindrischen Kugelsäulen.

Kontakte	Die Beziehung zwischen b und α:	Die Beziehung zwischen z und α (Verschiebungskurve):	Einzelne merkwürdige Kontaktfälle:
1 u. 2	$b = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\alpha}{3}}$	$z^2 = -\frac{\sin\frac{3}{2}\alpha \sin\frac{\alpha}{2}}{3\pi^2}$	$\alpha = \frac{2}{5}\cdot 360^0 = 144^0$ $\beta = 18^0\,57',5$ $\frac{r}{R} = 1{,}045$ $b = 0{,}333$ $z = 0{,}137$
2 u. 3	$b = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{9\sin^2\alpha - 4\sin\frac{3\alpha}{2}}{5}}$	$z^2 = -\frac{\sin\frac{5}{2}\alpha \sin\frac{\alpha}{2}}{5\pi^2}$	$\alpha = \frac{5}{13}\cdot 360^0 = 138^0\,28'$ $\beta = 9^0\,55'$ $\frac{r}{R} = 0{,}786$ $b = 0{,}250$ $z = 0{,}067$
3 u. 5	$b = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{25\sin^2\frac{3\alpha}{2} - 9\sin\frac{5\alpha}{2}}{16}}$	$z^2 = -\frac{\sin 4\alpha \sin\alpha}{16\pi^2}$	$\alpha = \frac{13}{34}\cdot 360^0 = 137^0\,39'$ $\beta = 4^0\,11'$ $\frac{r}{R} = 0{,}518$ $b = 0{,}165$ $z = 0{,}028$
5 u. 8	$b = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{64\sin^2\frac{5\alpha}{2} - 25\sin^2 4\alpha}{39}}$	$z^2 = -\frac{\sin\frac{13\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}{39\pi^2}$	$\alpha = \frac{34}{89}\cdot 360^0 = 137^0\,31'$ $\beta = 1^0\,40'$ $\frac{r}{R} = 0{,}3298$ $b = 0{,}105$ $z = 0{,}011$

1 u. 3	$b = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{9\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{3\alpha}{2}}{8}}$	$z^2 = -\frac{\sin^2 2\alpha \sin\alpha}{8\pi^2}$	$\alpha = \frac{1}{3}\cdot 360^0 = 120^0$ $\alpha = \frac{2}{7}\cdot 360^0 = 102^0\,51'$ $\beta = 16^0\,18$ $\beta = 14^0\,22'$ $\frac{r}{R} = 0{,}918^5$ $\frac{r}{R} = 0{,}813$ $b = 0{,}292$ $b = 0{,}259$ $z = 0{,}0975$ $z = 0{,}0732$
3 u. 4	$b = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{16\sin^2\frac{3\alpha}{2} - 9\sin^2 2\alpha}{7}}$	$z^2 = -\frac{\sin\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{7\pi^2}$	$\alpha = \frac{3}{11}\cdot 360^0 = 98^0\,11'$ $\beta = 11^0\,31'$ $\frac{r}{R} = 0{,}752$ $b = 0{,}239$ $z = 0{,}0556$
4 u. 7	$b = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{49\sin^2 2\alpha - 16\sin^2\frac{7\alpha}{2}}{33}}$	$z^2 = -\frac{\sin\frac{11\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}{33\pi^2}$	$\alpha = \frac{5}{18}\cdot 360^0 = 100^0$ $\beta = 3^0\,22'$ $\frac{r}{R} = 0{,}399$ $b = 0{,}127$ $z = 0{,}0163$
1 u. 4	$b = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{16\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2 2\alpha}{15}}$	$z^2 = -\frac{\sin\frac{5\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}{15\pi^2}$	$\alpha = \frac{1}{4}\cdot 360^0 = 90^0$ $\beta = 13^0\,5'$ $\frac{r}{R} = 0{,}731$ $b = 0{,}233$ $z = 0{,}058$

dieser Punkt immer abwärts steigt. Wir weisen hierauf hin, weil dieser Umstand ein Unterschied zwischen den Kugelsäulen und den Kreiskonstruktionen bildet, denn bei den letzteren (man siehe die Darstellung I Taf. III) wird bei der Abnahme von b der Punkt 1 sich senken, gleichgültig ob man vom Kontakte 1 und 2 übergeht in den Kontakt 2 und 3 oder in den Kontakt 1 und 3.

Herrscht nun ein vertikaler Druck im Kugelsysteme, wobei die Kugeln als materielle Körper zu denken sind, so ist klar, daß bei der

Tabelle XI.

Dreizählige Kontakte bei zylindrischen Kugelsäulen.

Kontakte	Die Beziehung (36 a):	Werte von α, β, $\frac{r}{R}$, b und z
1, 2 u. 3	$\frac{3}{5} = \frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{5\alpha}{2}}$	$\alpha = 131^0\,48'\,37''$ $\beta = 14^0\,49'\,5''$ $\frac{r}{R} = 0{,}962$ $b = 0{,}3063$ $z = 0{,}0969$
2, 3 u. 5	$\frac{5}{16} = \frac{\sin\frac{5\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin 4\alpha \sin\alpha}$	$\alpha = 141^0\,51',5$ $\beta = 6^0\,8'$ $\frac{r}{R} = 0{,}672$ $b = 0{,}2139$ $z = 0{,}0423$
3, 5 u. 8	$\frac{16}{39} = \frac{\sin 4\alpha \sin\alpha}{\sin\frac{13\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$	$\alpha = 135^0\,57'\,48''$ $\beta = 2^0\,36',5$ $\frac{r}{R} = 0{,}438$ $b = 0{,}1393$ $z = 0{,}0172$
5, 8 u. 13	$\frac{13}{35} = \frac{\sin\frac{13\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{21\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha}{2}}$	$\alpha = 138^0\,8'\,0''$ $\beta = 0^0\,59'\,34''$ $\frac{r}{R} = 0{,}274$ $b = 0{,}0872$ $z = 0{,}00665$
8, 13 u. 21	$\frac{105}{272} = \frac{\sin\frac{21\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha}{2}}{\sin 17\alpha \sin 4\alpha}$	$\alpha = 137^0\,16'$ $\beta = 0^0\,23',5$ $\frac{r}{R} = 0{,}170^5$ $b = 0{,}0543$ $z = 0{,}0026$
1, 3 u. 4	$\frac{8}{7} = \frac{\sin 2\alpha \sin\alpha}{\sin\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$	$\alpha = 97^0\,45'$ $\beta = 12^0\,2'$ $\frac{r}{R} = 0{,}775$ $b = 0{,}2467$ $z = 0{,}0579$
3, 4 u. 7	$\frac{7}{33} = \frac{\sin\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{11\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$	$\alpha = 102^0\,6'\,30''$ $\beta = 4^0\,34'$ $\frac{r}{R} = 0{,}500$ $b = 0{,}1592$ $z = 0{,}0227$

Abnahme von b immer eine Kontaktreihe: m, n, $m+n$, $m+2n$, usw. durchlaufen werden muß. Der Verlauf der Verschiebungskurven macht dies deutlich, so daß wir uns eine Betrachtung der Kräfte ersparen können.

§ 8. Zahlenanwendungen auf dreizählige Systeme. In der zweiten Kolumne der Tabelle XI findet man die Ausdrücke wiedergegeben, in die die Gleichung (36 a) für verschiedene Werte von m und n übergeht, und aus denen der Wert von α für die dreizähligen Kontakte berechnet werden muß. Diese Berechnung kann mit einer einzigen Ausnahme nicht direkt geschehen, da ja die Ausdrücke sich meistens sehr wenig vereinfachen lassen. In diesem Falle ist es also nötig, eine Näherungsmethode anzuwenden, für die in einzelnen Fällen die NEWTONsche gewählt, sonst aber meistens eine graphische angewandt wurde. Bei dieser letzten Methode setzt man:

$$\frac{(n-m)(n+m)}{(2n+m)m} - \frac{\sin\frac{n+m}{2}\alpha \sin\frac{n-m}{2}\alpha}{\sin\frac{2n+m}{2}\alpha \sin\frac{m}{2}\alpha} = F$$

und bestimmt nun den Wert, welchen diese Größe F für verschiedene Annäherungswerte von α annimmt. Durch graphische Interpolation sucht man alsdann denjenigen Wert von α zu bestimmen, bei dem F gleich 0 wird und findet auf diese Weise einen genaueren Näherungswert für die gesuchte Größe und mit diesem kann man nötigenfalls die Näherungsberechnung wiederholen.

Hat man einmal den Wert von α gefunden, so ergibt die Beziehung (34) den zugehörigen von β, die Beziehung (33) den von $\frac{r}{R}$ und Formel (39) den von z.

Man findet das Resultat der Berechnungen in der dritten Kolumne der Tabelle XI. Diese Berechnungen waren selbstverständlich sehr zeitraubend und wurden darum auch auf weitere Fälle nicht ausgedehnt.

Wie wir schon gesagt haben, kann die Berechnung in einem Falle direkt ausgeführt werden und zwar bei dem Kontakt 1, 2 und 3. Sie möge hier folgen, weil die entsprechende Kugelsäule, wie sich herausstellen wird, eine Rolle in der Theorie der Blattstellungen gespielt hat.

Die Divergenz dieser Kugelsäule wird nach dem Vorhergehenden gefunden durch Einsetzen der Werte $m = 1$, $n = 2$, in die Gleichung (36a), also aus der Formel:

$$\frac{3}{5} = \frac{\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{5}{2}\alpha}$$

Diese läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$3\left(\sin\frac{5}{2}\alpha - \sin\frac{3}{2}\alpha\right) = 2\sin\frac{3}{2}\alpha$$

oder:

$$3\cos 2\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$3(2\cos^2\alpha - 1) = 1 + 2\cos\alpha$$

oder endlich:

$$3\cos^2\alpha - \cos\alpha - 2 = 0$$

Hieraus folgt:

$\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ oder $\alpha = 131^0\,48'\,37''$, während $\sin\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ und $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$, sodaß nun die Formel (34) übergeht in:

$$\frac{3}{4}\alpha^2 tg^2\beta = \frac{5}{6} - \frac{5}{9} = \frac{5}{18},$$

es ist also $tg\beta = \frac{1}{9\alpha}\sqrt{30}$ und $\beta = 14^0\,49'\,5''$, während aus Formel (33) folgt:

$$\frac{r}{R} = \frac{3}{5}\sqrt{3} = 0{,}962$$

sodaß $b = 0{,}3063$ ist. Endlich folgt noch aus (39): $z = 0{,}0969$.

Eine Vergleichung der Werte von α und b aus Tabelle XI mit denen aus den Tabellen II und IV zeigt nun sehr überzeugend einen großen Unterschied zwischen den Werten für beide Konstruktionen. Zur näheren Erklärung sind in Tabelle XII die Divergenzen noch einmal wiederholt, die aufeinander folgenden dreizähligen Kontakten der Hauptreihe entsprechen.

Tabelle XII.

Dreizählige Kontakte bei regelmäßigen Kreissystemen auf der Zylinderfläche und bei zylindrischen Kugelsäulen.

Kontakte:	Regelmäßige Kreissysteme auf der Zylinderfläche:	Zylindrische Kugelsäulen:
1, 2 und 3	128° 34′ 37″	131° 48′ 37″
2, 3 „ 5	142° 6′ 14″	141° 51′, 5
3, 5 „ 8	135° 55′ 6″	135° 57′ 48″
5, 8 „ 13	138° 8′ 22″	138° 8′ 0″
Limitwerte	137° 30′ 28″	137° 30′ 28″

Man sieht aus dieser Tabelle, wie anfänglich der Unterschied in den Werten von α mehr als 3° beträgt, daß aber bereits beim Kontakte 5, 8 und 13 dieser Unterschied kleiner als 0,5′ geworden ist. Eine gleiche Annäherung wird man auch bei den Werten von b für dieselben dreizähligen Kontakte bemerken. Dies veranschaulicht die auf Seite 82 bemerkte Tatsache, daß, je mehr b abnimmt, desto geringer der Unterschied zwischen den Punktsystemen der Kugelsäulen und der Kreiskonstruktionen wird.

§ 9. Anfertigung und Beschreibung der geometrischen Konstruktionen. Die Anfertigung der vertikalen und der horizontalen Projektion einer Kugelsäule, von der die Werte von α und β und das Verhältnis $\frac{r}{R}$, sowie der Wert b bekannt ist, kann sehr einfach geschehen. Nimmt man, wie wir dies für unsere Konstruktionen getan haben, den Wert r als konstant, den von R als veränderlich an, so kann man, wenn $\frac{r}{R}$ bekannt ist, unmittelbar die horizontale und vertikale Projektion der Zylinderfläche anfertigen,

auf der sich die Mittelpunkte der Kugeln befinden müssen. Weiter hat man dann von einem Punkte 0 aus, auf den Kreisumfang, der die horizontale Projektion darstellt, eine Reihe Punkte 1, 2, 3, 4 usw. abzutragen, so daß diese Punkte vom Mittelpunkte aus betrachtet einen Winkelabstand α zeigen. Damit ist die horizontale Projektion der Kugelmittelpunkte gefunden. Wenn man nun in der vertikalen Projektion eine Schraubenlinie mit der Steighöhe β anfertigt, und dabei beachtet, daß die vertikalen Projektionen der Kugelmittelpunkte in diese Linie fallen müssen und daß die horizontalen Projektionen bereits bekannt sind, so kann man auch die vertikalen angeben. Beschreibt man nun um diese Punkte Kreise mit dem Radius r, und bedenkt man dabei, wie die Kugeln vor oder hinter einander liegen, so erhält man Figuren, wie auf Tafel IV mehrere dargestellt sind.

In allen Kugelsäulen dieser Tafel ist die Hauptspirale rechts gewunden angenommen.

Die einfachste Kugelsäule mit dreizähligem Kontakt ist die mit dem Kontakt 1, 2 und 3, welche in Fig. 5 abgebildet ist. Läßt man, hiervon ausgehend, b abnehmen, d. h. R zunehmen, so können eine Reihe darauf folgende Kugelsäulen durchlaufen werden. Läßt man R abnehmen, so werden Kontaktfälle mit dem Kontakte 1 und 2 durchlaufen, von denen einer in Fig. 4 abgebildet ist, welcher dem Wert $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$ entspricht. Bei weiterer Abnahme von R wird nun schließlich der Fall erreicht werden, der in Fig. 3 abgebildet ist, und in welchem die Kugeln in zwei vertikalen Reihen aufgestellt sind, die nebeneinander stehen. Eine noch weitere Abnahme von R ist nicht möglich, ohne daß der 2-zählige Kontakt aufgehoben wird. Der Fall aus Fig. 3 schließt also die Kontaktfälle 1 und 2 ab. Bei den Kreiskonstruktionen fanden wir für diesen Fall den Kontakt 1, 1 und 2 und es muß auffallen, daß der Fall aus Fig. 3 mit diesem letzten Kontakte große Übereinstimmung zeigt. In unserer graphischen Darstellung ist der Punkt, der diesem Kontakte entspricht, auch bezeichnet als Kontakt 1, 1 und 2, was sich durch die Annahme verteidigen ließe, daß der 1-zählige Kontakt hier doppelt gezählt werden kann.

Es ist ferner hier zu beachten, daß, wenn man R noch kleiner nimmt als in Fig. 3, zwar der zweizählige Kontakt aufgehoben wird, aber der einzählige Kontakt, der nun auftritt, bei einem gegebenen Wert von b ganz bestimmt ist, während dies bei einzähligen Kontakten, bei denen R größer ist, als in Fig. 3, nicht der Fall ist. Für die kleinen Werte von R können ja allein Kontaktfälle mit der Divergenz 180^0 konstruiert werden. Hierfür ist Fig. 2 ein Beispiel, wobei $r = 2R$ und also $b = \frac{2}{\pi} = 0{,}6366$ angenommen ist. Berücksichtigt man diese einzähligen Kontaktfälle, so muß man Fig. 1, d. i. eine Säule, die aus einer Reihe tangierender Kugeln besteht, als Ausgangspunkt aller Kugelsäulen annehmen; wir werden sogleich noch ein Argument anführen, das dafür spricht. Betrachtet man aber ausschließlich zwei- und dreizählige Kontakte, so ist Fig. 3 der Ausgangspunkt dafür.

Die Figuren 4 bis 11 stellen zwei- und dreizählige Kontakte aus der Hauptreihe dar, und zwar ist in jeder folgenden Figur der

Wert von b kleiner, der von R also größer als in der vorhergehenden. Von ihnen sind die Figuren 5, 7, 9 und 11 dreizählige Kontakte aus der Hauptreihe, für welche die nötigen Angaben in Tabelle XI zu finden sind, während die Figuren 4, 6, 8 und 10 Kontaktfälle darstellen mit den zweizähligen Kontakten 1 und 2, 2 und 3, 3 und 5, 5 und 8 und mit den Divergenzen:

$$\alpha = \frac{2}{5}\cdot 360^0;\ \frac{5}{13}\cdot 360^0;\ \frac{13}{34}\cdot 360^0;\ \frac{34}{89}\cdot 360^0$$

(man siehe die letzte Kolumne der Tabelle X).

Diese Konstruktionen stellen hier keine Kontaktfälle mit rechtwinkligem Schnitt der Kontaktspiralen dar, wie z. B. die Fig. 2, 4, 6, 8, 10 auf Tafel I. Es schien uns nicht wichtig genug, solche Fälle hier besonders zu berechnen, es wurden die soeben genannten Divergenzen ausgewählt, weil sie in der Natur angenähert vorkommen.

In Fig. 12 findet man die Kugelsäule abgebildet, die mit dem Kontakt 1 und 3 die Divergenz $\alpha = 120^0$ besitzt. Die Kugelsäule aus Figur 5 mit dem Kontakt 1, 2 und 3 kann also durch Abnahme von b, d. h. durch Zunahme von R, sowohl in die Kugelsäule aus Fig. 6 als in die von Figur 12 übergehen.

In Fig. 13 ist eine Kugelsäule mit dem Kontakt 1 und 3 und der Divergenz $\alpha = \frac{2}{7}\cdot 360^0 = 102^0\,51'$ dargestellt. Während in Fig. 5 die dreizeilige Spirale rechtsgewunden war, und diese Spirale in Fig. 12 vertikal verläuft, ist sie in dieser Figur linksgewunden, ganz übereinstimmend mit den Betrachtungen, die wir früher hierüber gaben. In Fig. 14 ist eine Kugelsäule mit dem Kontakt 1, 3 und 4 konstruiert, während in Fig. 15 der sehr nahe dabeistehende Kontakt 3 und 4 mit der Divergenz $\frac{3}{11}\cdot 360^0 = 98^0\ 11'$ dargestellt ist. Endlich ist in Fig. 16 die Kugelsäule mit dreizähligem Kontakt 3, 4 und 7 abgebildet.

In allen Figuren ist die Anzahl Kontaktspiralen sehr leicht abzulesen, vor allem, wenn man dabei sowohl die vertikale als die horizontale Projektion in Betracht zieht.

Um uns eine Anschauung zu verschaffen von der interessanten Raumfigur, die man erhält, wenn man die Kugelsäulen aus wirklichen Kugeln aufbaut, wurden zwei Holzmodelle angefertigt, eines für eine Kugelsäule mit dem Kontakt 1, 2 und 3 und eines für eine solche mit dem Kontakte 2, 3 und 5. Die photographische Wiedergabe dieser beiden Säulen findet man auf Tafel V in Fig. 2 und Fig. 3.

Wir wollen nun noch darauf hinweisen, wie man sich vorstellen kann, daß die auf Tafel IV abgebildeten Figuren auseinander entstehen können. Man denke sich um die Säule von Fig. 1 einen Zylinder von elastischem Material angebracht, der bei der Ausdehnung stets rein zylindrisch bleibt und stelle sich nun die Kugelsäule in vertikale Richtung zusammengedrückt vor. Durch die geringste Gleichgewichtsstörung wird dann dieser Kontaktfall sich ändern in den von Fig. 2 und dieser wieder in den von Fig. 3; dieser letztere wird ebenso bei geringer Gleichgewichtsstörung über-

gehen in Fig. 4, die sich wieder in Fig. 5 ändern wird. Bei noch weiterer vertikaler Zusammendrückung wird nun notwendigerweise Fig. 6 entstehen und weiterhin alle Kontaktfälle aus der Hauptreihe.

Hätte man Fig. 12 als Ausgangspunkt gewählt, so hätte bei geringer Gleichgewichtsstörung und Zusammendrückung auch die erste Nebenreihe entstehen können.

Nach dieser Betrachtungsweise kann also Fig. 1 als Ausgangspunkt für alle Kugelsäulen angesehen werden.

§ 10. Der Hohlkern der Kugelsäule und die beiden Zylinderflächen der Berührungspunkte. Bei einer Vergleichung der Figuren auf Tafel IV bemerkt man, wie diese Figuren von Fig. 5 ab einen hohlen Kern zeigen, und wie dieser Kern mit der Abnahme von b stets größer wird. Man sieht sofort ein, daß der Radius dieses Kernes durch $R - r = R\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ gegeben wird. Der Kern wird also sichtbar werden, sobald $\frac{r}{R}$ kleiner als 1 ist. Man kann nun aus den Tabellen X und XI ablesen, daß bei dem Kontakt 1 und 2 für $\alpha = \frac{2}{5}$ dieser Wert $\frac{r}{R}$ noch größer als 1 ist, indem er bei dem Kontakt 1, 2 und 3 ($\alpha = 131^0\,48'\,37''$) kleiner als 1 ist. Die Kugelsäule mit dem Kontakt 1, 2 und 3 hat also einen hohlen Kern, von dessen Vorhandensein man sich überzeugen kann, wenn man eine solche Säule von materiellen Kugeln z. B. von 2 cm Durchmesser aufbaut. Man kann dann in den Hohlkern der Säule eine dicke Stecknadel hineinstecken. In der obenerwähnten photographischen Abbildung ist dies wahrzunehmen. Alle Säulen, bei denen b noch kleiner ist als bei dieser Kugelsäule, werden auch einen hohlen Kern zeigen müssen. Die photographische Abbildung der Kugelsäule mit dem Kontakt 2, 3 und 5 läßt erkennen, wie für diese Säule der Hohlkern bereits einen beträchtlichen Durchmesser erreicht hat.

Man kann nachweisen, daß die gegenseitigen Berührungspunkte der Kugeln auf zwei Zylinderflächen liegen, welche dieselbe Achse haben wie diejenige, auf der das Punktsystem konstruiert worden ist. Um dies zu zeigen, weisen wir darauf hin, daß in Fig. 18 S. 78 der Berührungspunkt der Kugel o mit Kugel m sich in der Mitte von AP befindet und daß der Abstand von der Achse bis zu diesem Berührungspunkt gleich dem Abstande von M bis AC gesetzt werden kann und also gegeben wird durch:

$$R_1 = R\cos\frac{\delta_m}{2} = R\cos\frac{m\alpha}{2}$$

In demselben Abstand liegen alle Berührungspunkte, die auf den m-zeiligen Kontaktspiralen vorkommen; diese Punkte liegen also auf einer Zylinderfläche mit dem Radius R_1. Ebenso findet man, daß die Berührungspunkte, auf den n-zeiligen Spiralen, auf einer Zylinderfläche mit dem Radius liegen:

$$R_2 = R\cos\frac{n\alpha}{2}.$$

R_1 sowohl als R_2 sind kleiner als R, sie nähern sich einander und dem Werte R, je größer m und n werden. Da $n > m$ ist, so wird

$R_1 < R_2$ sein, also stellt die Zylinderfläche mit dem Radius R_1 die innerste Zylinderfläche der Berührungspunkte dar.

Denkt man sich in den Kugelsäulen diese innerste Zylinderfläche angebracht und die innen dadurch abgeschnittenen Kugelstücke fortgenommen, dann kann dadurch die Lage der Kugeln nicht geändert werden.

§ 11. Historische Bedeutung der Kugelsäulen für die Theorie der Blattstellungen. Welche Rolle die zylindrischen Kugelsäulen in der Theorie der Blattstellungen gespielt haben, möge durch einige Zitate hier erläutert werden.

In einer Abhandlung von AIRY[1]) aus dem Jahre 1873 heißt es:

„Take a number of spheres (say oak-galls) to represent embryo-leaves, and attach them in two rows in alternate order ($^1/_2$) along opposite sides of a stretched india-rubber band. Give the band a slight twist to determine the direction of twist in the subsequent contraction and then relax tension. The two rows of spheres will roll up with a strong twist into a tight complex order, which if the spheres are attached in close contact with the axes will be nearly the order $^1/_3$, with three steep spirals. If the spheres are set a little away from the axis the order becomes condensed into (nearly) $^2/_5$ with great precision and stability. And it appears, that further contraction with increased distance of the spheres from the axis, will necessairly produce the orders (nearly) $\frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}$ etc. in succesion, and that these succesive orders represent succesive maxima of stability in the process of change from the simple to the complex."

Wir zitieren noch aus einer zweiten Abhandlung dieses Forschers[2]) folgende interessante Angabe:

„By other diagrams it is shown, that the same process of condensation operating on the orders represented by the lower fractions of series B $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{11}\text{ etc.}\right)$ will produce the higher orders of that series. The same is shown for the series C $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}\text{ etc.}\right)$."

Man wird hieraus gesehen haben, daß AIRY mit Hilfe einer sehr einfachen Vorrichtung eine Einsicht bekommen hatte in die Eigenschaften einiger Kugelsäulen. Es stellen ja, wie sich durch Wiederholung seiner Versuche unmittelbar ergibt, die Kugelsäulen, deren Divergenz er als „nearly $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}$ etc." angibt, solche dar, welche die Kontakte 1, 2 und 3; 2, 3 und 5; 3, 5 und 8 usw. besitzen. Hier wollen wir übrigens keine kritische Betrachtungen anstellen über die Folgerungen, welche AIRY aus seinen Experimenten zog, und nur auf diese selbst hinweisen.

Die Theorie von AIRY hat wenig Beachtung gefunden; viel mehr ist das der Fall mit derjenigen, welche von DELPINO in seiner

1) On leaf-arrangement. Nature 1873, p. 343 und: Proceedings Royal Society 1873, p. 176.

2) On leaf-arrangement. Proc. Royal Society, 1874, p. 298.

Schrift: „Teoria generale della Fillotassi“[1]), im Jahre 1883 entwickelt wurde. Aus diesem Werke zitieren wir das Folgende (man siehe p. 126):

„Infatti procurata una trentina di sferette d'egual diametro, si dispongano tra loro contigue, a mode triangolo, tre sferette A, B, C; e si fissi questa loro posizione incallandole per esempio con ceralacca. Nel seno da essa formato si collochi e medesimamente si agglutini une quarta sferetta D. Con pari ragione le sferette B, C, D formeranno all'esterno un seno in cui si adagii e si agglutini una quinta sferetta E. E cosi via discorrendo fino a tanto che si hanno sferette, se ne incolli una nel seno fatte dalle tre sferette precedentemente desposte.

Si riesce così alla construzione d'un corpo regolarissimo cilindroide, ove le sferette veggonsi disposte presso a poco come le foglie nella fillotassi quincunciale.

Col simplice sperimento di guesta pila sferotassica noi consideriamo risoluto il problema meccanico fondamentale della fillotassi.“

Man wird bemerkt haben, daß die pila sferotassica von DELPINO nichts anderes darstellt als die Kugelsäule mit dem Kontakte 1, 2 und 3, welche in Fig. 5 Tafel IV und Fig. 2 Tafel V abgebildet ist. Die Resultate der Berechnung, welche Dr. DE MEMME auf Veranlassung von DELPINO bei dieser Kugelsäule ausführte, aber nicht näher beschrieb, stimmen mit den von uns angegebenen Werten für diese Kugelsäule überein.

Aus dem Gesagten folgt, daß die Kugelsäule von DELPINO schon im Jahre 1873 AIRY bekannt war, ja daß dieser Forscher eine große Anzahl anderer Kugelsäulen angefertigt hatte, welche DELPINO unbekannt blieben. Übrigens liegt es wieder außerhalb des Rahmens dieser Arbeit, eine Kritik der DELPINOschen Arbeit zu geben. Nur möge hier auf einen wichtigen Fehler in seiner Schrift, die übrigens des Studiums sehr wert bleibt, hingewiesen werden, weil ein bedeutender Teil der theoretischen Betrachtungen auf dieser falschen Annahme basiert ist.

Auf Seite 159 findet man folgenden Ausspruch: „Nella pila anzidetta no vi ha luogo, non vi ha interstizio, ove collocare un organo assile qualsiasi.“ Dieser Schluß, daß die Kugelsäule mit dem Kontakte 1, 2 und 3 keinen Hohlkern besitze, ist, wie wir sahen, bestimmt falsch; ein Blick auf die photographische Wiedergabe auf Tafel V wird hiervon gleich überzeugen[2]).

Endlich möge hier eine Bemerkung SCHWENDENERS[3]) erwähnt werden:

„Ich habe übrigens seitdem einen aus Kugeln bestehenden Apparat konstruiert, welcher die Form zylindrischer Organkomplexe besitzt und die in Rede stehenden Verschiebungen innerhalb gewisser Grenzen naturgetreu darzustellen gestattet.“

---

1) Genova 1883.

2) Man kann sogar denjenigen Teil der Kugeln wegschneiden, welcher innerhalb der Kreiszylinderfläche mit dem Radius R_1 liegt (R_1 ist hier gleich 0,4082 R), ohne daß dadurch die Lage der Kugeln geändert wird.

3) Zur Theorie der Blattstellungen. Sitzungsberichte der königl. Preuß. Akad. d. Wissensch. Berlin, Jahrg. 1883, S. 760.

Auch an anderer Stelle[1]) wird auf diesen Apparat kurz hingewiesen.

Es sind also auch SCHWENDENER bestimmte Kugelsäulen bekannt gewesen.

Aus dem Obenstehenden geht hervor, daß den Kugelsäulen schon längere Zeit eine Bedeutung für die Theorie der Blattstellungen zugeschrieben wurde. Keiner der genannten Autoren hat die Verwandtschaft bemerkt, welche zwischen ihren Betrachtungen besteht. Dieser Umstand war eine der Ursachen, welche mich veranlaßt haben, die Theorie der zylindrischen Kugelsäulen hier ausführlicher zu besprechen als für meine weiteren Betrachtungen notwendig gewesen wäre.

---

1) Die jüngsten Entwickelungsstadien seitlicher Organe und ihr Anschluß an bereits vorhandene. Sitzungsberichte der königl. Preuß. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 1895, S. 659.

Zweiter Abschnitt.

Einfache Systeme auf einer Ebene.

Kapitel I. Ähnliche Punktsysteme auf einer Ebene.

§ 1. Definition. Unter einem „ähnlichen Punktsystem auf einer Ebene“ werden wir ein solches verstehen, welches die Eigenschaft besitzt, stets ähnliche Figuren entstehen zu lassen, wenn man nacheinander jeden einzelnen Punkt durch gerade Linien mit allen anderen Punkten verbindet.

Hierbei kann man, ebenso wie bei den „regelmäßigen Punktsystemen“ auf der Kreiszylinderfläche, je nach der Lage der entstehenden Figuren, zwei Fälle unterscheiden:

1. Die ähnlichen Figuren, die man durch Verbindung der einzelnen Punkte mit allen anderen erhält, kann man alle durch eine Vergrößerung oder Verkleinerung, welche mit einer Drehung auf der Ebene verbunden wird, so dirigieren, daß sie einander decken.

2. Die ähnlichen Figuren sind zwar durch Vergrößerung oder Verkleinerung wohl zu kongruenten Figuren zu machen, doch kann man diese durch eine Drehung auf der Ebene nicht alle wie im Fall 1 zur Deckung bringen, weil unter ihnen Spiegelbilder vorkommen.

Wir werden hier nur die unter 1 genannten näher betrachten.

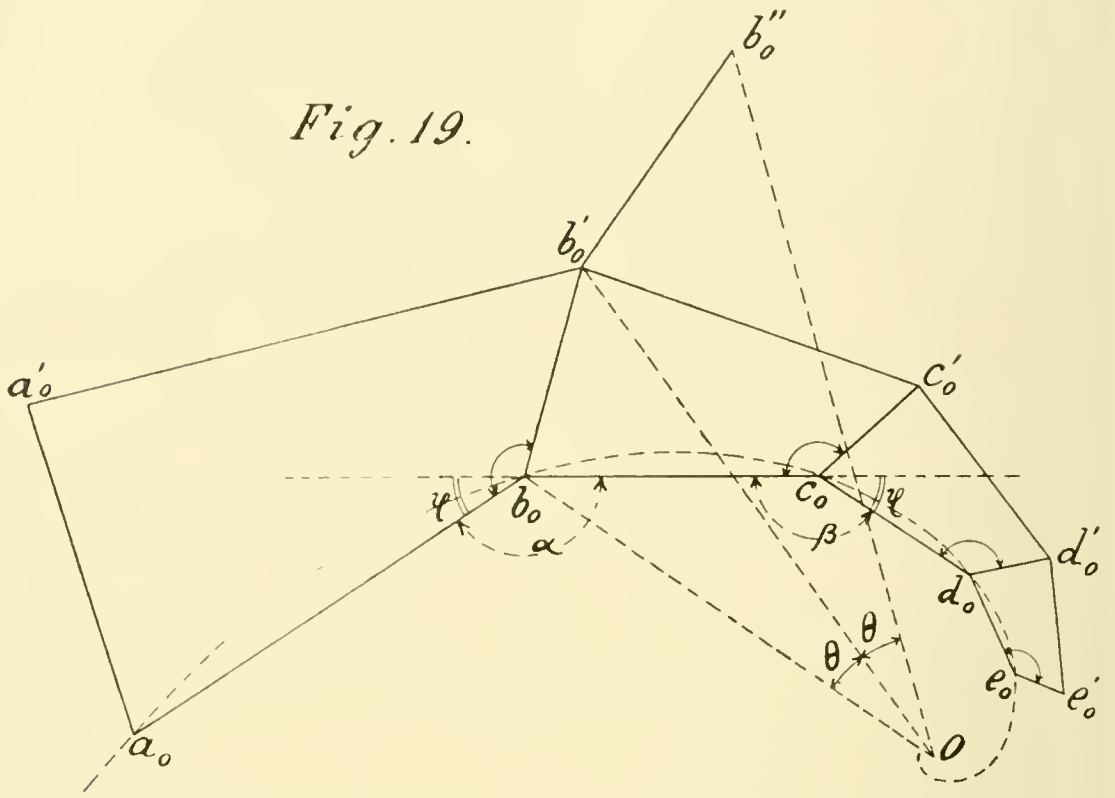
§ 2. Haupteigenschaften. Man denke sich auf einer Ebene ein solches „ähnliches Punktsystem“ angegeben und diese Ebene mit einer zweiten überdeckt, auf welcher man dieselben Punkte markiert. Man nehme nun an, daß die erste Ebene mit ihrer Zeichnung fest steht, daß aber die zweite auf der ersten beweglich sei, und daß man außerdem imstande sei, die Zeichnung auf der beweglichen Ebene nach Willkür zu vergrößern oder zu verkleinern [1]).

Angenommen, b_o und c_o seien zwei Punkte der festen Ebene; um beide Punkte denke man sich alsdann die ähnlichen Strahlenbüschel gezeichnet. Die entsprechenden Punkte der beweglichen

1) Wir werden im Folgenden eine Verkleinerung als eine Vergrößerung betrachten, welche mit einem Betrag kleiner als 1 vorgenommen wird, sodaß wir also unter dem Begriff „Vergrößerung“ nicht nur eine tatsächliche Ausdehnung, sondern auch unter Umständen eine Verkleinerung zu verstehen haben.

Ebene seien b und c genannt. Nun stelle man sich vor, daß die bewegliche Ebene durch eine parallele Verschiebung in der Weise in ihrer Lage verändert wird, daß Punkt c auf b_o fällt. Wenn wir

Fig. 19.



jetzt die Zeichnung auf der beweglichen Ebene derart vergrößern, daß c dabei auf seinem Platz bleibt und der Strahlenbüschel um c dem Strahlenbüschel um b_o kongruent wird, so muß alsdann eine Drehung des Strahlenbüschels um den Punkt c genügen, um die Zeichnung auf der beweglichen Ebene mit der auf der festen zusammenfallen zu lassen.

Legen wir uns nun die Frage vor, was bei diesem Vorgang mit dem Strahl $c\,b$ des beweglichen Büschels geschehen ist. Derselbe ist zuerst parallel verschoben, danach vergrößert und hierauf um einen gewissen Winkel um den Punkt b_o gedreht worden.

Punkt b möge nun bei dieser Deckbewegung auf einen gewissen Punkt a_o gefallen sein; dann muß a_o notwendigerweise ein Punkt des festen Systems sein. Alle Strahlen des beweglichen Punktsystems müssen alsdann eine Vergrößerung erfahren haben, welche durch den Quotienten $\frac{a_o\,b_o}{b_o\,c_o}$ angegeben wird; außerdem sind sie einer Drehung um einen Winkel φ unterworfen worden (siehe Fig. 19).

Auf den Punkt c_o ist bei der Deckbewegung ebenfalls ein Punkt der beweglichen Ebene gefallen, welcher d heißen möge. Dann wird man denjenigen Punkt d_o auf der festen Ebene, der ursprünglich mit diesem Punkt d zusammenfiel, auf folgende Weise finden können: Man denke sich das bewegliche System wieder parallel zurückgeschoben von b_o nach c_o und darauf das System vergrößert um einen Betrag $\frac{b_o\,c_o}{a_o\,b_o}$, der das Reziproke desjenigen bei der vorigen Deckbewegung ist. Hiernach werden die Strahlen-

büschel auf der festen und auf der beweglichen Ebene wieder kongruent und durch eine Drehung um c_o zur Deckung zu bringen sein. Diese Drehung muß mit demselben Winkel φ ausgeführt werden und zwar in entgegengesetzter Richtung als bei der vorigen Deckbewegung.

Der Punkt d_o muß also derart liegen, daß:

$$\frac{c_o\, d_o}{c_o\, b_o} = \frac{c_o\, b_o}{a_o\, b_o},$$

ist, während außerdem $\angle\, \alpha = \angle\, \beta$ sein muß.

Im allgemeinen kann man also sagen, daß, wenn b_o und c_o zwei Punkte des Systems sind, noch zwei andere Punkte a_o und d_o zu finden sein müssen, die so gelegen sind, daß

$$\frac{a_o\, b_o}{c_o\, b_o} = \frac{c_o\, b_o}{c_o\, d_o}$$

und daß der Winkel zwischen $a_o\, b_o$ und $b_o\, c_o$ gleich ist dem Winkel zwischen $b_o\, c_o$ und $c_o\, d_o$.

Aber auch bei den Punken c_o und d_o muß man zwei Punkte b_o und e_o finden können, die entsprechend liegen, ebenso bei den Punkten d_o und e_o zwei Punkte c_o und f_o. Diese Schlüsse sind bis ins Unendliche fortzusetzen.

Nun ergibt sich unmittelbar aus den Eigenschaften der logarithmischen Spirale, daß dann die Punktserie a_o, b_o, c_o, d_o, e_o usw. auf einer und derselben logarithmischen Spirale liegt.

Weil die Punkte a_o und b_o beliebig gewählt wurden, kann man durch je zwei Punkte des Punktsystems eine solche Spirale ziehen, auf der eine Reihe Punkte angetroffen werden muß. Hiermit ist also die wichtige Eigenschaft erwiesen, daß in einem ähnlichen Punktsystem unendlich lange Punktreihen auf logarithmischen Spiralen gelegen sind.

Es besteht die Möglichkeit, daß die oben betrachtete Spirale, welche die Punkte a_o, b_o, c_o, d_o, e_o usw. enthält, alle Punkte des Systems in sich schließt, jedoch wird das im allgemeinen nicht der Fall sein. Nehmen wir an, b_o' (siehe Fig. 19) sei ein solcher Punkt des Systems, der nicht in der Spirale liegt. Man denke sich nun wieder den Punkt b des beweglichen Systems von b_o nach c_o übertragen und darauf das bewegliche System so aufgestellt, daß es das feste deckt. Hierfür ist, wie wir gesehen haben, eine Drehung um einen Winkel φ um den Punkt c_o nötig, sowie eine Vergrößerung $\frac{b_o\, c_o}{b_o\, a_o}$.

Der Punkt b' des beweglichen Systems, der ursprünglich mit b_o' des festen zusammenfiel, muß nun bei der Deckbewegung auf einen neuen Punkt c_o' des festen gekommen sein. Wenn also irgend ein Punkt b_o' außerhalb der genannten Spirale liegt, so muß auch ein Punkt c_o' nachzuweisen sein, welcher ebenfalls außerhalb der Spirale liegt und zwar, wie man gleich einsieht so, daß $\frac{c_o\, c_o'}{b_o\, b_o'} = \frac{b_o\, c_o}{a_o\, b_o}$ und daß der Winkel, den $c_o'\, c_o$ mit $c_o\, b_o$ einschließt, gleich ist dem Winkel, welchen $b_o'\, b_o$ mit $b_o\, a_o$ bildet.

In völlig gleicher Weise schließt man weiter, daß noch ein Punkt d_o' zu finden sein muß, welcher zu d_o so gelegen ist, wie c_o' zu c_o. Diese Schlußweise läßt sich wieder beliebig fortsetzen.

Man kann also folgende Regel aufstellen: Befindet sich außerhalb einer Punktreihe, die auf derselben logarithmischen Spirale gelegen ist, noch ein anderer Punkt b_o' in dem System, dann findet man eine unendliche Reihe anderer Punkte desselben auf diese Weise: Man verbindet den Punkt b_o' mit einem beliebigen Systempunkt b_o der logarithmischen Spirale. Diese Verbindungslinie bildet einen gewissen Winkel mit der Linie, die den beliebigen Punkt b_o der Spirale mit dem folgenden auf derselben a_o verbindet. Man zieht nun von allen Punkten auf der Spirale c_o, d_o, e_o, usw. Linien, die denselben Winkel bilden mit der Verbindungslinie dieser Punkte und der betreffenden folgenden, also mit $c_o\, b_o$, $d_o\, c_o$, $e_o\, d_o$, usw. Auf den von den Punkten der Spirale aus gezogenen Linien trägt man Stücke $c_o\, c_o'$, $d\, d_o'$, $e\, e_o$, usw. ab, die dasselbe Verhältnis zu einander haben wie die Verbindungslinien der betreffenden Punkte auf der logarithmischen Spirale.

Man kann leicht beweisen, daß diese neue Punktreihe auf einer logarithmischen Spirale liegen muß, die mit der ersten kongruent ist und mit ihr das Zentrum O gemeinsam hat. Wenn man die erste logarithmische Spirale sich um einen gewissen Winkel θ um den Pol O drehen läßt, so fällt sie mit der zweiten zusammen. (Die Punkte des Punktsystems auf beiden Spiralen decken sich jedoch im allgemeinen alsdann nicht.)

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich weiter, daß, wenn ein Punkt b_o' außerhalb der ersten angegebenen Spirale liegt, im allgemeinen noch ein zweiter Punkt b_o'' außerhalb derselben und außerhalb der Spirale durch b_o' liegen muß (siehe Fig. 19). Auf ganz gleiche Weise wie oben für die zweite Spirale schließt man dann weiter, daß durch b_o'' eine dritte Spirale gehen muß, worauf eine Punktreihe des Systems liegt. Diese Spirale muß den beiden vorhergehenden wieder kongruent sein; man konstruiert sie, indem man die zweite Spirale um den genannten Winkel θ um das Zentrum O dreht.

Ohne weiteres ist einzusehen, daß auf diese Weise noch eine vierte, fünfte Spirale usw. zu finden ist, wenn man wenigstens nicht in den konstruierten Spiralen bereits alle Punkte des Systems aufgenommen hat.

Durch jeden Punkt eines ähnlichen Punktsystems muß also nach dem Vorhergehenden eine logarithmische Spirale zu konstruieren sein, welche kongruent ist mit der zuerst gefundenen, denselben Zentrum besitzt und auf welcher eine unendliche Reihe von Punkten des Systems gelegen ist. Hieraus läßt sich schließen, daß man zwei solche Spiralen nachweisen kann, zwischen denen kein einziger Punkt des Systems liegt; denn sobald dazwischen noch ein Punkt läge, so würde man dadurch wieder eine kongruente Spirale ziehen können. Nehmen wir nun an, daß die oben als erste und zweite Spirale bezeichneten Kurven zwei solche Spiralen sind, zwischen denen sich kein einziger Punkt des Systems befindet, dann muß θ ohne Rest in 360^0 enthalten sein, also durch $\frac{360^0}{m}$ dargestellt werden können, worin m eine ganze Zahl ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde man, wenn man eine der beiden Spiralen genügend oft um einen Winkel θ bewegen und

jedesmal eine neue Punktreihe passieren ließe, schließlich auch zwischen den beiden ersten Spiralen eine Punktreihe finden müssen, was mit der Voraussetzung in Widerspruch steht.

Hieraus folgt, daß alle Punkte des Systems auf m parallelen Spiralen mit demselben Zentrum zu ordnen sein müssen, welche alle so liegen, daß man durch Drehung irgend einer Spirale um einen Winkel θ um das gemeinschaftliche Zentrum diese Kurve mit der folgenden Spirale zur Deckung bringt.

Eine solche Serie logarithmischer Spiralen werden wir eine Spiralenschar nennen.

Wir machen ferner darauf aufmerksam, daß man sehr leicht beweisen kann, daß auch die Punkte b_o, b_o', b_o'' usw. alle auf einer logarithmischen Spirale liegen, die nicht mit den Spiralen der eben besprochenen Schar kongruent ist, aber mit diesen wohl das Zentrum gemeinsam hat. Durch die Punkte c_o, c_o', c_o'' usw. läuft eine Spirale, die mit der durch b_o, b_o', b_o'' usw. kongruent ist und ebenfalls dasselbe Zentrum besitzt. Sind diese beiden Spiralen solche, zwischen welchen sich kein einziger Punkt des Systems befindet, so sieht man leicht ein, daß es auch eine ganze Anzahl, z. B. n, solcher Spiralen geben muß, die zu einander so liegen, daß nach Drehung um einen Winkel von $\frac{360^0}{n}$ eine Spirale die folgende deckt. Sie bilden also wieder eine Spiralenschar. Die Schnittpunkte der Spiralen dieser Schar mit den der vorigen fallen alle mit Punkten des Systems zusammen, andere Punkte sind darin nicht vorhanden.

Man kann also jedes ähnliche Punktsystem auf einer Ebene als das System der Schnittpunkte von zwei logarithmischen Spiralscharen betrachten, die dasselbe Zentrum besitzen.

§ 3. Die logarithmische Spirale. Da diese Kurve in den nachfolgenden Betrachtungen wiederholt zur Sprache kommen wird und in den elementaren Lehrbüchern der Geometrie meist nur kurz besprochen wird, so wollen wir hier auf ihre Haupteigenschaften etwas näher eingehen.

1. Die logarithmische Spirale, deren Zentrum zusammenfällt mit dem Ursprung des Koordinatsystems, wird dargestellt durch die Formel $\varrho = Ce^{q\varphi}$, worin ϱ der Radius vector ist und φ der Winkel, welchen dieser Leitstrahl mit der Achse X bildet. Dieser Winkel wird von der Achse nach dem Leitstrahl zu in einer Richtung gemessen, die dem Lauf des Uhrzeigers entgegengesetzt ist.

2. Nimmt man auf einer solchen logarithmischen Spirale zwei Punkte, deren Leitstrahlen einen Winkel φ einschließen, so ist das Verhältnis dieser Radii vectores $e^{q\varphi}$. Umgekehrt läßt sich aus dem Verhältnis $e^{q\varphi}$ zweier Radien auf den von ihnen gebildeten Winkel φ schließen. Zieht man eine Reihe von Leitstrahlen, die den gleichen Winkel miteinander bilden, so werden die Längen dieser Radien eine geometrische Reihe bilden.

3. Die logarithmische Spirale läuft unendlich oft um das Zentrum, erreicht dieses jedoch niemals; dieses Zentrum stellt nämlich den asymptotischen Punkt der Kurve dar.

4. Ein und derselbe Leitstrahl schneidet die Spirale unendlich oft; die Abstände vom Zentrum nach den Schnittpunkten bilden eine geometrische Reihe.

5. Wir nennen eine logarithmische Spirale rechtsgewunden, wenn der Leitstrahl, den man nach einem Punkte zieht, welcher auf der Spirale von innen nach außen läuft, sich in dem Sinne des Uhrzeigers bewegt. Bewegt sich aber der Leitstrahl dabei in der entgegengesetzten Richtung wie die Uhrzeiger, so nennen wir die Spirale linksgewunden. Die Spirale in Fig. 20 ist also rechtsgewunden.

6. Die Formel $\varrho = Ce^{q\varphi}$ wird einer linksgewundenen Spirale entsprechen, wenn q positiv ist, einer rechtsgewundenen, wenn q negativ ist.

7. Der Winkel, welchen der verlängerte Leitstrahl nach einem Punkte der Spirale mit der Tangente in diesem Punkte bildet, ist für alle Punkte der Spirale derselbe. Bezeichnet man diesen Winkel mit μ, dann ist $tg\,\mu = \frac{1}{q}$, vorausgesetzt, daß man μ von dem verlängerten Leitstrahl aus nach der Tangente in einer Richtung rechnet, welche der des Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Man spricht in diesem Falle von einer logarithmischen Spirale unter dem Winkel μ.

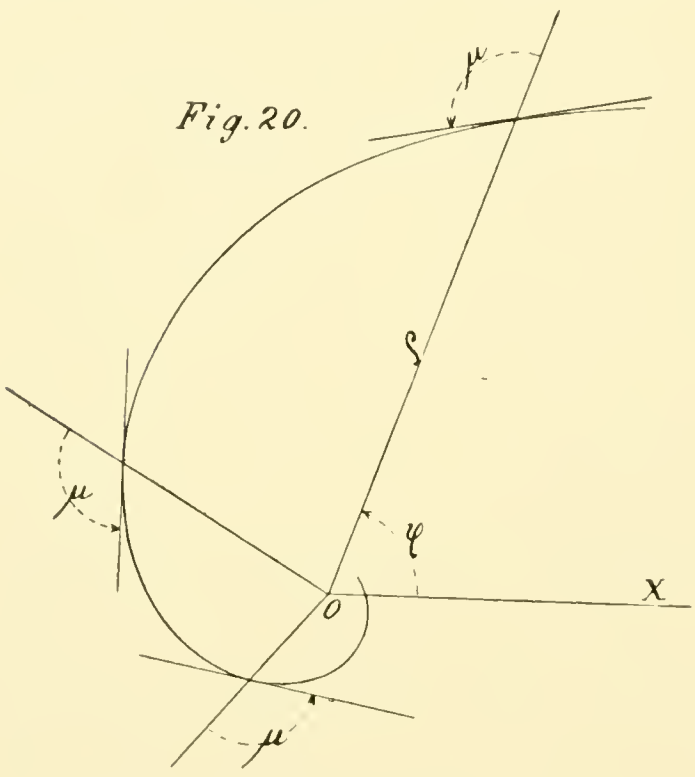


Fig. 20.

Für eine linksgewundene Spirale ist μ spitz, für eine rechtsgewundene stumpf.

8. Sieht man von der Richtung der Spirale ab, dann kann man unter der „Neigung" der logarithmischen Spirale den „spitzen" Winkel verstehen, der sich zwischen dem verlängerten Leitstrahl und der Tangente befindet. Die Neigung wird also gefunden, indem man den absoluten Wert von q bei der Berechnung von μ in der Formel: $tg\,\mu = \frac{1}{q}$ benutzt.

9. Logarithmische Spiralen unter demselben Winkel sind kongruent. Besitzen sie ein und dasselbe Zentrum, dann schneiden sie einander niemals und man nennt sie dann parallele logarithmische Spiralen.

10. Durch Vergrößerung oder Verkleinerung einer logarithmischen Spirale erhält man stets eine kongruente Spirale.

11. Zwei nicht kongruente logarithmische Spiralen mit ein und demselben Zentrum schneiden einander unendlich oft. Die Leitstrahlen nach den Schnittpunkten bilden eine geometrische Reihe; die Winkel, welche die aufeinander folgenden Leitstrahlen miteinander bilden, sind gleich. Die Schnittpunkte liegen also wieder auf einer logarithmischen Spirale.

12. Durch einen Punkt läßt sich nur eine logarithmische Spirale unter einem gegebenen Winkel konstruieren, die ein gegebenes Zentrum besitzt.

13. Durch zwei Punkte kann man unendlich viele logarithmische Spiralen mit einem gegebenen Zentrum konstruieren.

Wenn wir weiterhin von der Spirale mit einem gegebenen Zentrum durch zwei Punkte sprechen werden, so wird stets die „steilste" Spirale gemeint sein.

Hierzu sei das Folgende erklärend bemerkt:

Sind die gegebenen Punkte in Polar-Koordinaten mit ϱ_1, φ_1 und ϱ_2, φ_2 bezeichnet, dann können diese ebensogut aufgefaßt werden als Punkte ϱ_1, $\varphi_1 \pm 2s\pi$ und $\varrho_2, \varphi_2 \pm 2t\pi$, worin s und t gleich 0, 1, 2, 3, 4, 5 usw. sind.

Ist nun die Formel der Spirale: $\varrho = Ce^{q\varphi}$, so muß:

$$\varrho_1 = Ce^{q(\varphi_1 \pm 2s\pi)} \text{ und } \varrho_2 = Ce^{q(\varphi_2 \pm 2t\pi)}$$

sein, woraus sich ergibt:

$$q = \frac{\lg \varrho_1 - \lg \varrho_2}{\varphi_1 - \varphi_2 \pm (s-t)\cdot 2\pi} = \frac{\lg \varrho_1 - \lg \varrho_2}{\varphi_1 - \varphi_2 \pm 2k\pi}.$$

Setzt man hierin für k nacheinander 0, 1, 2, 3 .... usw. ein, so findet man eine Serie Werte für q, mit denen man eine Spirale konstruieren kann, die das gegebene Zentrum besitzt und durch die beiden gegebenen Punkte geht.

Der absolut genommene kleinste von allen diesen Werten für q muß nach 8 der steilsten Spirale mit dem gegebenen Zentrum entsprechen, die durch die beiden Punkte zu konstruieren ist.

Der absolute Wert des Zählers des obengenannten Bruches ist konstant, während der des Nenners durch k veränderlich ist. Man findet also den absolut maximalen Wert von q, indem man den absoluten Wert des Nenners so klein wie möglich macht. Es ist nun leicht einzusehen, daß dieser Nenner ein Minimum für denjenigen Wert von k ist, für welchen $\varphi_1 - \varphi_2 \pm 2k\pi$ kleiner als π wird. (Dies ist natürlich nur für einen einzigen Wert von k der Fall.) Die steilste Spirale durch zwei Punkte wird also so verlaufen, daß die Leitstrahlen nach diesen beiden Punkten einen Winkel einschließen, der kleiner ist als 180^0.

14. Die Länge des Teiles der steilsten logarithmischen Spirale, der zwischen zwei Punkten mit den Leitstrahlen ϱ_1 und ϱ_2 liegt, beträgt: $\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\cos \mu}$.

15. Denkt man sich durch zwei Punkte alle möglichen logarithmischen Spiralen mit demselben Zentrum gelegt, und mißt man bei allen diesen Spiralen den Abstand der beiden Punkte die Spiralen entlang, dann ist der Abstand die steilste Spirale entlang der kürzeste.

§ 4. Zugeordnete Spiralen. Hauptspirale. Wir sahen, daß eine logarithmische Spirale durch zwei Punkte des Systems bestimmt ist und dadurch also auch die zugehörige Spiralenschar. Zwei andere Punkte bestimmen wieder eine andere Spiralenschar. Nun darf man aber nicht allgemein sagen, daß alle Schnittpunkte dieser beiden Scharen auch immer Punkte des Punktsystems darstellen.

Wir werden diejenigen logarithmischen Spiralen, welche die Eigenschaft besitzen, daß die zugehörigen Scharen einander nur in Punkten des Systems schneiden, zugeordnete logarithmische Spiralen nennen.

Die Scharen selbst werden wir als zugeordnete logarithmische Spiralscharen bezeichnen.

Von der logarithmischen Spirale sind der Kreis und die gerade Linie zwei besondere Fälle. Es kann also auch Punktsysteme geben, worin Punktreihen auf geraden Linien, die vom Zentrum ausgehen, oder auf konzentrischen Kreisen gelegen sind, natürlich auch solche, bei denen beides gleichzeitig der Fall ist.

Nehmen wir an, daß keine zwei Punkte auf demselben konzentrischen Kreis gelegen sind, so ist einzusehen, daß eine Spirale gezogen werden kann, die alle Punkte enthält. Wir werden sie „Hauptspirale“ nennen[1]).

Um diese Spirale zu erhalten, denke man sich durch einen beliebigen Punkt des Systems einen Kreis gezogen, dessen Mittelpunkt mit dem Ursprung zusammenfällt. Man suche innerhalb dieses Kreises denjenigen Punkt, der ihm am nächsten liegt. Durch den erstgenannten Punkt und durch diesen denke man sich nun die steilste logarithmische Spirale mit demselben Zentrum gezogen; diese wird dann die Hauptspirale sein. Man sieht nämlich leicht ein, daß diese Spirale auch durch denjenigen Punkt gehen muß, welcher in nächster Nähe des konzentrischen Kreises liegt, der durch den zweiten Punkt gezogen ist. Diese Spirale muß also durch alle Punkte des Systems gehen.

§ 5. Einteilung der ähnlichen Punktsysteme. Ohne Mühe können wir nun bei diesen Punktsystemen folgende Fälle unterscheiden:

1. Alle Punkte sind auf einer geraden Linie geordnet, und zwar so, daß die Abstände vom Ausgangspunkt eine geometrische Reihe bilden.

2. Das System besteht aus einer Serie von Punkten, die auf einem Kreise in untereinander gleichen Abständen geordnet sind.

3. Alle Punkte sind auf einem Büschel von geraden Linien, die von einem gemeinsamen Zentrum ausgehen und untereinander denselben Winkel bilden, zu ordnen. Sie liegen darauf in Abständen vom Zentrum, die geometrische Reihen bilden. (Systèmes rectiseriés.)

4. Auf konzentrischen Kreisen liegt mehr als ein Punkt des Systems; jedoch sind die Punkte nicht auf einem Büschel gerader Linien, die vom Zentrum ausgehen, zu ordnen. („Systèmes conjugués“ der „systèmes curviseriés“.)

5. Die Punkte liegen auf einem Büschel von geraden Linien und außerdem liegen mehrere Punkte auf konzentrischen Kreisen. („Systèmes conjugués“ der „systèmes rectiseriés“.)

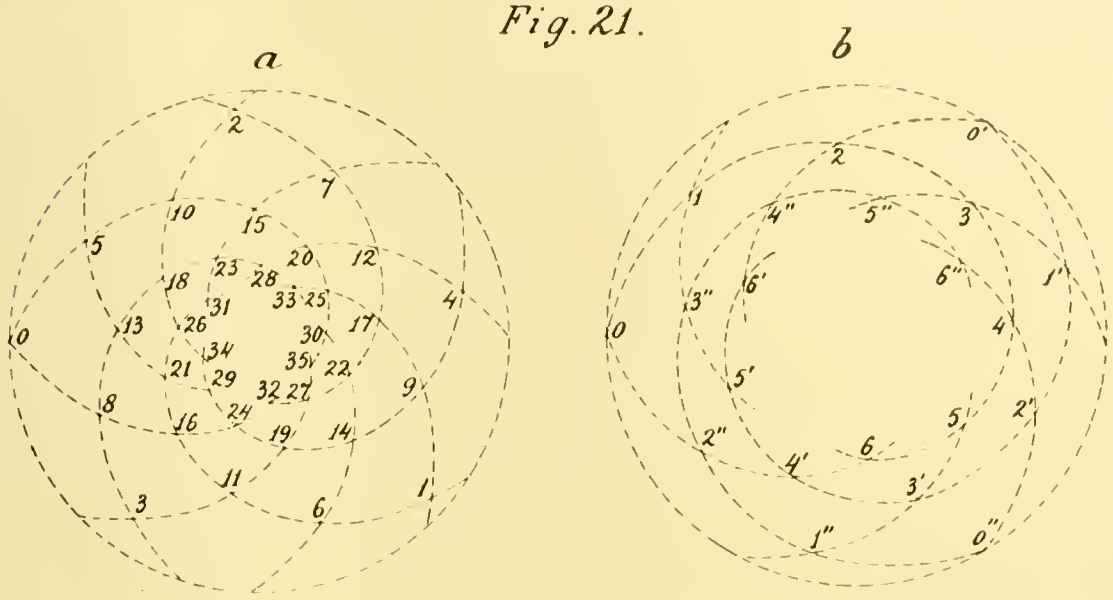
6. Die Punkte liegen weder auf einem Büschel von Geraden, noch liegen mehrere derselben auf ein und demselben konzentrischen Kreise. (Systèmes curviseriés.)

Einfacher für unseren Zweck ist wieder eine Einteilung in Systeme, die eine einzige Hauptspirale und solche, welche keine enthalten. Erstere werden wir wieder einfache, letztere mehrfache ähnliche Punktsysteme auf einer Ebene nennen. Fig. 21a stellt ein einfaches, Fig. 21b ein mehrfaches (dreifaches), ähnliches Punktsystem auf einer Ebene dar; es sind in beiden Figuren zwei Scharen konjugierter Spiralen angegeben und zwar in der Weise, daß eine gewisse Übereinstimmung mit den regelmäßigen Punkt-

1) In Wirklichkeit kann man unendlich viele Spiralen zeichnen, die diese Eigenschaft besitzen; doch wird hier allein die steilste Spirale in Betracht gezogen.

systemen der Textfigur 1 (S. 13) auffallen muß. In diesem Abschnitt wird weiter ausschließlich von den einfachen Punktsystemen gesprochen werden.

Fig. 21.



§ 6. Numerierung der Punkte. Die Divergenz. Einführung des Faktors a: das Hauptverhältnis. Sobald eine Hauptspirale vorhanden ist, kann man die Punkte an dieser entlang numerieren, wobei die Numerierung in einem beliebigen Punkt beginnen kann. Bei unserer Betrachtung werden wir den äußersten Punkt von dem Teile des Systems, das wir betrachten, mit dem Zeichen 0 versehen und dann nach dem Zentrum hin numerieren.

Durch den Punkt o und einen Punkt m ist eine Spirale bestimmt, die, wie man leicht einsieht, auch durch die Punkte $2m$, $3m$, $4m$ usw. gehen muß, wir werden diese also wieder als m-zeilige Spirale bezeichnen. Es leuchtet ein, daß man im Punktsystem eine Spiralenschar von m solchen kongruenten, parallelen logarithmischen Spiralen nachweisen kann und daß dieselbe sämtliche Punkte des Systems einschließt.

Sind nun die m- und die n-zeilige Spirale zugeordnete, dann kann man in gleicher Weise, wie das in § 6 Kapitel I des ersten Abschnittes für die regelmäßigen Punktsysteme auf der Kreiszylinderfläche geschah, nachweisen, daß die Zahlen m und n untereinander unteilbar sein müssen.

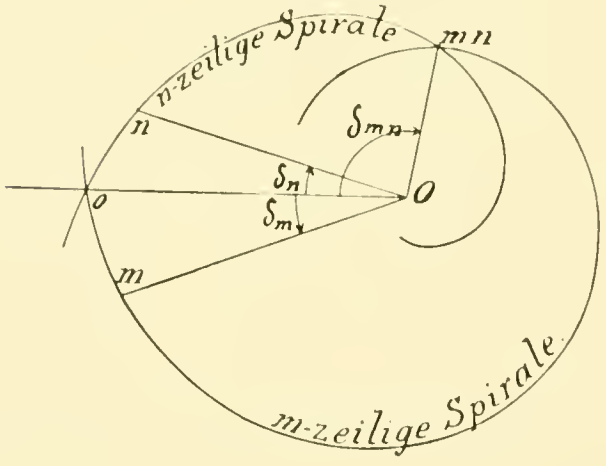
Nach dem vorher Gesagten wird es deutlich sein, daß die Linien, welche man vom Zentrum aus nach den verschiedenen Punkten der Hauptspirale ziehen kann, untereinander gleiche Winkel bilden. Diesen konstanten Winkel werden wir die Divergenz nennen und durch den Buchstaben α bezeichnen. Ferner existiert ein konstantes Verhältnis zwischen den Längen aufeinander folgender Leitstrahlen nach diesen Punkten. Diesem werden wir den Namen Hauptverhältnis geben und dasselbe mit dem Buchstaben a bezeichnen.

Jedes einfache ähnliche Punktsystem auf einer Ebene wird völlig bestimmt sein durch die beiden Größen a und α.

Es muß bemerkt werden, daß wir a immer kleiner als 1 annehmen werden, also als das Verhältnis der Länge eines Leitstrahles zu der eines vorhergehenden größeren. Wir werden den Leitstrahl nach dem Punkt o mit ϱ_o bezeichnen und können dann den Leitstrahl nach einem Punkt m darstellen durch $\varrho_m = a^m \varrho_o$, nach einem Punkt n durch $\varrho_n = a^n \varrho_o$ usw.

§ 7. Sekundäre Divergenz, enzyklische Zahlen. Den Winkel (kleiner als 180°), welchen der Leitstrahl nach Punkt o mit demjenigen nach Punkt m bildet, werden wir die sekundäre Divergenz des Punktes m nennen und mit dem Buchstaben δ_m bezeichnen. Diese Divergenz wird positiv gerechnet, wenn die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom läuft, negativ, wenn die m-zeilige Spirale dieser Hauptspirale antidrom gewunden ist. Ist die Hauptspirale rechtsgewunden, so ist also in Fig. 22 δ_m positiv zu rechnen, δ_n dagegen negativ.

Fig. 22.



Wenn man sich die Hauptspirale entlang vom Punkt o nach einem Punkt m mit positiver sekundärer Divergenz begibt, dann wird man dazu eine gewisse Anzahl Male 360° um das Zentrum herum und dann noch eine Teilstrecke δ_m weiter zu laufen haben. Die Anzahl ganzer Touren werden wir die enzyklische Zahl nennen und mit dem Buchstaben Δ_m bezeichnen.

Wenn man sich aber der Hauptspirale entlang von dem Punkt o nach einem Punkt m mit negativer sekundärer Divergenz begibt, dann wird man dabei ebenfalls eine gewisse Anzahl ganzer Touren um das Zentrum herum machen und dann noch eine Teilstrecke weiterlaufen können. Doch wird diese Teilstrecke jetzt ein Winkel sein, der größer ist als 180° und also nicht gleich δ_m. Wir können dann aber immer in der Weise von o an der Hauptspirale entlang nach m kommen, daß wir eine ganze Tour um das Zentrum mehr machen und darauf die Teilstrecke δ_m zurücklaufen. Diese ganze Anzahl Touren werden wir in diesem Fall als enzyklische Zahl des Punktes m bezeichnen.

Gemäß dieser Definition gilt dann für die ähnlichen Punktsysteme auf einer Ebene ebenso wie für die regelmäßigen Punktsysteme auf der Kreiszylinderfläche, die folgende Gleichung:

$$m\alpha = \delta_m + \Delta_m \cdot 360^0 \qquad (1)$$

§ 8. Die Berechnung der enzyklischen Zahlen Δ_m und Δ_n. Sind die m- und n-zeilige Spirale konjugierte, dann muß der erste Schnittpunkt dieser beiden Spiralen (von Punkt o ab gerechnet) die Nummer mn tragen. Es leuchtet ein, daß, wenn die n-zeilige Spirale die steilere ist, der Punkt mn so liegen muß, daß δ_{mn} dasselbe Zeichen besitzt, wie δ_n. Ist z. B. die m-zeilige Spirale

rechtsgewunden, die n-zeilige links, dann muß also δ_{mn} in der Richtung des Laufs der Uhrzeiger gerechnet werden (man siehe Fig. 22), wie auch δ_n.

Es ist also unter der Voraussetzung, daß die n-zeilige Spirale die steilere ist:

$$\delta_{mn} = m\,\delta_n = m\,n\,\alpha - m\,\Delta_n \cdot 360^0.$$

Dann aber ist auch:

$$\delta_{mn} = n\,\delta_m \pm 360^0 = mn\,\alpha - \Delta_m \cdot 360^0 \pm 360^0$$

wobei das $+$ Zeichen gilt, wenn die m-zeilige Spirale der Hauptspirale antidrom ist, das $-$ Zeichen, wenn diese Spiralen einander homodrom laufen.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt die bekannte Formel:

$$m\,\Delta_n - n\,\Delta_m = \pm 1 \qquad (2)$$

Dieselbe Beziehung ergibt sich auch, wenn vorausgesetzt wird, daß die m-zeilige Spirale die steilere ist.

Auch hier sind also Δ_m und Δ_n Zähler und Nenner des letzten Annäherungsbruches der Bruchzahl $\frac{m}{n}$.

Es braucht nicht näher erörtert zu werden, daß auch die Annäherungswerte der Divergenzen, wenn die m- und n-zeilige Spirale zugeordnete sind, durch die Regel, welche wir in § 9 Kapitel I des ersten Abschnittes abgeleitet haben, bestimmt sind.

Kapitel II. Die Beziehung zwischen den ähnlichen Punktsystemen auf der Ebene und den regelmäßigen Punktsystemen auf der Kreiszylinderfläche.

§ 1. Die Abbildung von Schraubenlinien einer Kreiszylinderfläche auf einer Ebene mit Hilfe kleiner ähnlicher Rechtecke. Während wir oben die Eigenschaften der ähnlichen Punktsysteme abgeleitet haben und dadurch zu einer Einteilung dieser Systeme gekommen sind, die eine große Übereinstimmung mit derjenigen der regelmäßigen Punktsysteme auf der Kreiszylinderfläche zeigt, und wir weiter nachgewiesen haben, daß bei einer gewissen anderen Bedeutung der Buchstaben sogar dieselben Formeln für beide Fälle angewendet werden können, so werden wir jetzt zeigen, daß diese Übereinstimmung nicht zufällig ist, sondern daß eine innige Beziehung zwischen beiden Punktsystemen besteht.

Zuerst wollen wir in Erinnerung bringen, daß es möglich ist, die Ebene mit Hilfe eines Strahlenbüschels aus einem Punkte und einer Schar konzentrischer Kreise um diesen Punkt in ähnliche Rechtecke zu teilen.

Obgleich es für Mathematiker überflüssig ist, glaube ich doch den Beweis für diese Eigenschaft hier folgen lassen zu sollen.

Man denke sich vom Zentrum aus einen Strahlenbüschel gezogen, der eine sehr große Anzahl (s) Strahlen enthält. Nennen wir den konstanten kleinen Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Strahlen, in Bogenmaß gemessen, $\mathfrak{a}$, dann ist: $\mathfrak{a} = \frac{2\pi}{s}$ und wir können bei Anwendung von Polarkoordinaten diesen Strahlenbüschel ausdrücken durch die Formel:

$$\varphi = \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}$$

worin $\mathfrak{m} = 0, 1, 2, 3 \ldots$. bis $(s-1)$ ist. Zwei aufeinander folgende Strahlen können dargestellt werden durch:

$$\varphi = \mathfrak{m}\,\mathfrak{a} \text{ und } \varphi = (\mathfrak{m}+1)\,\mathfrak{a}.$$

Man denke sich nun eine Schar konzentrischer Kreise gezeichnet, welche in Polar-Koordinaten so bezeichnet werden kann:

$$\varrho = \varrho_o\, e^{\mathfrak{n}\mathfrak{b}}$$

worin $\mathfrak{n} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \ldots$. bis $\pm\infty$ sein kann und worin ϱ_o und $\mathfrak{b}$ konstante Größen vorstellen.

Zwei aufeinander folgende Kreise dieser Kreisschar können bezeichnet werden durch:

$$\varrho_o\, e^{(\mathfrak{n}+1)\mathfrak{b}} \text{ und } \varrho_o\, e^{\mathfrak{n}\mathfrak{b}}.$$

Betrachten wir nun die kleinen Figuren, in welche durch ein solches System von Strahlen und Kreisen die Ebene eingeteilt wird, so ist deutlich, daß, wenn die Strahlen und auch die aufeinander folgenden Kreise nahe genug beieinander angenommen werden, diese Figürchen sich kleinen Rechtecken nähern müssen. Nun werden die Strahlen des Büschels dicht beieinander liegen, wenn in der Formel: $\varphi = \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ einen sehr kleinen Wert besitzt, während die aufeinander folgenden Kreise sehr nahe zusammenrücken, wenn man in der Formel $\varrho = \varrho_o\, e^{\mathfrak{n}\mathfrak{b}}$ die Konstante $\mathfrak{b}$ recht klein annimmt.

Es wird nun nachgewiesen werden, daß, wenn man die Größen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nur klein genug nimmt, die kleinen Rechtecke, in welche dann die Ebene geteilt wird, einander ähnlich sind.

Nach dem Vorhergehenden können die Seiten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ eines beliebigen Rechtecks dargestellt werden durch:

$$\mathfrak{p} = \{(\mathfrak{m}+1)\,\mathfrak{a} - \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\}\,\varrho = \mathfrak{a}\,\varrho = \mathfrak{a}\,\varrho_o\, e^{\mathfrak{n}\mathfrak{b}}$$

$$\mathfrak{q} = \varrho_o\, e^{(\mathfrak{n}+1)\mathfrak{b}} - \varrho_o\, e^{\mathfrak{n}\mathfrak{b}} = \varrho_o\, e^{\mathfrak{n}\mathfrak{b}}\,(e^{\mathfrak{b}} - 1),$$

sodaß das Verhältnis dieser Seiten das folgende ist:

$$\mathfrak{p} : \mathfrak{q} = \mathfrak{a} : (e^{\mathfrak{b}} - 1)$$

Nun kann man jedoch, wenn $\mathfrak{b}$ sehr klein genommen wird, $\mathfrak{b}$ für $e^{\mathfrak{b}} - 1$ einsetzen und bekommt dann:

$$\mathfrak{p} : \mathfrak{q} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b},$$

worin, wie wir annahmen, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ konstant sind.

Für alle Rechtecke ist also das Verhältnis der Seiten dasselbe, sie sind mithin ähnlich.

Bemerken wir noch beiläufig, daß, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ wird und dadurch alle Rechtecke in Quadrate übergehen; man kann also durch einen Strahlenbüschel:

$$\varphi = \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}$$

und eine Kreisschar:

$$\varrho = \varrho_0 e^{\mathfrak{n}\mathfrak{a}}$$

die Ebene um ein Zentrum herum in kleine Quadrate einteilen, wenn $\mathfrak{a}$ genügend klein genommen wird.

Man denke sich nun eine Kreiszylinderfläche mit dem Radius R auf einer Ebene abgerollt und darauf s vertikale Linien gezogen. Weiter denke man sich darauf eine unendliche Anzahl horizontaler Linien in Abständen $R\mathfrak{b}$ angegeben. Die Oberfläche des Kreiszylinders ist dann in kongruente kleine Rechtecke eingeteilt, deren Seiten gleich $\frac{2\pi R}{s}$ und $R\mathfrak{b}$ sind und sich also verhalten wie:

$$\frac{2\pi}{s} : \mathfrak{b}$$

oder wie $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$.

Hieraus folgt, daß man auf diese Weise die Kreiszylinderfläche in Rechtecke eingeteilt hat, welche ähnlich sind den Rechtecken, in die auf die oben angegebene Weise die Ebene um ein Zentrum herum eingeteilt worden ist.

Auch hier weisen wir darauf hin, daß, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist, die kleinen Rechtecke wieder in Quadrate übergehen, während, wenn $R = 1$ ist, die Seiten der Rechtecke auf der Oberfläche der Kreiszylinderfläche gleich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ werden.

Vergleicht man die beiden Einteilungen in kleinen ähnlichen Rechtecken, so ergibt sich, daß auf der Zylinderfläche ebensoviel vertikale Linien vorhanden sind wie Strahlen auf der Ebene, und daß die Anzahl der horizontalen Linien ebensowohl wie die der konzentrischen Kreise unendlich groß ist. Es läßt sich nun die Einteilung auf der Ebene als „Abbildung" der Einteilung auf der Kreiszylinderfläche ansehen, wobei die einzelnen Rechteckchen eine verschiedene Vergrößerung oder Verkleinerung erfahren haben.

Markieren wir dazu zwei dieser Rechtecke, welche wir in beiden Figuren als „übereinstimmend" annehmen werden (wozu man jede zwei nach Belieben wählen kann), so sind dadurch alle anderen übereinstimmenden Rechtecke bestimmt.

Wenn wir jetzt eine Serie von Rechtecken auf der Kreiszylinderfläche in der Weise auswählen, daß deren Diagonalen sich an einander anschließen und so eine Schraubenlinie bilden, dann können wir uns die Frage vorlegen, welche Kurve auf der Ebene die Abbildung dieser Schraubenlinie ist. Sind z. B. in Fig. 23 und 24 (S. 108)[1]) die schraffierten Rechtecke „übereinstimmend", so kann man sich das Bild von Fig. 23 so auf Fig. 24 entworfen denken, daß die in Fig. 23 enthaltenen Diagonalen den in Fig. 24 gezogenen entsprechen und es fragt sich jetzt, welche Art Kurve die Diagonalen der letzteren Figur bilden, wenn die Rechtecke beliebig klein gewählt werden.

---

1) In diesen Figuren ist $s = 36$ angenommen.

Bezeichnen wir die Polarkoordinaten der Punkte dieser Kurve mit ϱ und φ und betrachten wir zuerst nur die Diagonale des schraffierten Rechtecks, dann ist für dieses Teilstückchen der Kurve $d\varrho = \mathfrak{q}$ und $\varrho\, d\varphi = \mathfrak{p}$, und also:

$$\frac{d\varrho}{\varrho\, d\varphi} = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$$

woraus sich ergibt:

$$\lg \varrho = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\varphi + C'$$

oder

$$\varrho = e^{\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\varphi + C'} = C\, e^{\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\varphi} = C\, e^{q\varphi},$$

worin q eine konstante Größe ist.

Die betrachtete Diagonale kann also nach § 3 S. 99 aufgefaßt werden als eine Teilstrecke einer logarithmischen Spirale, welche

Fig. 23.

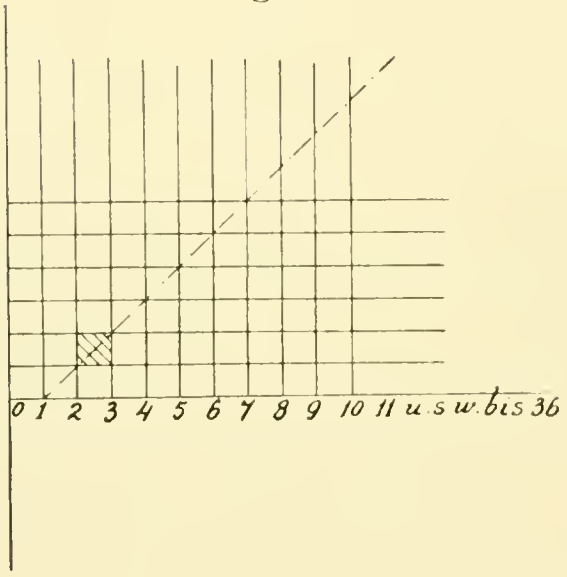
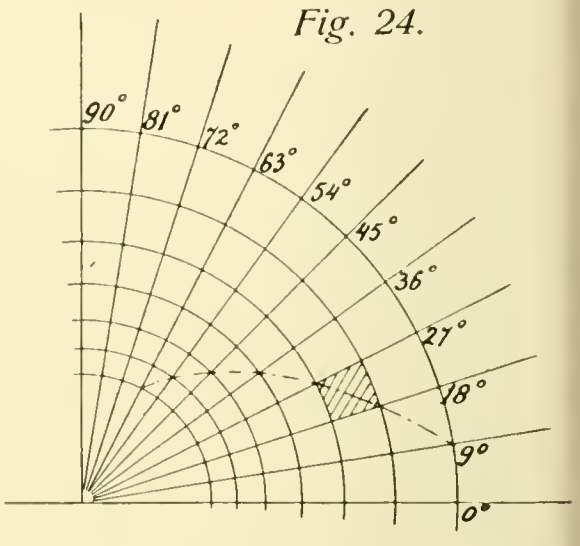


Fig. 24.



den Ursprung des Koordinatensystems zum Zentrum besitzt und deren charakteristischer Winkel μ bestimmt wird durch $tg\,\mu = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$.

Aber dasselbe kann in ganz gleicher Weise auch von den Diagonalen der anderen Rechtecke nachgewiesen werden.

Die gerade Linie auf der abgerollten Kreiszylinderfläche, d. i. also die Schraubenlinie auf der Zylinderfläche, geht, wenn man davon eine Abbildung mit ähnlichen Rechtecken anfertigt, über in eine logarithmische Spirale auf der Ebene, und umgekehrt.

Gerade Linien unter einem Winkel von 45° entsprechen bei der Abbildung logarithmischen Spiralen unter Winkeln von 45°.

Man denke sich nun zwei beliebige, sich schneidende, krumme Linien auf der Zylinderfläche und ihre Bilder auf der Ebene angefertigt. Die kleinen Teile dieser vier Linien, welche unmittelbar in der Nähe der Schnittpunkte liegen, dürfen wir als gerade Linien betrachten und zwar als Diagonalen von kleinen übereinstmmenden Rechtecken. Da das Rechteck auf der Zylinderfläche ähnlich ist dem entsprechenden auf der Ebene, so müssen die Winkel, unter welchen sich die krummen

Linien auf Zylinderfläche und Ebene schneiden, einander gleich sein. Die mit Hilfe kleiner ähnlicher Rechtecke entworfene Abbildung gehört also zu den isogonalen. Da außerdem die entsprechenden kleinsten Teile in beiden Figuren ähnlich sind, so spricht man auch von konformer Abbildung.

Auf die angegebene Weise kann man also von jeder Zeichnung auf der Zylinderfläche eine konforme Abbildung auf der Ebene erhalten.

§ 2. Die Abbildung von regelmäßigen Punktsystemen einer Kreiszylinderfläche auf einer Ebene mit Hilfe kleiner ähnlicher Rechtecke. Es ist leicht ersichtlich, daß eine Schar von logarithmischen Spiralen auf der Ebene einer Serie paralleler Linien mit gleichen Abständen auf der abgerollten Zylinderfläche entspricht und folglich einer Schar Schraubenlinien auf der Kreiszylinderfläche selbst.

Daraus folgt sofort, daß ein „regelmäßiges Punktsystem" auf der Zylinderfläche angesehen werden kann als die konforme Abbildung eines „ähnlichen Punktsystems auf der Ebene". Es kann ja das erstgenannte System betrachtet werden als dasjenige der Schnittpunkte zweier Scharen von Schraubenlinien, das zweite als dasjenige der Schnittpunkte zweier Scharen von logarithmischen Spiralen.

Umgekehrt kann man also auch alle möglichen ähnlichen Punktsysteme auf der Ebene unmittelbar aus den regelmäßigen Punktsystemen auf der Kreiszylinderfläche durch die beschriebene konforme Abbildung entstanden denken.

Es bedarf keiner besonderen Erwähnung, daß alle Eigenschaften, die wir für die ähnlichen Punktsysteme direkt ableiteten, sich auch unmittelbar aus dieser Folgerung ergeben, so wie die Übereinstimmung der Einteilungen beider Punktsysteme.

Hier sei noch betont, daß die Übereinstimmung zwischen den abgeleiteten Formeln sich ebenfalls aus diesen Betrachtungen ergibt; denn sobald man auf der Kreiszylinderfläche eine Hauptspirale hat, wird man auch bei der konformen Abbildung eine Hauptspirale auf der Ebene finden — und umgekehrt. Was wir auf der Ebene als „Divergenz" (α) bezeichneten, entspricht, wenn wir die konforme Abbildung auf der Zylinderfläche anfertigen, demjenigen Winkel, welchen wir als „Divergenz" für die Kreiszylinderfläche definierten.

Man kann weiter jede sekundäre Divergenz auf der Ebene als übereinstimmend mit der sekundären Divergenz des entsprechenden Punktes auf der Zylinderfläche ansehen. Wenn also für diese letztgenannten Punkte die abgeleiteten Formeln gelten, so muß das auch für die der Punktsysteme auf der Ebene der Fall sein.

§ 3. Die Abbildung von Kreisen einer Kreiszylinderfläche auf eine Ebene mit Hilfe kleiner ähnlicher Rechtecke. Man denke sich die Zylinderoberfläche durch ein System einander senkrecht schneidender Schraubenlinien in Quadrate eingeteilt, die nicht unendlich klein sind; dann kann man in allen diesen Quadraten Kreise ziehen, welche die Seiten berühren und in den Berührungspunkten auch einander tangieren. Wird von diesem System eine konforme Abbildung auf der Ebene

angefertigt, dann gehen die Quadrate in viereckige Figuren über, welche durch logarithmische Spiralen begrenzt werden, die einander senkrecht schneiden. Innerhalb dieser Figuren befinden sich nun Kurven, die eine Abbildung der Kreise darstellen, es sind dies sogenannte Ovoide. Diese Kurven werden die Seiten der viereckigen Figuren berühren, während außerdem die verschiedenen Ovoide in aneinandergrenzenden Feldern gelegen, sich in denselben Punkten tangieren. Einem solchen Ovoid haben HAYES und CHURCH[1]) den Namen Quasi-circle gegeben.

Der Quasikreis ist also eine konforme Abbildung eines wirklichen Kreises der Zylinderfläche auf eine Ebene mit Hilfe kleiner ähnlicher Rechtecke.

Obwohl ich später auf das Werk von CHURCH zurückkommen und auseinandersetzen werde, warum die Einführung des Begriffes „Quasi-circle" in die Botanik meiner Meinung nach verfehlt war, habe ich dennoch schon hier den richtigen Charakter dieser Kurve klargestellt, weil die genannten Verfasser bei ihrer mathematischen Ableitung das Wesen dieser Kurve nicht deutlich erkennen lassen.

Auch auf die eigenartige Beziehung zwischen den beiden Punktsystemen werden wir später genauer eingehen und dabei versuchen, eine noch deutlichere Vorstellung davon zu bekommen. Hier wollen wir kurz einige Bemerkungen über die oben angegebene Abbildungsweise einfügen, welche jedoch mit unserem Thema nicht direkt in Berührung stehen.

§ 4. Die besprochene Abbildungsmethode und die Kartenprojektion. Jede Zeichnung auf einer Ebene kann angesehen werden als die Polprojektion (nach HIPPARCH und PTOLEMÄUS) einer konformen Zeichnung auf einer Kugel. Man denke sich nämlich eine Kugel auf eine Ebene gestellt und den dem Berührungspunkte gegenüberliegenden Pol mit allen Punkten der Zeichnung auf der Ebene verbunden, dann bilden die Schnittpunkte dieser Linien mit der Kugeloberfläche auf dieser eine konforme Abbildung der Zeichnung der Ebene, wie sich mittels der Theorie der „Inversion" leicht beweisen läßt.

Weiter kann man eine Zeichnung auf einer abgerollten Kreiszylinderfläche immer betrachten als die Merkatorkarte einer konformen Zeichnung auf einer Kugeloberfläche. Man denke sich dazu die Kreiszylinderfläche durch eine sehr große Anzahl s vertikaler und eine unendliche Anzahl horizontaler Linien und die Kugeloberfläche durch s Meridiane und eine unendliche Anzahl Parallelkreise in ähnliche kleine Rechtecke eingeteilt. Man kann dann in die kleinen Rechtecke der Kugeloberfläche, die als flach betrachtet werden dürfen, die Zeichnung aus den „übereinstimmenden" Rechtecken der Zylinderoberfläche übertragen.

Gerade Linien auf der Merkatorkarte entsprechen auf der Kugeloberfläche Kugelloxodromen, und diese Kurven entsprechen wieder bei der Polprojektion auf die Ebene logarithmischen Spiralen mit dem Pol als Zentrum.

Hieraus ergibt sich, daß die Beziehung zwischen den regelmäßigen Punktsystemen auf der Kreiszylinderfläche und den ähnlichen auf der Ebene dieselbe ist wie diejenige zwischen der Merkatorkarte und der Polprojektion (nach HIPPARCH und PTOLEMÄUS).

1) CHURCH: On the relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws. London 1904.

§ 5. Die besprochene Abbildungsmethode von funktionstheoretischem Standpunkt.

Die oben beschriebene Abbildungsmethode mit Hilfe kleiner ähnlicher Rechtecke steht in enger Beziehung zu einer solchen, die man durch eine Funktion eines komplexen Arguments wiedergeben kann und zwar durch die logarithmische Funktion, die wir durch das Symbol:

$$Z = \lg z$$

darstellen. Eine ausführliche Besprechung dieser Abbildung findet man bei G. Holzmüller[1]). Wir wollen hier nur bemerken, daß dabei die Zeichnung auf einem flachen horizontalen Streifen (auf der Z-Ebene) konform abgebildet wird auf eine unbegrenzte Ebene (ein Blatt der z-Ebene). Der einzige Unterschied von obiger Abbildungsmethode ist der, daß bei dieser der flache Streifen vertikal gestellt war.

Auch mit Hilfe der Theorie dieser logarithmischen Abbildung kann man nachweisen, daß gerade Linien der Z-Ebene auf der z-Ebene durch logarithmische Spiralen dargestellt werden und dadurch kann man dann außerdem in sehr einfacher Weise alle Eigenschaften der logarithmischen Spirale aus denjenigen der geraden Linie ableiten[2]).

Daß die Abbildung eine konforme ist, geht schon daraus hervor, daß alle Abbildungen mittels einer Funktion eines komplexen Arguments konform sind. Die Vergrößerung eines Elementarteilchens der Zeichnung bei der Abbildung findet man, indem man den „absoluten Betrag" des komplexen Differentialquotienten $\frac{dZ}{dz}$ für dieses Teilchen bestimmt; hier wird derselbe gleich $\frac{1}{\varrho}$, wenn ϱ der Radius vector des Teilchens auf der z-Ebene ist. Hieraus ergibt sich, daß diejenigen Teilchen der z-Ebene, welche in der Nähe des Zentrums gelegen sind, eine Verkleinerung erlitten haben, während die Teilchen, welche in größerer Entfernung vom Zentrum liegen, eine Vergrößerung erfuhren; nur die Teilchen, auf dem Kreise mit dem Radius 1 um das Zentrum, haben die Größe beibehalten, welche sie auf der Z-Ebene besaßen.

Wenn man die Koordinaten der Z-Ebene groß, diejenigen der z-Ebene klein schreibt, so kann man das Symbol $Z = \lg z$ auch in folgender Weise schreiben:

$$Z = X + i\,Y = \lg z = \lg (x + iy) = \lg \varrho\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

oder:

$$Z = \lg \varrho\, e^{i\varphi} = \lg \varrho + i\,(\varphi + 2\,\pi\,k)$$

wenn

$$k = \pm (0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots)$$

woraus sich ergibt:

$$X = \lg \varrho \qquad Y = \varphi + 2\,\pi\,k$$

Es wird also eine Kurve, welche in der Z-ebene dargestellt wird durch $f(X, Y) = 0$, auf der z-Ebene gegeben durch $f(\lg \varrho, \varphi + 2\,\pi\,k) = 0$.

Mittels dieser Transformationsformeln konnten E. H. Hayes und A. H. Church[3]) die Gleichung der Kurve ableiten, welche in der z-Ebene der Abbildung eines Kreises der Z-Ebene entspricht und welcher diese Autoren, wie schon oben gesagt wurde, den Namen Quasikreis gaben.

---

1) Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildung. Leipzig 1882, S. 237.

2) Man siehe: Über die logarithmische Abbildung und die aus ihr entspringenden orthogonalen Kurvensysteme. Dr. G. Holzmüller. Zeitschrift f. Mathematik und Physik. (Schlömilchs) 16. Jahrgang, 1871, S. 267.

3) On the relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws by A. H. Church, London 1904. Man siehe: Mathematical Notes on Log. Spiral Systems and their Application to Phyllotaxis Phenomena, p. 327.

Kapitel III. Ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene.

§ 1. Definition. Unter einem ähnlichen System tangierender Kreise auf einer Ebene werden wir ein System von Kreisen verstehen, das folgende Eigenschaften besitzt: 1. die Mittelpunkte der Kreise bilden ein ähnliches Punktsystem auf einer Ebene; 2. die Strahlen der Kreise verhalten sich wie die Leitstrahlen nach den Mittelpunkten, bilden also eine geometrische Reihe; 3. jeder Kreis tangiert mindestens vier andere Kreise; 4. nirgendwo im System findet ein Schneiden von Kreisen statt.

Es wird deutlich sein, daß, wenn es solche ähnliche Systeme tangierender Kreise wirklich gibt, was noch zu beweisen ist, jeder Kreis des Systems allen anderen gegenüber eine ähnliche Lage einnimmt. Wird z. B. der Kreis o von dem Kreise m tangiert, so muß dieser Kreis wieder vom Kreise $2m$ berührt werden, und dieser wieder von $3m$ usw. Dann muß aber auch der Kreis 1 von dem Kreise $(1+m)$ tangiert werden und dieser wieder vom Kreise $(1+2m)$ usw. Es werden sich also in diesem Falle alle Kreise des Systems auf m parallelen kongruenten, logarithmischen Spiralen ordnen lassen. Wir werden dann wieder von m-zeiligen Kontaktspiralen sprechen.

Tangiert der Kreis o außerdem noch den Kreis n, dann existieren auch n n-zeilige Kontaktspiralen. Wir werden dann wieder vom zweizähligen Kontakte m und n sprechen.

§ 2. Läßt sich die Möglichkeit der Existenz von ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Ebene schon voraussagen? Im vorhergehenden Kapitel haben wir nachgewiesen, daß man sich die ähnlichen Punktsysteme durch eine konforme Abbildung mittels kleiner ähnlicher Rechtecke aus den regelmäßigen Punktsystemen auf einer Kreiszylinderfläche entstanden denken kann. Können nun auch die ähnlichen Kreissysteme in gleicher Weise durch eine solche Abbildung aus den regelmäßigen Kreis- oder Ellipsensystemen entstanden gedacht werden? Nein.

Wenn man von einem regelmäßigen System tangierender Ellipsen einer Kreiszylinderfläche mittels der Methode der kleinen ähnlichen Rechtecke eine konforme Abbildung auf einer Ebene herstellt, dann gehen die Ellipsen dabei in Ovoide über, welchen man den Namen Quasiellipsen geben könnte, und jede dieser Quasiellipsen wird von vier ähnlichen tangiert. Die Gleichung einer solchen Quasiellipse kann man mittels der Transformationsgleichungen von § 5 des vorigen Kapitels unmittelbar aus derjenigen einer Ellipse ableiten. Niemals aber kann bei endlicher Größe eine solche Quasiellipse in einen Kreis übergehen.

Hätte man anstatt eines regelmäßigen Systems tangierender Ellipsen auf der Kreiszylinderfläche ein solches von tangierenden Kreisen für die konforme Abbildung benutzt, so würde man ein System von ähnlichen Quasikreisen bekommen haben, und auch diese Kurven können bei endlicher Größe niemals in wirkliche Kreise übergehen. Wenn aber die Kreise kleiner werden, so werden die Quasikreise immer mehr wirklichen Kreisen gleichen, obwohl

sie erst, wenn die Kreise unendlich klein werden, in solche übergehen. Wir kommen darauf später noch ausführlicher zu sprechen.

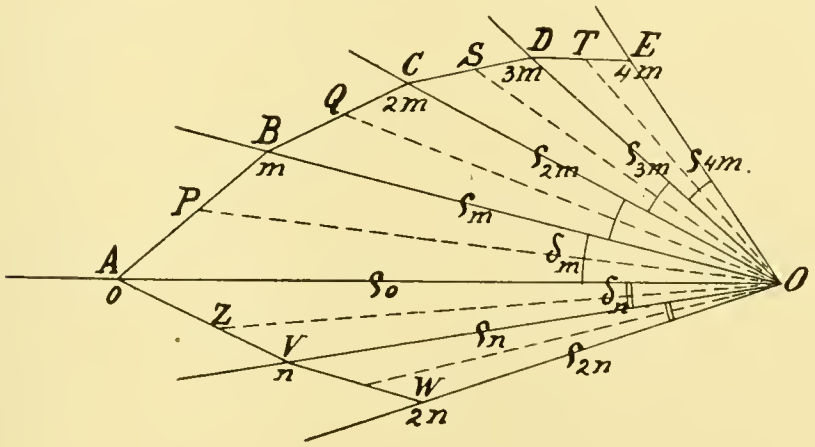
Es läßt sich also sagen, daß es unmöglich ist, à priori auf die Existenz von ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Ebene zu schließen. Im folgenden Paragraphen wird die Möglichkeit davon dennoch nachgewiesen werden.

§ 3. Die Beziehung zwischen a und α für zweizählige Kontakte. Wir werden zuerst nachweisen, daß es unendlich viele ähnliche Systeme tangierender Kreise gibt, die einen bestimmten Kontakt m und n zeigen, daß aber, wenn der Wert von a oder derjenige von α für ein solches System gegeben ist, das System dadurch völlig bestimmt wird.

Denken wir uns ein ähnliches Punktsystem auf einer Ebene angegeben und nehmen wir wieder an, daß die m- und die n-zeilige Spirale zugeordnet sind.

Betrachten wir nun ausschließlich die Punkte des Systems, die auf der m-zeiligen Spirale liegen, und verbinden wir diese Punkte mit dem Pole und außerdem jeden folgenden Punkt mit dem vor-

Fig. 25.



hergehenden. (Man siehe Fig. 25.) Die Längen der Leitstrahlen, sowie die der Verbindungslinien werden eine geometrische Reihe mit dem Quotienten a^m bilden.

Man ziehe jetzt in den ähnlichen Dreiecken, die von den Leitstrahlen und den Verbindungslinien gebildet werden, die Linien, welche den Winkel am Zentrum halbieren. In Fig. 25 halbiert also OP den Winkel AOB, OQ den Winkel BOC usw.

Nach einem einfachen Lehrsatz der Planimetrie findet man nun:

$$\frac{PB}{PA} = \frac{\varrho_m}{\varrho_o} \qquad \frac{QB}{QC} = \frac{\varrho_m}{\varrho_{2m}}$$

und also:

$$\frac{PB}{\varrho_m} = \frac{PB+PA}{\varrho_o+\varrho_m} = \frac{AB}{\varrho_o+\varrho_m} \qquad \frac{QB}{\varrho_m} = \frac{QB+QC}{\varrho_m+\varrho_{2m}} = \frac{AB}{\varrho_o+\varrho_m}$$

oder:

$$PB = \frac{\varrho_m}{\varrho_o+\varrho_m} AB \qquad QB = \frac{\varrho_m}{\varrho_m+\varrho_{2m}} BC$$

Bedenkt man nun noch, daß $\varrho_m = a^m \varrho_o$ und $\varrho_{2m} = a^{2m} \varrho_o$, während $BC = a^m \cdot AB$ ist, so ergibt sich:

$$PB = QB$$

In ganz gleicher Weise beweist man, daß:

$$QC = SC, \quad SD = TD \text{ usw.}$$

ist. Aber außerdem folgt noch aus denselben Beziehungen:

$$PA : PB = QB : QC = SC : SD = \text{usw.} = a^m$$

Beschreibt man nun um den Punkt A einen Kreis mit dem Radius AP, um B einen solchen mit dem Radius BQ, um C einen solchen mit dem Radius CS, um D einen solchen mit dem Radius DT usw., so werden sich diese Kreise nach dem Vorhergehenden in den Punkten P, Q, S, T usw. tangieren, und ihre Strahlen werden eine geometrische Reihe mit dem Quotienten a^m bilden. Wird also der Radius AP durch r_o dargestellt, so sind die anderen Strahlen durch $a^m r_o$, $a^{2m} r_o$, $a^{3m} r_o$ usw. gegeben.

Man denke sich nun um alle Punkte des ähnlichen Punktsystems Kreise beschrieben, und zwar in der Weise, daß der Kreis um Punkt o den Radius $AP = r_o$ besitzt, derjenige um Punkt 1 den Radius $a r_o$, derjenige um Punkt 2 den Radius $a^2 r_o$ usw., dann werden die Kreise um die Punkte m (B), $2m$ (C), $3m$ (D) usw. die Strahlen $a^m r_o$, $a^{2m} r_o$, $a^{3m} r_o$ usw. besitzen, d. h. also denjenigen Wert, welchen sie auch nach der eben beschriebenen Methode hatten. Die letztgenannten Kreise müssen also mit einander in Kontakt sein. Aus der Ähnlichkeit der Lage jedes Punktes allen anderen gegenüber ergibt sich dann, daß sich bei dieser Konstruktion auch die Kreise um die Punkte 1, $1+m$, $1+2m$, $1+3m$ usw. tangieren müssen, ebenso wie die Kreise um die Punkte 2, $2+m$, $2+2m$, $2+3m$ usw., und auch diejenigen um die Punkte 3, $3+m$, $3+3m$, $3+3m$ usw., und in dieser Weise kann man weiterschließen. Man bekommt so um die Punkte eines ähnlichen Punktsystems ein System Kreise, dessen Strahlen eine geometrische Reihe mit dem Quotienten a bilden, und das den m-zähligen Kontakt zeigt. Aus unseren Betrachtungen geht hervor, daß ein solches System um die Punkte jedes ähnlichen Punktsystems zu beschreiben ist.

Im allgemeinen wird nun ein solches System nicht noch einen zweiten Kontakt zeigen, es fragt sich also, welches ist die Bedingung, daß dies der Fall ist?

Um ein System mit n-zähligem Kontakte zu beschreiben, verfährt man nach dem Vorhergehenden in folgender Weise: Man verbindet den Punkt o mit dem Punkt n, in Fig. 25 mit V bezeichnet, und halbiert darauf den Winkel AOV durch die Gerade OZ. Beschreibt man nun um die Punkte des ähnlichen Punktsystems Kreise, deren Strahlen gleich $r_o' = AZ$, $a r_o'$, $a^2 r_o'$, $a^3 r_o'$ usw. sind, so ist damit die Aufgabe gelöst.

Damit also die Kreiskonstruktion gleichzeitig den m- und den n-zeiligen Kontakt aufweist, muß das Punktsystem derart beschaffen sein, daß $r_o = r_o'$, d. h. daß $AP = AZ$ ist.

Nun fanden wir in $\triangle AOB$: $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{\varrho_o}{\varrho_m}$ und daraus folgt:

$$\frac{PA}{\varrho_o} = \frac{PA + PB}{\varrho_o + \varrho_m} = \frac{AB}{\varrho_o + \varrho_m}$$

In dieser Formel läßt sich AB in folgender Form schreiben:

$$AB = \sqrt{\varrho_o^2 + \varrho_m^2 - 2\varrho_o \varrho_m \cos \delta_m}$$

oder, wenn man nach Formel (1) $\delta_m = m\alpha - \Delta_m \cdot 360^0$ setzt:

$$AB = \sqrt{\varrho_o^2 + \varrho_m^2 - 2\varrho_o \varrho_m \cos m\alpha}$$

Es wird also:

$$\frac{AP}{\varrho_o} = \frac{\sqrt{\varrho_o^2 + \varrho_m^2 - 2\varrho_o \varrho_m \cos m\alpha}}{\varrho_o + \varrho_m}$$

oder wenn man bedenkt, daß $\varrho_m = a^m \varrho_o$:

$$\frac{AP}{\varrho_o} = \frac{\sqrt{1 + a^{2m} - 2a^m \cos m\alpha}}{1 + a^m}$$

In übereinstimmender Weise läßt sich aus den Eigenschaften von $\triangle AOV$ ableiten, daß:

$$\frac{AZ}{\varrho_o} = \frac{\sqrt{1 + a^{2n} - 2a^n \cos n\alpha}}{1 + a^n}$$

ist.

Die Bedingung, daß $AP = AZ$ ist, und folglich um die Punkte des ähnlichen Punktsystems ein System Kreise konstruiert werden kann, dessen Strahlen das Verhältnis a besitzen und das den zweizähligen Kontakt m und n zeigt, wird also gegeben durch die Beziehung:

$$\frac{1 + a^{2m} - 2a^m \cos m\alpha}{1 + a^{2n} - 2a^n \cos n\alpha} = \left(\frac{1 + a^m}{1 + a^n}\right)^2$$

Diese Formel läßt sich nach einigen Umformungen auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{\cos \frac{m}{2}\alpha}{\cos \frac{n}{2}\alpha} = \pm \frac{1 + a^m}{1 + a^n} \sqrt{a^{n-m}} \qquad (40)$$

Für jeden Wert von α gibt diese Formel einen solchen von a, und mit diesen Werten ist dann ein ähnliches Punktsystem zu beschreiben, um dessen Punkte die Kreiskonstruktion mit dem Kontakte m und n auszuführen ist; für jeden Wert von a gibt sie den zugehörigen Wert von α.

Die Kreiskonstruktionen, die man in der angegebenen Weise bekommt, genügen nun den Bedingungen, welche wir an die „ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene“ gestellt haben, mit der Einschränkung, daß noch keine Rücksicht auf die Bedingung genommen worden ist, daß im ganzen System kein Schneiden der Kreise stattfinden darf.

Wenn die m- und die n-zeilige Spirale „zugeordnet“ sind, so werden sich innerhalb der viereckigen Figuren, in welche die Ebene von den m- und n-zeiligen Spiralscharen eingeteilt wird, keine Punkte des Punktsystems befinden können. Es wird also deutlich sein, daß, falls der Kreis um Punkt o in obiger Konstruktion nur nicht denjenigen um die Punkte $(m+n)$ und $(n-m)$ schneidet, auch nirgends im ganzen System Durchschneidung von Kreisen stattfinden kann. Die Grenzfälle dafür sind also diejenigen, bei

denen die dreizähligen Kontakte m, n und $(m+n)$ und $(n-m)$, m und n auftreten. Mit allen Werten von a und α, welche der Formel (40) genügen und zwischen denen liegen, welche für diese dreizähligen Kontakte gelten, wird man ähnliche Punktsysteme auf einer Ebene zeichnen können, um deren Punkte ähnliche Kreissysteme zu konstruieren sind.

§ 4. Die Werte von a und α für dreizählige Kontakte. Der dreizählige Kontakt $(n-m)$, m und n kann aufgefaßt werden als ein zweizähliger $(n-m)$ und m aber auch als ein zweizähliger m und n. Daraus folgt, daß die Werte von a und α für diesen Kontakt gleichzeitig folgenden Gleichungen genügen müssen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\frac{n-m}{2}\alpha}{\cos\frac{m}{2}\alpha} &= \pm\frac{1+a^{n-m}}{1+a^m}\sqrt{a^{2m-n}} \\ \frac{\cos\frac{m}{2}\alpha}{\cos\frac{n}{2}\alpha} &= \pm\frac{1+a^m}{1+a^n}\sqrt{a^{n-m}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (41)$$

Hiermit ist der Wert von a und α, wenn m und n gegeben sind, ganz bestimmt.

Für den dreizähligen Kontakt m, n und $(m+n)$ ergeben sich die Werte von a und α aus folgenden beiden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\frac{m}{2}\alpha}{\cos\frac{n}{2}\alpha} &= \pm\frac{1+a^m}{1+a^n}\sqrt{a^{n-m}} \\ \frac{\cos\frac{n}{2}\alpha}{\cos\frac{m+n}{2}\alpha} &= \pm\frac{1+a^n}{1+a^{m+n}}\sqrt{a^m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (42)$$

Die Formeln (41) und (42) lassen keine einfache Berechnung der Werte a und α zu, wir werden im folgenden Kapitel nachweisen, in welcher Weise man die numerische Lösung dennoch ausführen kann.

§ 5. Einführung des Faktors b für die ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene. Bei den regelmäßigen Kreissystemen auf einer Kreiszylinderfläche haben wir den Faktor b in der Weise definiert, daß wir darunter das Verhältnis zwischen dem Kreisdurchmesser und dem Umfang der Zylinderfläche verstanden. Wir hätten auch so verfahren können, daß wir uns zuerst zwei vertikale Tangenten an den Kreis gezogen dachten und nun unter dem Faktor b das Verhältnis zwischen dem Teil des Zylinderumfangs, welcher von diesen beiden Tangenten begrenzt wird, und dem ganzen Umfang verstanden hätten. Wenn man dann von der Zeichnung auf der Zylinderfläche eine konforme Abbildung mit Hilfe kleiner ähnlicher

Rechtecke auf einer Ebene entwirft, so gehen die vertikalen Tangenten dabei in Strahlen durch das Zentrum über und der Faktor b für den Quasikreis kann dann definiert werden als das Verhältnis zwischen dem Winkel, unter dem vom Zentrum aus dieser Quasikreis gesehen wird, und einem Winkel von 360°. Es liegt also auf der Hand, den Faktor b für die ähnlichen Kreiskonstruktionen auch zu definieren als das Verhältnis zwischen dem Winkel, unter dem vom Zentrum aus der wirkliche Kreis gesehen wird und einem Winkel von 360°. Nennen wir diesen ersten Winkel ω, so ist also:

$$b = \frac{\omega}{360^0} \tag{43}$$

Nimmt man nun einen willkürlichen Kreis (ρ) aus der Kreiskonstruktion heraus, so ist:

$$\sin\frac{1}{2}\omega = \frac{r_\rho}{\varrho_\rho} = \frac{a^\rho r_o}{a^\rho \varrho_o} = \frac{r_o}{\varrho_o} \tag{44}$$

woraus folgt, daß in dem ähnlichen Kreissystem der Winkel ω für alle Kreise einen konstanten Wert besitzt; dasselbe ist dann nach (43) auch für den Faktor b der Fall.

Aus den Beziehungen, die wir in § 3 dieses Kapitels ableiteten, ergibt sich dann weiter:

$$\sin\frac{1}{2}\omega = \frac{r_o}{\varrho_o} = \frac{\sqrt{1+a^{2m}-2\,a^m\cos m\,\alpha}}{1+a^m} = \frac{\sqrt{1+a^{2n}-2\,a^n\cos n\,\alpha}}{1+a^n}$$

woraus man folgern kann:

$$\cos\frac{1}{2}\omega = \pm 2\,\frac{\sqrt{a^m}}{1+a^m}\cos\frac{m\,\alpha}{2} = \pm 2\,\frac{\sqrt{a^n}}{1+a^n}\cos\frac{n\,\alpha}{2} \tag{45}$$

Sind für ein ähnliches System von tangierenden Kreisen auf einer Ebene die Werte von a und α bekannt, dann gibt Formel (45) denjenigen von ω und Formel (43) denjenigen von b.

Obwohl sich also die Beziehung zwischen b und α nicht in eine so einfache Form schreiben läßt, wie das für die regelmäßigen Kreissysteme der Fall war, so kann man doch bei einem bestimmten Kontakte m und n für jeden Wert von α mittels Formel (40) den zugehörigen von a und darauf mittels der Formeln (45) und (43) denjenigen von b finden. Es muß also auch hier möglich sein, die Beziehung zwischen b und α graphisch darzustellen.

§ 6. Die Neigung der m- und n-zeiligen Spirale. Es werden in den folgenden Paragraphen nun einige Haupteigenschaften der ähnlichen Kreissysteme abgeleitet werden. Zuerst wollen wir nachweisen, daß, wenn $n > m$ ist, die n-zeilige Spirale steiler sein wird als die m-zeilige.

Es läßt sich Formel (40) auch in folgender Weise schreiben:

$$\frac{\cos\frac{\delta_m}{2}}{\cos\frac{\delta_n}{2}} = \pm\frac{1+a^m}{1+a^n}\sqrt{a^{n-m}}$$

Da nun δ_m und δ_n kleiner als 180° sind, so sind $\frac{\delta_m}{2}$ und $\frac{\delta_n}{2}$ spitze

Winkel und es wird $\frac{\cos\frac{\delta_m}{2}}{\cos\frac{\delta_n}{2}}$ positiv sein. Also hat in dieser Formel nur das $+$Zeichen Geltung. Weil darin aber $a<1$ ist, so muß auch das zweite Glied notwendig kleiner als 1 sein und es wird:

$$\cos\frac{\delta_m}{2} < \cos\frac{\delta_n}{2}$$

woraus folgt:

$$\delta_m > \delta_n \tag{46}$$

Die Gleichung der m-zeiligen Spirale kann man in folgender Form schreiben:

$$\varrho = C_m\, e^{q_m \varphi}$$

wenn C_m und q_m die charakteristischen Konstanten dieser Spirale sind. Weil diese Spirale durch die Punkte o $(\varrho_o,\ \varphi_o)$ und m $(\varrho_m,\ \varphi_o \pm \delta_m)$ gehen muß, so ist dann:

$$\varrho_o = C_m\, e^{q_m \varphi_o} \qquad \varrho_m = C_m\, e^{q_m (\varphi_o \pm \delta_m)}$$

und hierin bestimmt die Richtung der Spirale, ob das Zeichen $+$ oder $-$ angewendet werden muß.

Durch Division dieser beiden Ausdrücke erhält man:

$$a^m = e^{\pm q_m \delta_m}$$

oder:

$$q_m = \pm\frac{m\, lg\, a}{\delta_m}$$

Wird der Winkel, welchen die Tangente der m-zeiligen Spirale mit dem Leitstrahl bildet, μ_m genannt, so ist:

$$tg\ \mu_m = \frac{1}{q_m} = \pm\frac{\delta_m}{m\, lg\, a}$$

Nennt man den entsprechenden Winkel für die n-zeilige Spirale μ_n, so wird:

$$tg\ \mu_n = \frac{1}{q_n} = \pm\frac{\delta_n}{n\, lg\, a}$$

In beiden Ausdrücken hängt das Zeichen, das verwendet werden muß, wie gesagt, von der Richtung der Spiralen ab. Muß in beiden das $+$Zeichen verwendet werden, so werden, weil $a<1$ und also $lg\, a<0$ ist, μ_m und μ_n beide stumpf sein; muß dagegen das $-$Zeichen angewendet werden, so werden μ_m und μ_n spitz sein.

Wir haben nun in § 3 Kap. I dieses Abschnittes klar gelegt, daß, wenn man von der Richtung der Spirale absieht, man unter der Neigung immer den spitzen Winkel verstehen kann, der sich zwischen dem verlängerten Leitstrahl und der Tangente befindet. Diesen spitzen Winkel bekommt man also, wenn man in obigen Formeln das $-$Zeichen gebraucht. Weil nun aber nach (46) $\delta_m > \delta_n$ ist und $m<n$, und also $\frac{\delta_m}{m\, lg\, a} > \frac{\delta_n}{n\, lg\, a}$, so wird:

$$tg\ \mu_m < tg\ \mu_n$$

und folglich: $\mu_m < \mu_n$

sein, d. h. die n-zeilige Spirale wird steiler verlaufen als die m-zeilige.

Bei dem dreizähligen Kontakte m, n und $(m+n)$ kann man in gleicher Weise ableiten, daß:

$$\mu_m < \mu_n < \mu_{m+n}$$

Dies bedeutet, daß die $(m+n)$-zeilige Spirale die steilste ist und darauf die n-zeilige folgt.

Ebenso findet man, daß bei dem dreizähligen Kontakte $(n-m)$, m und n die n-zeilige die steilste ist.

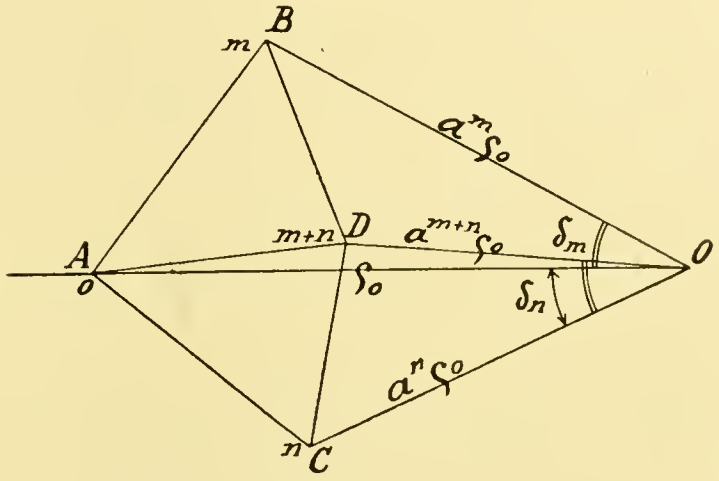
§ 7. Die Richtung der Kontaktspiralen beim dreizähligen Kontakte m, n und $(m+n)$. Wenn in Fig. 26 die Punkte A, B, C und D die Mittelpunkte der Kreise o, m, n und $(m+n)$ darstellen, so werden unter der Annahme eines Kontaktes m, n und $(m+n)$ die Seiten des Viereckes $ABDC$ gegeben durch:

$$AB = r_o(1+a^m)$$
$$AC = r_o(1+a^n)$$
$$BD = r_o\, a^m(1+a^n)$$
$$CD = r_o\, a^n(1+a^m)$$

Außerdem ist dann:

$$AD = r_o(1+a^{m+n})$$

Fig. 26.



Die Leitstrahlen nach den vier Punkten werden dargestellt durch:

$$OA = \varrho_o \quad OB = a^m \varrho_o \quad OC = a^n \varrho_o \quad OD = a^{m+n} \varrho_o$$

Hieraus folgt nun:

$$\triangle ODC \infty \triangle OBA$$

Es ist ja:

$$OD:OB = OC:OA = DC:BA = a^n$$

also:

$$\angle DOC = \angle BOA$$

oder:

$$\angle DOC = \delta_m$$

Nach (46) ist weiter:

$$\delta_{m+n} < \delta_n < \delta_m$$

Wenn man nun in Fig. 26 die Punkte B, C und D so zu zeichnen versucht, daß diesen beiden letzten Formeln genügt wird, dann ergibt sich sogleich, daß dies in der Weise nur möglich ist, daß B und C auf verschiedene Seiten von OA zu liegen kommen, während D auf derselben Seite wie B liegt. In unserer Figur ist die Lage richtig gezeichnet. Hieraus folgt also die wichtige Eigenschaft:

Beim Kontakte m, n und $(m+n)$ besitzt die $(m+n)$-zeilige Spirale dieselbe Richtung wie die m-zeilige und entgegengesetzte Richtung wie die n-zeilige.

§ 8. Die Richtung der Kontaktspiralen beim dreizähligen Kontakte $(n-m)$, m und n. Bei diesem dreizähligen Kontakt muß man zwei Fälle unterscheiden:

1) $n-m<m$ oder: $n<2m$

und 2) $n-m>m$ oder: $n>2m$

Betrachten wir zuerst den Fall 1 und nehmen wir an, die Punkte A, B, C und D in Fig. 27 stellen bei diesem Kontaktfall die Mittelpunkte der Kreise o, m, n und $(n-m)$ dar. Es läßt sich dann wieder nachweisen, daß:

$$\triangle OCB \infty \triangle ODA$$

und daß also

$$\angle BOC = \delta_{n-m}$$

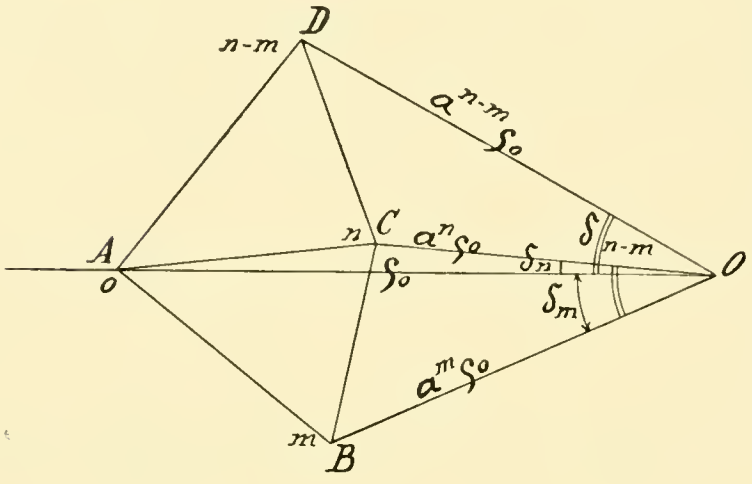
ist. Wenn aber

$$n-m<m$$

so ist nach (46):

$$\delta_{n-m} > \delta_m > \delta_n$$

Fig. 27.



Versucht man nun wieder die Punkte B, C und D so zu ordnen, daß diesen Formeln Genüge geleistet wird, so ist dies nur in der Weise möglich, daß B und C auf verschiedenen Seiten von OA liegen und D auf derselben Seite dieser Linie wie C. In Fig. 27 ist wieder die richtige Lage gezeichnet. Wenn also $n<2m$ ist, so muß beim dreizähligen Kontakte $(n-m)$, m und n, die $(n-m)$-zeilige Spirale der n-zeiligen homodrom, der m-zeiligen antidrom gewunden sein.

Bei der Betrachtung des zweiten Falles $n>2m$, findet man durch eine gleichartige Ableitung:

Wenn $n>2m$ ist, so muß beim dreizähligen Kontakte $(n-m)$, m und n, die $(n-m)$-zeilige Spirale sowohl der m-zeiligen als der n-zeiligen Spirale antidrom laufen; diese beiden letzten Spiralen sind also einander homodrom.

Es ergeben sich somit für die Richtung der Kontaktspiralen bei dreizähligem Kontakt für die ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene dieselben Regeln, die wir in § 3 Kap. II des ersten Abschnittes für die regelmäßigen Systeme tangierender Kreise auf einer Zylinderfläche ableiteten.

§ 9. Die Richtung der Kontaktspiralen bei zweizähligem Kontakte. Läßt man in Formel (40) die Divergenz α alle möglichen Werte durchlaufen, welche zwischen denjenigen bei dem dreizähligen Kontakte $(n-m)$, m und n und denjenigen bei dem dreizähligen Kontakte m, n und $(m+n)$ liegen, dann kann man mit den zugehörigen Werten von a eine kontinuierliche Reihe ähnlicher Kreissysteme mit dem Kontakte m und n beschreiben. Es wird nun deutlich sein, wenn die m- und die n-zeilige Spirale beim Kontakte $(n-m)$, m und n eine bestimmte Richtung besitzen, daß dann unmöglich beim Kontakte m, n und $(m+n)$ diese beiden

Richtungen umgekehrt sind. Wäre dies nämlich der Fall, so müßte man bei der kontinuierlichen Reihe eine Figur antreffen, in der die m- und die n-zeilige Spirale aneinander vorüber liefen und das ist ohne ein Schneiden der Kreise unmöglich.

Es folgen hieraus dieselben drei Schlüsse, zu denen wir in § 7 Kap. II des ersten Abschnittes für die Richtung der Kontaktspiralen bei zweizähligem Kontakt für die regelmäßigen Kreissysteme auf der Kreiszylinderfläche kamen.

Wir erwähnen noch, daß auch die Regeln, welche wir in § 8 desselben Kapitels für die Näherungswerte der Divergenz beim Kontakte m und n ableiteten, für die ähnlichen Kreissysteme wieder ganz die gleichen sind. Daraus folgt, daß die Limitdivergenz beim Fortrücken in einer Kontaktreihe p, q wiedergegeben wird durch $\frac{\chi\mu+\nu}{\chi p+q}\cdot 360^0$. (Siehe S. 59.)

§ 10. Die Verschiebungskurven. Wenn man in Formel (40) bei bestimmten Werten von m und n a kontinuierlich von 0 bis 1 zunehmen läßt, so wird man dadurch alle möglichen ähnlichen Kreiskonstruktionen mit diesem Kontakt durchlaufen. Es fragt sich nun wieder, welche Kurven werden die Mittelpunkte der Kreise beschreiben, wenn man dabei den Mittelpunkt einer der Kreise, wozu wir Kreis o wählen werden, als fest betrachtet. Diese Kurven werden wir dann wieder „Verschiebungskurven“ nennen.

Wenn wir in Gleichung (40) einsetzen: $a = \frac{\varrho_1}{\varrho_0}$ so wird dieselbe:

$$\frac{\cos\frac{m\alpha}{2}}{\cos\frac{n\alpha}{2}} = \pm\frac{1+\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^m}{1+\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^n}\sqrt{\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^{n-m}}$$

und da ϱ_0 konstant angenommen wird, so stellt diese Gleichung eine Beziehung dar, welche beim Kontakte m und n zwischen α und ϱ_1 bestehen muß. Nun sind α und ϱ_1 die Polarkoordinaten vom Mittelpunkte des Kreises 1, also stellt diese Formel die Verschiebungskurve dieses Punktes dar. Wenn man $\varrho_0 = 1$ setzt, so läßt sie sich noch in folgender Form schreiben:

$$\frac{\cos\frac{m\alpha}{2}}{\cos\frac{n\alpha}{2}} = \pm\frac{1+\varrho_1{}^m}{1+\varrho_1{}^n}\sqrt{\varrho_1{}^{m-n}} \qquad (47)$$

und sie stimmt dann ganz mit Formel (40) überein. Wenn man also die Beziehung zwischen a und α in Polarkoordinaten darstellt, so ergibt sie die Verschiebungskurven des Punktes 1.

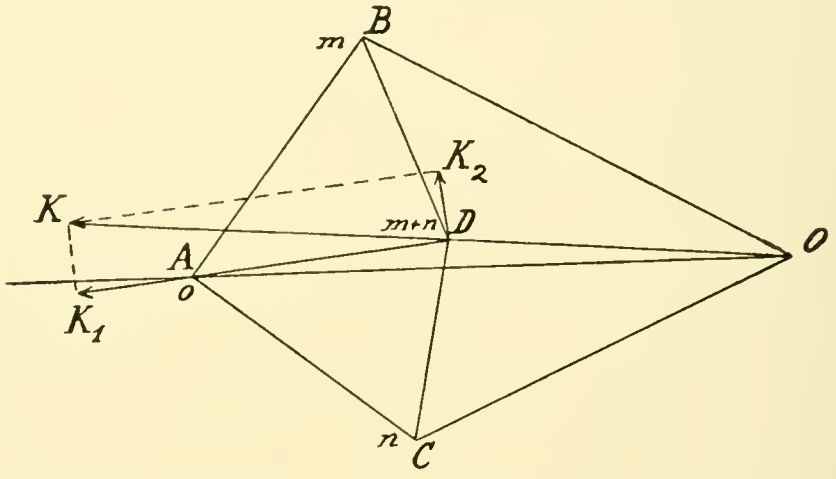
Setzt man in (47) $\alpha = \frac{\alpha_m}{m}$ und $\varrho_1 = \sqrt[m]{\varrho_m}$, so bekommt man die Gleichung der Verschiebungskurve des Punktes m (α_m, ϱ_m).

§ 11. Einführung von mechanischen Kräften. Läßt man bei einem bestimmten Kontakte m und n den Wert b kontinuierlich abnehmen, so kann man, nachdem der Kontakt m, n und $(m+n)$ erreicht ist, entweder in den Kontakt n und $(m+n)$ übergehen oder auch in den Kontakt m und $(m+n)$. Es wird dies bei der

Besprechung der Zahlenanwendungen noch näher erörtert werden. Durch eine kontinuierliche Zunahme von b muß man jedoch immer von einem Kontakte m und n ausgehend, in einen Kontakt $(n-m)$ und m übergehen. Sind also m und n aufeinander folgende Glieder einer Reihe p, q, dann muß man bei einer fortgesetzten Zunahme von b alle vorhergehenden Glieder dieser Kontaktreihe durchlaufen.

Denkt man sich nun die Kreise eines ähnlichen Kreissystems durch wirkliche Scheiben ersetzt, dann werden wir nachweisen, daß, falls man in allen Mittelpunkten der Scheiben eine vom Zentrum aus nach außen gerichtete Kraft annimmt, bei kontinuierlicher Abnahme von b notwendigerweise der Kontakt m, n und $(m+n)$ immer in einen solchen n und $(m+n)$ übergehen muß. In diesem Fall werden also auch bei Abnahme von b nur Glieder der Kontaktreihe m, n, $m+n$, $m+2n$ usw. auftreten.

Fig. 28.



Sind in Fig. 28 die Punkte A, B, C und D die Mittelpunkte der Scheiben o, m, n und $(m+n)$ beim Kontakte m, n und $(m+n)$, dann müssen diese Punkte, nach dem in § 7 dieses Kapitels Gesagten, so liegen, daß sich B und D auf derselben Seite von OA befinden, während C auf der anderen Seite liegt. Es stelle nun K die radial nach außen gerichtete Kraft vor, die im Mittelpunkte der Scheibe $(m+n)$ angreift. Denken wir uns einen Augenblick die Kontakte zwischen der Scheibe $(m+n)$ und den Scheiben m und n aufgehoben, dann kann man die Kraft K in eine solche K_1 zerlegen, welche den Normaldruck zwischen den Scheiben $(m+n)$ und o darstellt, und in eine solche K_2, welche den Mittelpunkt des Kreises $(m+n)$ in einer Richtung senkrecht zu K_1 fortbewegt. Es wird nun einleuchten, daß, falls einer der Kontakte zwischen $(m+n)$ und m oder zwischen $(m+n)$ und n fortexistieren, der andere aufgehoben werden muß, nur der Kontakt zwischen $(m+n)$ und m, d. i. der n-zeilige, bestehen bleibt.

Auch hierin zeigen also die ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene große Übereinstimmung mit den regelmäßigen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche. (Man vergleiche dazu S. 67.)

Kapitel IV. Ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene. Zahlenanwendungen.

§ 1. Die Beziehung zwischen a und α für zweizählige Kontakte und deren graphische Darstellung. Tabelle XIII enthält in der zweiten Kolumne die Formeln, in welche die Be-

Tabelle XIII.

Zweizählige Kontakte bei ähnlichen Kreissystemen auf einer Ebene.

Kontakte:	Beziehung zwischen a und α:	Rechtwinklige Kontakte:	Andere merkwürdige Kontaktfälle:
1 u. 2	$\pm\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=\frac{1+a}{1+a^2}\sqrt{a}$	$\alpha = 132^0\,46'\,47''$ $a = 0{,}251077$ $\omega = 142^0\,34'\,28''$ $b = 0{,}39604$	$\alpha=\frac{2}{5}\cdot 360^0 = 144^0$ $a = 0{,}1192$ $\omega = 158^0\,1'\,6''$ $b = 0{,}4389$
2 u. 3	$\pm\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{3}{2}\alpha}=\frac{1+a^2}{1+a^3}\sqrt{a}$	$\alpha = 139^0\,37'\,25''$ $a = 0{,}61184$ $\omega = 94^0\,34'\,47''$ $b = 0{,}262721$	$\alpha=\frac{5}{13}\cdot 360^0 = 138^0\,28'$ $a = 0{,}5720$ $\omega = 99^0\,38'\,24''$ $b = 0{,}2768$
3 u. 5	$\pm\frac{\cos\frac{3}{2}\alpha}{\cos\frac{5}{2}\alpha}=\frac{1+a^3}{1+a^5}\cdot a$	$\alpha = 137^0\,26'$ $a = 0{,}8297$ $\omega = 60^0\,32'\,15''$ $b = 0{,}1682$	
5 u. 8	$\pm\frac{\cos\frac{5}{2}\alpha}{\cos 4\alpha}=\frac{1+a^5}{1+a^8}\sqrt{a^3}$	$\alpha = 137^0\,34'$ $a = 0{,}9320$ $\omega = 37^0\,46'$ $b = 0{,}1049$	
1 u. 3	$\pm\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}}=\frac{1+a}{1+a^3}\cdot a$	$\alpha = 104^0\,45'$ $a = 0{,}497$ $\omega = 109^0\,48'$ $b = 0{,}305$	$\alpha=\frac{1}{3}\cdot 360^0 = 120^0$ $a = 0{,}3820$ $\omega = 126^0\,52'\,10''$ $b = 0{,}3524$
3 u. 4	$\pm\frac{\cos\frac{3\alpha}{2}}{\cos 2\alpha}=\frac{1+a^3}{1+a^4}\sqrt{a}$	$\alpha = 101^0\,6'$ $a = 0{,}776$ $\omega = 69^0\,59'$ $b = 0{,}194$	
1 u. 4	$\pm\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos 2\alpha}=\frac{1+a}{1+a^4}\sqrt{a^3}$		$\alpha=\frac{1}{4}\cdot 360^0 = 90^0$ $a = 0{,}633$ $\omega = 92^0\,47'$ $b = 0{,}258$
2 u. 5	$\pm\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{5}{2}\alpha}=\frac{1+a^2}{1+a^5}\sqrt{a^3}$		$\alpha=\frac{2}{5}\cdot 360^0 = 144^0$ $a = 0{,}74196$ $\omega = 78^0\,31'$ $b = 0{,}2181$

ziehung (40) übergeht, wenn man für m und n die Zahlen der ersten Kolumne einsetzt. Wenn man nun mit diesen Formeln bei bestimmten Werten von α die zugehörigen von a berechnen will, so ist das meistens mit Schwierigkeiten verknüpft, weil die Gleichungen nur selten eine einfache Lösung zulassen. Dabei bedenke man noch, daß, will man die Beziehung (40) graphisch darstellen, dazu eine ganze Reihe Berechnungen notwendig ist. Wir haben darum in allen Fällen eine graphische Lösung in Anwendung gebracht. Dazu setzen wir:

$$\frac{\cos\frac{m}{2}\alpha}{\cos\frac{n}{2}\alpha} = F \quad \text{und} \quad \frac{1+a^m}{1+a^n}\sqrt{a^{n-m}} = F'$$

und stellen mit ein und demselben System von Koordinaten diese beiden Gleichungen graphisch dar, indem wir das eine Mal auf die Abszissenachse die Werte von α, auf die Ordinatenachse diejenigen von F abtragen, das andere Mal auf die Abszissenachse die Werte von a, auf die Ordinatenachse die von F'. Wenn man dann auf der ersten Kurve zu einem bestimmten Wert von α den zugehörigen von F aufsucht und darauf auf der zweiten denjenigen Punkt, der dieselbe Ordinate besitzt, und nun den Abszissenwert für diesen Punkt abliest, so hat man damit diejenige Größe a gefunden, welche in der Gleichung (40) der in Betracht gezogenen von α entspricht.

Indem man für eine Serie Werte von α die zugehörigen von a in dieser Weise aufsucht, kann man die Formel (40) graphisch darstellen.

Wünscht man bei einem bestimmten Wert von α eine größere Genauigkeit für a zu erreichen als man mit dieser ersten graphischen Annäherung bekommt, so kann man mit Hilfe des zuerst gefundenen Wertes von a die Formel $\frac{1+a^m}{1+a^n}\sqrt{a^{n-m}} = F'$ in der Nähe dieses Wertes in größerem Maßstab darstellen, um dann mit dieser Kurve den Wert von a aufzusuchen, welcher übereinstimmt mit einem Ordinaten von demjenigen Wert F, welcher aus der ersten Formel hervorgeht. Wenn nötig, dann kann man diese Annäherung nochmals wiederholen. In der vierten Kolumne der Tabelle XIII sind in dieser Weise bei verschiedenen Kontakten einige Annäherungen für a für bestimmte Werte von α ausgeführt. Die Werte für ω und b sind hieraus mittels der Formeln (45) und (43) berechnet.

Was die graphische Darstellung der Formel (40) für verschiedene Werte von m und n anbelangt, so muß zunächst erwähnt werden, daß man in dieser Formel keine kleineren Werte als $m = 1$ und $n = 2$ einsetzen darf. Für $m = 1$ und $n = 1$ wird dieselbe nämlich eine Identität, und für $m = 0$ und $n = 1$ eine Unmöglichkeit. Es leuchtet übrigens auch schon von selbst ein, daß der Kontakt 1 und 1, ebensowenig wie derjenige 0 und 1 bei ähnlichen Systemen von tangierenden Kreisen auf einer Ebene möglich ist. Ein Kontakt 1 und 1 sollte ja bedeuten, daß ein Kreis einen anderen auf derselben Ebene in zwei verschiedenen Punkten be-

rührt, während ein Kontakt 0 und 1 ausdrücken sollte, daß ein Kreis auf einer Ebene sich selbst tangiert.

Der einfachste Kontaktfall ist also derjenige mit dem Kontakte 1 und 2, die Formel (40) wird dafür (siehe Tabelle XIII)

$$\pm \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \frac{1+a}{1+a^2}\sqrt{a}.$$

Die Kurve, welche in der graphischen Darstellung diesem Kontakte entspricht, fängt bei $a = 0$ an, denn setzt man diesen Wert in die Gleichung ein, so findet man $\alpha = 180^0$. In der graphischen Darstellung I der Tafel VII ist der entsprechende Punkt mit 1, 1 und 2 bezeichnet. Wir werden nämlich nachher besprechen, daß dieser Fall als Grenzfall von dem zweizähligen Kontakte 1 und 2 angesehen werden kann. Die Kurve für den Kontakt 1 und 2 endet an der anderen Seite in dem Punkt $a = 1$, $\alpha = 120^0$, jedoch entspricht nur ein Teil derselben möglichen Kreissystemen, denn im Punkte 1, 2 und 3 werden die Kurven für den Kontakt 2 und 3 und den Kontakt 1 und 3 sich anschließen.

Man kann also durch eine kontinuierliche Zunahme von a aus dem Kontakte 1 und 2 sowohl in den Kontakt 2 und 3 als in den Kontakt 1 und 3 übergehen.

Übrigens bedarf diese Darstellung weiter keiner ausführlichen Besprechung. Es sei nur nochmals erwähnt, daß die Grenzwerte, welche für den Fall $a = 1$ erreicht werden, ganz dieselben sind wie diejenigen, welche bei den regelmäßigen Kreissystemen auf einer Kreiszylinderfläche für $b = 0$ erreicht werden (man siehe S. 121).

§ 2. Die Berechnung von a und α für dreizählige Kontakte. Wir sagten schon, daß eine direkte Lösung der Gleichungen (41) und (42) unmöglich ist. Auch hier sind wir deshalb auf eine Annäherungsrechnung angewiesen. Schon durch Ablesen der Schnittpunkte der verschiedenen Kurven in der soeben besprochenen graphischen Darstellung findet man für die Werte von a und α bei dreizähligen Kontakten Annäherungswerte. Wünscht man jedoch diese Werte genauer zu berechnen, so kann man das in der Weise tun, daß man zwei der Kurven in der Nähe des Schnittpunktes, mit Hilfe des Annäherungswertes, in größerem Maßstab abbildet und dann mit größerer Genauigkeit den Wert des Schnittpunktes abliest. Man kann aber auch die NEWTONsche Annäherungsmethode dafür in Anwendung bringen[1]). Beide Methoden sind von mir verwendet worden, weil eine genaue Berechnung dieser Werte erwünscht und auf diese Weise eine Kontrolle möglich war. In jedem Falle aber erfordert die Berechnung viel Zeit, die beiden Methoden unterscheiden sich in dieser Hinsicht kaum.

---

1) Sind a_1 und α_1 Näherungswerte für die Wurzeln der Gleichungen:

$$f(a, \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(a, \alpha) = 0,$$

so findet man die ersten Korrektionen (Δa_1 und $\Delta \alpha_1$) dieser Werte durch Lösung der folgenden Gleichungen:

$$\Delta a_1 \frac{\delta f(a_1, \alpha_1)}{\delta a_1} + \Delta \alpha_1 \frac{\delta f(a_1, \alpha_1)}{\delta \alpha_1} = -f(a_1, \alpha_1)$$

$$\Delta a_1 \frac{\delta \varphi(a_1, \alpha_1)}{\delta a_1} + \Delta \alpha_1 \frac{\delta \varphi(a_1, \alpha_1)}{\delta \alpha_1} = -\varphi(a_1, \alpha_1)$$

Man findet das Resultat dieser Rechnungen in der Tabelle XIV niedergelegt. Es sind außerdem die zugehörigen Werte von ω und b, welche mit Hilfe der Formeln (45) und (43) berechnet wurden, hinzugefügt[1]).

Tabelle XIV.

Dreizählige Kontakte bei ähnlichen Kreissystemen auf einer Ebene.

Kontakte:	Divergenz (α):	Hauptverhältnis (a):	ω:	b:
1, 1 u. 2	180°	0	180°	0,500000
1, 2 u. 3	128° 10′ 22″	0,346013	135° 5′ 17″	0,375244
2, 3 u. 5	142° 6′ 53″	0,730000	82° 31′ 12″	0,229222
3, 5 u. 8	135° 55′ 5″	0,89140	51° 25′ 26″	0,142844
5, 8 u. 13	138° 8′ 22″	0,95816	31° 41′ 50″	0,08804
1, 3 u. 4	96° 52′, 3	0,6161	99° 45′	0,2771

§ 3. Die Beziehung zwischen b und α und deren graphische Darstellung. Es sind in der zweiten Kolumne der Tabelle XV einige Werte von α und b, welche dreizähligen Kontakten in „regelmäßigen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche“ entsprechen, wiederholt worden (man vergleiche die Tabellen II und IV auf S. 38 und S. 53), während in der dritten Kolumne dasselbe für die Werte von b und α bei den übereinstimmenden Kontakten in „ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Ebene“ geschehen ist (man vergleiche Tabelle XIV).

Tabelle XV.

Werte von α und b für dreizählige Kontakte bei Kreissystemen auf der Zylinderfläche und auf der Ebene.

Kontakte:	Zylinderfläche:	Ebene:
1, 1 u. 2	$\alpha = 180°$ $b = 0{,}57735$	$\alpha = 180°$ $b = 0{,}500000$
1, 2 u. 3	$\alpha = 128° 34′ 37″$ $b = 0{,}37797$	$\alpha = 128° 10′ 22″$ $b = 0{,}375244$
2, 3 u. 5	$\alpha = 142° 6′ 14″$ $b = 0{,}22942$	$\alpha = 142° 6′ 53″$ $b = 0{,}229222$
3, 5 u. 8	$\alpha = 135° 55′ 6″$ $b = 0{,}14285$	$\alpha = 135° 55′ 5″$ $b = 0{,}142844$
5, 8 u. 13	$\alpha = 138° 8′ 22″$ $b = 0{,}08804$	$\alpha = 138° 8′ 22″$ $b = 0{,}08804$
1, 3 u. 4	$\alpha = 96° 55′$ $b = 0{,}2773$	$\alpha = 96° 52′, 3$ $b = 0{,}2771$

1) Die Arbeit, welche diese und andere abschweifende Berechnungen gaben, wurde mir wesentlich erleichtert durch die freundliche Unterstützung meiner Schwester AGATHA, die manche Detailrechnungen in liebenswürdiger Weise für mich ausführte.

Tabelle XVI enthält in der zweiten Kolumne für bestimmte zweizählige Kontakte in „regelmäßigen Kreissystemen auf einer Kreiszylinderfläche“ einige zusammengehörige Werte von α und b und in der dritten Kolumne solche Werte von α und b bei denselben zweizähligen Kontakten in „ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Ebene“ und zwar sind die Werte von α in beiden Fällen gleich groß angenommen.

Tabelle XVI.

Werte von α und b für zweizählige Kontakte bei Kreissystemen auf der Zylinderfläche und auf der Ebene.

Kontakte:	Zylinderfläche:	Ebene:
1 u. 2	$\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$ $b = 0{,}4472$	$\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$ $b = 0{,}4389$
2 u. 3	$\alpha = \frac{5}{13} \cdot 360^0 = 138^0\,28'$ $b = 0{,}27735$	$\alpha = \frac{5}{13} \cdot 360^0 = 138^0\,28'$ $b = 0{,}2768$
1 u. 3	$\alpha = \frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$ $b = 0{,}35355$	$\alpha = \frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$ $b = 0{,}3524$
1 u. 4	$\alpha = \frac{1}{4} \cdot 360^0 = 90^0$ $b = 0{,}2582$	$\alpha = \frac{1}{4} \cdot 360^0 = 90^0$ $b = 0{,}258$
2 u. 5	$\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$ $b = 0{,}2182$	$\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$ $b = 0{,}2181$

Aus der Tabelle XV wird man nun zunächst ersehen, daß eine sehr große Übereinstimmung zwischen den Werten von b und α der zweiten und dritten Kolumne besteht. Beim Kontakt 1, 1 und 2 ist die Divergenz für Zylinderfläche und Ebene 180^0, der zugehörige Wert von b zeigt hier aber eine ziemlich bedeutende Differenz : 0,07735. Es muß jedoch bemerkt werden, daß diese die größte ist, die für irgendwelche dreizähligen Kontakte aufgefunden werden kann. Für den dreizähligen Kontakt 1, 1 und 2 ist die Differenz zwischen den Werten für α auf Zylinderfläche und Ebene 24' 15", und dies ist wieder die größte Abweichung der Divergenzen, welche für irgendwelche dreizähligen Kontakte aufzufinden sein wird. Die Werte von b haben sich für diesen Kontaktfall bereits sehr bedeutend genähert, die Differenz beträgt jetzt 0,00273. Beim dreizähligen Kontakte 2, 3 und 5 ist die Annäherung sowohl für α als für b wieder merkbar fortgeschritten, dasselbe gilt auch für die höheren Kontakte 3, 5 und 8; 5, 8 und 13. Im letzten Fall ist die Differenz der Werte von α sogar kleiner als 1" geworden. Daß auch eine gleiche Annäherung der Werte von α und b für dreizählige Kontakte der Nebenreihen merkbar ist, wird noch in dieser

Tabelle durch die Werte dieser Größen für den Kontakt 1, 3 und 4 veranschaulicht.

Aus der Tabelle XVI ist ferner abzulesen, daß auch die Werte von b, die bei zweizähligen Kontakten denselben Werten von α entsprechen, für die Konstruktionen auf der Zylinderfläche und auf der Ebene nur wenig voneinander abweichen, und daß diese Abweichung kleiner wird, wenn höhere Kontakte betrachtet werden.

Was nun in diesen Tabellen durch Zahlen veranschaulicht wurde, kann mittels der graphischen Darstellung der Beziehung zwischen b und α noch merklich verdeutlicht werden. Es muß dabei zuerst bemerkt werden, daß b für die ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene niemals einen größeren Wert als 0,5 besitzen kann; es bedeutet dies ja, daß ein Kreis vom Pol aus unter einem Winkel von 180^0 gesehen wird, d. i. der größte Winkel, unter dem man überhaupt einen Kreis sehen kann.

Die graphische Darstellung für die Kreiskonstruktionen auf der Ebene fängt also in dem Punkt 1, 1 und 2 an, welcher den Werten $\alpha = 180^0$, $a = 0{,}5$ entspricht. Hier entspringt die Linie, welche die Beziehung zwischen b und α für den Kontakt 1 und 2 darstellt. Man findet dieselbe in der graphischen Darstellung III auf Tafel III mit dem Wort „Ebene“ angegeben. Auf derselben Darstellung ist auch noch die Parabel wiederholt, welche die Beziehung zwischen b und α für den Kontakt 1 und 2 bei den regelmäßigen Kreiskonstruktionen auf der Kreiszylinderfläche darstellt; dieselbe ist mit dem Wort „Zylinderfläche“ bezeichnet. Man sieht hieraus, wie die Abweichung für die übereinstimmenden Werte von b und α im Anfang der beiden Kurven zwar ziemlich bedeutend ist, aber daß dieselbe, je mehr man sich dem dreizähligen Kontakt 1, 2 und 3 nähert, kleiner wird und schließlich bei dem Maßstab, in welchem unsere Darstellung entworfen wurde, gar nicht mehr in Betracht kommt.

Wenn man nun auch für weitere zweizählige Kontakte die Kurven für die Beziehung zwischen b und α aufzeichnet, so ergibt sich, wie man nach dem Besprochenen leicht einsieht, daß diese Kurven in dieser Darstellung gar nicht von denjenigen zu unterscheiden sind, welche man in der graphischen Darstellung II auf Tafel II antrifft, und welche für die Kreiskonstruktionen auf der Zylinderfläche gelten. Diese letzte Darstellung kann also, wenn man darin nur die Kurve für die Kontakte 1 und 2 durch diejenigen aus der Darstellung III Tafel III ersetzt und sie in dem Punkt $\alpha = 180^0$, $a = 0{,}5$ enden läßt, auch für die Beziehung zwischen b und α für „ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene“ Anwendung finden. Es wird sich dieses Resultat als von größter Wichtigkeit für die Anwendung unserer mathematischen Betrachtungen auf die Theorie der Blattstellung herausstellen.

Um jedem Mißverständnis vorzubeugen, bemerken wir noch, daß das Zusammenfallen der beiden Kurvensysteme vom Punkt 1, 2 und 3 ab gerechnet, in Wirklichkeit nur scheinbar ist und dadurch verursacht wird, daß die Darstellung in ziemlich kleinem Maßstabe entworfen ist. Theoretisch werden die Kurven, welche für Kreiszylinderfläche und für Ebene gelten, nur für $m = \infty$, $n = \infty$, d. i. $b = o$, identisch sein. Es hat das natürlich für den praktischen Wert unseres Resultats keinen Einfluß.

Denkt man sich nun die graphische Darstellung II Tafel II in der oben angegebenen Weise geändert und darauf für alle möglichen Werte von m und n vollständig ausgezeichnet, dann kann man daraus wieder in derselben Weise eine Reihe Schlüsse ziehen, wie wir das Seite 65 u. f. für die ursprüngliche Darstellung taten. Es läßt sich z. B. sofort einsehen, daß es möglich ist, 2 verschiedene ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene zu konstruieren, für die $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$, nur ein einziges System, für welches $\alpha = \frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$, drei solche, für welche $\alpha = \frac{3}{8} \cdot 360^0 = 135^0$ ist. Ebenso wird es einleuchten, daß mit Werten von b, welche zwischen 0,5 (Kontakt 1, 1 und 2) und 0,375244 (Kontakt 1, 2 und 3) liegen, nur Systeme mit dem Kontakte 1 und 2 möglich sind, während mit Werten zwischen 0,375244 und 0,2771 (Kontakt 1, 3 und 4) sowohl Systeme mit dem Kontakte 1 und 3 als auch solche mit dem Kontakte 2 und 3 auszuführen sind, usw.

§ 4. Die Ursache der Übereinstimmung in den graphischen Darstellungen der Beziehungen zwischen b und α. Wir werden jetzt die Frage zu beantworten versuchen, warum die graphischen Darstellungen der Beziehungen zwischen b und α für Kreiszylinderfläche und Ebene so verhältnismäßig geringe Abweichungen voneinander zeigen.

Wenn wir von den regelmäßigen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche mit Hilfe der Methode der kleinen ähnlichen Rechtecke eine konforme Abbildung auf einer Ebene anfertigen, so gehen, wie schon öfters gesagt wurde, die Kreise in Quasikreise über, die einander in gleicher Weise wie die Kreise selbst tangieren. Stellt man nun die Beziehung zwischen b und α für diese Systeme von Quasikreisen graphisch dar, so wird es nach dem, was wir von dem Wert b für diese Kurven sagten (man siehe § 5 des vorigen Kapitels), deutlich sein, daß diese Darstellung mit derjenigen für die Kreiskonstruktionen auf der Kreiszylinderfläche identisch ist. Nun kann, wie früher bemerkt wurde, ein Quasikreis nur, wenn er unendlich klein wird, in einen wirklichen Kreis übergehen, jedoch kann er auch bei endlicher Größe so sehr einem solchen gleichen, daß man ihn praktisch als wirklichen Kreis betrachten kann. Es steht sogar ein Quasikreis, für den $b = 0{,}35$ ist, in der Form einem wirklichen Kreis ziemlich nahe. Man kann sich also die Konstruktionen, welche mit Quasikreisen, für die b kleine Werte besitzt, durch verhältnismäßig geringe Änderungen in solche mit wirklichen Kreisen übergeführt denken. Damit ist also die angedeutete Übereinstimmung erklärt.

Wir bemerken schließlich noch, daß man mit Quasikreisen natürlich alle Systeme konstruieren kann, die mit wirklichen Kreisen auf einer Kreiszylinderfläche entworfen werden können, also auch solche mit dem Kontakte 1 und 1 oder dem Kontakte 0 und 1[1]).

§ 5. Die Verschiebungskurven. Die Tafel VIII enthält die graphische Darstellung der Beziehungen zwischen a und α in Polarkoordinaten und folglich nach § 10 des vorigen Kapitels die

1) Die Form, welche der Quasikreis dabei zeigt, hat einige Ähnlichkeit mit derjenigen der „Folioïde“, welche Kurve später besprochen wird, jedoch weicht sie davon in wesentlichen Punkten ab.

Verschiebungskurven des Punktes 1. Es ist bei dieser Darstellung die Hauptspirale als rechtsgewunden angenommen; Punkt o befindet sich in einer Entfernung von 10 cm vom Zentrum (er fällt mit dem Punkt o der Darstellung zusammen). Man erhält den vollständigen geometrischen Ort der Punkte, mit denen Punkt 1 zusammenfallen kann, indem man von unserer Figur auch noch das Spiegelbild in bezug auf die Linie $0^0 - 180^0$ entwirft. (Man hat sich natürlich die Darstellung wieder für alle möglichen Kontakte ausgeführt zu denken.)

Es hat diese graphische Darstellung gewisse Vorzüge vor derjenigen mit orthogonalen Koordinaten, indem man die verschiedenen Divergenzen jetzt besser miteinander vergleichen kann. Eine besondere Beschreibung kann wohl als überflüssig betrachtet werden, nur ein Punkt möge noch näher an der Hand dieser Darstellung erörtert werden. Denkt man sich den Punkt 1 in kontinuierlicher Weise die Kurve für die Kontakte 1 und 2 entlang bewegt, so wird sich dieser Punkt, sobald er im Punkt 1, 2 und 3 angelangt ist, entweder die Kurve 2 und 3 oder die Kurve 1 und 3 entlang weiter bewegen können. Es wird nun wieder einleuchten, daß, falls auf Punkt 1 eine radial gerichtete Kraft nach außen wirkt, die steilste Kurve, also 2 und 3, durchlaufen werden muß, ein Schluß, den wir früher in anderer Weise ableiteten (siehe S. 122).

§ 6. Anfertigung und Beschreibung der geometrischen Konstruktionen. Obwohl die Anfertigung der „ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene", sobald die Werte m, n, a und α gegeben sind, aus unseren Ableitungen unmittelbar folgt, so wollen wir doch noch kurz den einfachsten Weg zu dieser Konstruktion angeben.

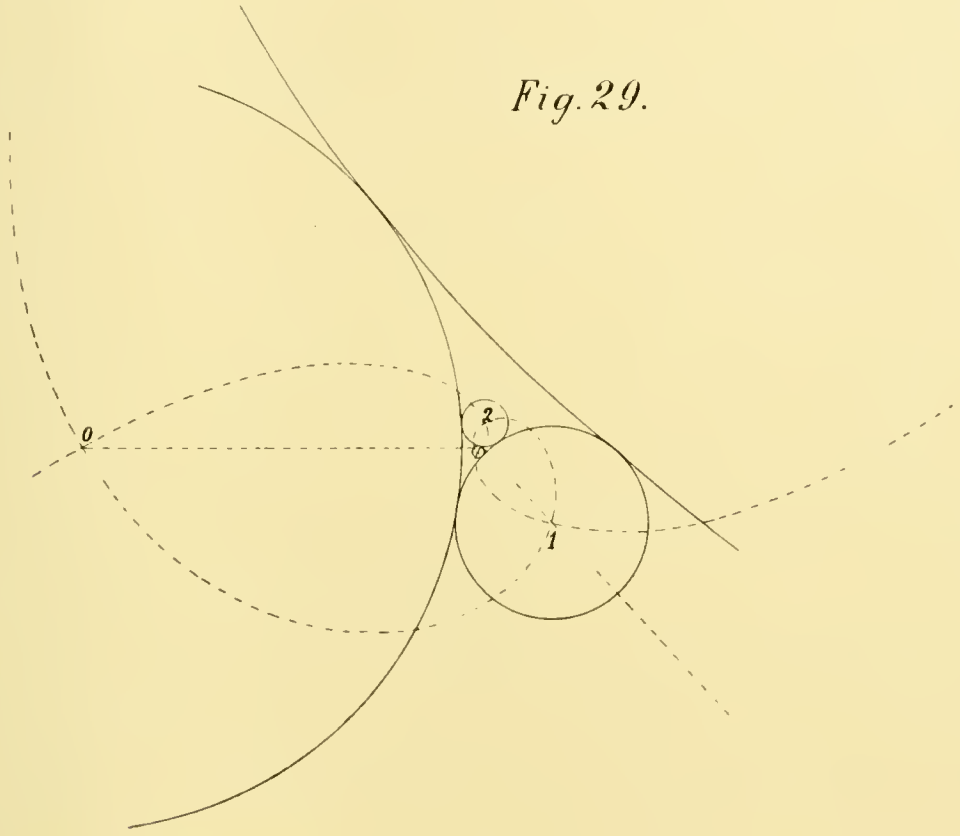
Man zeichne ein Strahlenbüschel, dessen Strahlen untereinander einen Winkel α bilden, und nehme auf dem ersten Strahl einen Punkt o an in willkürlicher Entfernung ϱ_o vom Zentrum. Darauf nehme man auf den anderen Strahlen Punkte, die in Abständen $a\,\varrho_o$, $a^2\,\varrho_o$, $a^3\,\varrho_o$, usw. vom Zentrum liegen und bezeichne diese mit 1, 2, 3 usw. Nun verbinde man den Punkt o mit dem Punkt m und halbiere den Winkel zwischen den Leitstrahlen nach diesen beiden Punkten; schneidet diese Teillinie die Verbindungslinie in einem Punkt P (man siehe Fig. 25 S. 113), so ist $o\,P$ der Strahl für den Kreis o, $m\,P$ der Strahl für den Kreis m. Verbindet man o mit n, so findet man in gleicher Weise den Strahl des Kreises n. Indem man 1 mit $(m+1)$ und mit $(n+1)$ verbindet, kann man auch die Strahlen der Kreise 1, $(m+1)$ und $(n+1)$ finden, und auf diese Weise kann man alle gewünschten Kreise in das System einzeichnen.

Es sind auf Taf. VI eine Reihe derartiger Konstruktionen reproduziert worden und zwar geben die Figuren 1 bis 9 Systeme mit Kontakten aus der Hauptreihe wieder, die Figuren 10 bis 15 solche mit Kontakten aus den Nebenreihen. (Für die dafür notwendigen Zahlen siehe man die Tabellen XIII und XIV auf S. 123 und 126.) Der einfachste Kontaktfall: der dreizählige Kontakt 1, 1 und 2, welcher als Ausgangspunkt aller Konstruktionen betrachtet werden kann, ist weggelassen, weil derselbe nur durch einen einzigen Kreis dargestellt wird, welcher durch das Zentrum hindurchgeht.

Bei allen auf der Tafel gegebenen Konstruktionen ist $\varrho_o = 2{,}5$ cm angenommen und die Kontaktspiralen sind durch gestrichelte Linien dargestellt; außerdem sind in diesen Figuren die Leitstrahlen nach den Punkten 0 und 1 gezogen, wodurch es ermöglicht wird, die

Divergenz abzulesen. Fig. 1 der Tafel gibt dasjenige System wieder, welches bei dem Kontakte 1 und 2 eine Divergenz $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$ aufweist. Die wahre Natur dieses Kontaktfalls wird deutlich werden, wenn man sich auch noch den Kreis -1 konstruiert denkt, welcher die Kreise 0 und 1 berühren wird, den Kreis 2 jedoch nicht erreicht. Fig. 2 stellt den Fall dar, bei welchem mit demselben Kontakte 1 und 2 die ein- und die zweizeiligen Kontaktspiralen einander rechtwinklig schneiden. Die Berechnung dieses Falls und anderer mit rechtwinkligen Kontakten wird im folgenden Kapitel gegeben. Es sei wieder darauf hingewiesen, daß der Kreis -1 den Kreis 2 nicht berührt, wie das aus Fig. 29, worin diese Konstruktion

Fig. 29.



Ähnliches System tangierender Kreise mit rechtwinkligem Kontakt 1 und 2
($\alpha = 132^0\,46'\,47''$, $a = 0{,}251\,077$).

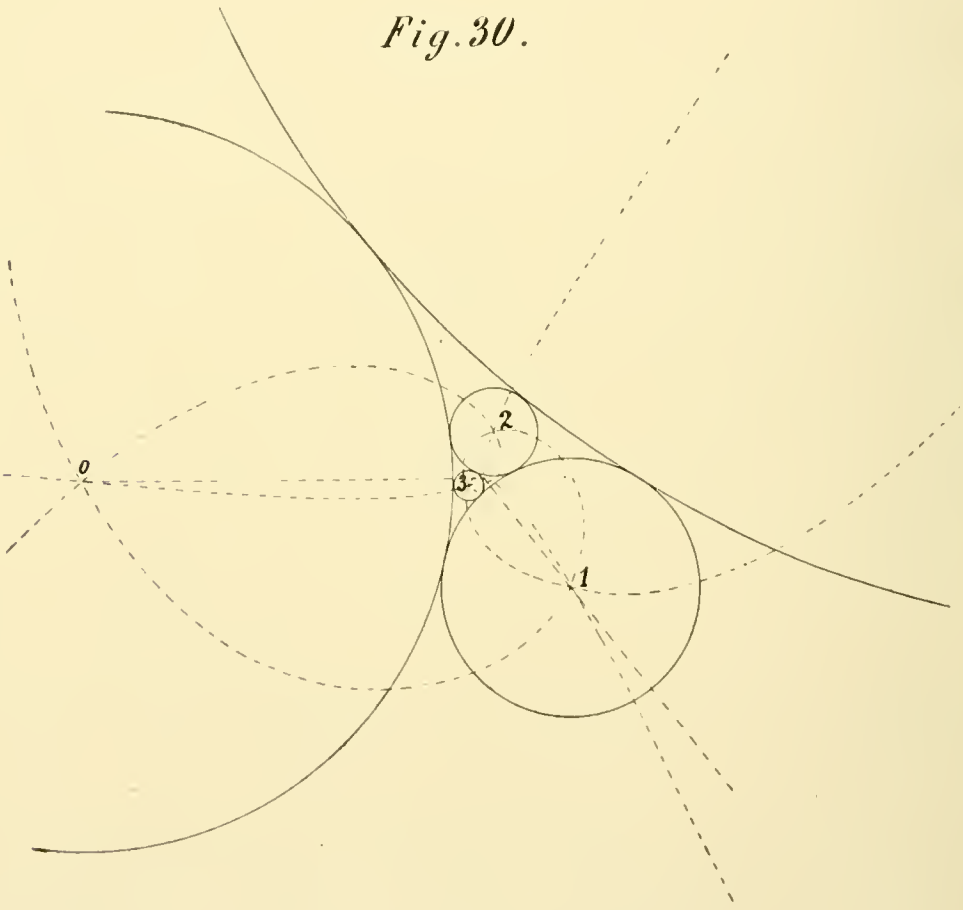
der Wichtigkeit wegen, nochmals wiederholt wurde, ersichtlich. Dies ist wohl der Fall in der Konstruktion, welche in Fig. 3 Taf. VI abgebildet wurde und welche in Fig. 30 S. 132 nochmals wiederholt ist. Dieselbe stellt dann auch den Kontakt 1, 2 und 3 dar. Es ist diese Figur gewissermaßen Ausgangspunkt aller unserer Betrachtungen gewesen. Es war nämlich gleich zu erwarten, daß eine Reihe Kreise angegeben werden konnte, deren Radien eine geometrische Reihe bildeten und derart aufzustellen waren, daß der Kreis 1 den Kreis 0, der Kreis 2 die beiden Kreise 0 und 1 und der Kreis 3 die drei Kreise 0, 1 und 2 tangierte; es hätte dann auch der Kreis 4 die Kreise 1, 2 und 3 berühren müssen usw. Dennoch war die direkte Berechnung dieser Aufgabe anfänglich mit Schwierigkeiten verbunden, welche aber durch die im vorigen Kapitel besprochene Behandlungsweise beseitigt wurden. Es sei noch darauf hingewiesen, daß diese Figur für die „ähnlichen Systeme tangieren-

der Kreise auf einer Ebene“ dieselbe Bedeutung besitzt wie Fig. 5 Taf. I für die „regelmäßigen Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche“ und die Kugelsäule von DELPINO (man siehe Fig. 5 Taf. IV und Fig. 2 Taf. V) für die „regelmäßigen Systeme tangierender Kugeln auf einer Kreiszylinderfläche“.

Die Figuren 4, 6, 8 der Taf. VI stellen Kreissysteme dar mit den zweizähligen Kontakten 2 und 3, 3 und 5, 5 und 8 und zwar diejenigen, bei welchen die Kontaktspiralen einander rechtwinklig schneiden. Die Fig. 5, 7, 9 geben Systeme mit dreizähligen Kontakten wieder.

In der Fig. 10 ist dasjenige System mit dem Kontakte 1 und 3 abgebildet, bei welchem die Divergenz $\frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$ ist; die dreizeiligen Kontaktspiralen sind hier zu geraden Linien geworden. Wir erinnern nochmals daran, daß das System Fig. 3 durch eine kontinuierliche Zunahme von a oder Abnahme von b sowohl in das

Fig. 30.



Ähnliches System tangierender Kreise mit dem Kontakt 1, 2 und 3 ($\alpha = 128^0\,10'\,22''$, $a = 0{,}346013$).

System Fig. 4 als in dasjenige Fig. 10 übergehen kann. Auch weisen wir darauf hin, daß dieses System, Fig. 10, das einzige ist, das unter den ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Ebene, eine Divergenz von 120^0 zeigt.

Das System, in welchem bei dem Kontakte 1 und 3 die Kontaktspiralen einander rechtwinklig schneiden, findet man in Fig. 11, während der dreizählige Kontakt 1, 3 und 4 in Fig. 12 wiedergegeben ist. Fig. 13 stellt den rechtwinkligen zweizähligen Kontakt 3 und 4 dar, Fig. 14 den Fall, in dem beim Kontakte 1 und 4

die Divergenz $\alpha = \frac{1}{4} \cdot 360^0 = 90^0$ beträgt. Endlich gibt die Fig. 15 mit dem Kontakte 2 und 5 ein System mit der Divergenz $\frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$, bei welchem also die fünfzeiligen Kontaktspiralen in Gerade umgewandelt sind. Es bildet diese letzte Figur und Fig. 1 die beiden einzigen Systeme, welche mit einer Divergenz $\frac{2}{5} \cdot 360^0$ zu entwerfen sind.

Kapitel V. Rechtwinkliger Schnitt der Kontaktspiralen.

§ 1. Isogonale Kurvensysteme. In zwei konjugierten Spiralscharen in einem „ähnlichen Punktsystem auf einer Ebene" schneiden sich die Spiralen überall unter gleichem Winkel. Es gehören solche Systeme zu den isogonalen oder isothermischen Kurvensystemen. Ein besonderer Fall ist der, daß der Schnitt rechtwinklig geschieht und eben dieser Fall hat für uns größere Bedeutung. Der Name „isothermische" Systeme findet in folgendem Umstand seine Erklärung: Man denke sich in einer unendlich dünnen Platte eines anisotropen Materiales zwei Spiralen einer logarithmischen Spiralenschar auf verschiedener, aber konstanter Temperatur erhalten, dann bilden die parallelen Spiralen der Schar Kurven, auf denen die Temperatur überall dieselbe ist, also Isothermen, während die Spiralen einer Schar, welche die erste Schar unter einem bestimmten Winkel durchschneidet, Strömungslinien der Wärme bilden. Ist das Material isotrop, dann schneiden sich die beiden Scharen rechtwinklig.

Hätte man in zwei der Spiralen ein konstantes elektrisches Potential dargestellt, so würden die parallelen Spiralen „Linien gleichen Potentials" und diejenige der zweiten Schar „Kraftlinien" sein. Wären die Spiralen der einen Schar Strömungslinien einer Flüssigkeit, so würden diejenigen der zweiten Linien gleichen Druckes angeben.

Diese merkwürdigen Eigenschaften von isothermen Kurvensystemen waren es, welche CHURCH dazu führten, den Systemen von orthogonalen Scharen logarithmischer Spiralen eine große Bedeutung für die Theorie der Blattstellung zuzuschreiben und wodurch er schließlich zu seinen Konstruktionen mit Quasikreisen geführt wurde. Es fragt sich nun, ob es unter den „ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Ebene" auch solche gibt, bei denen die Kontaktspiralen orthogonale Kurvenscharen bilden. Wir werden im folgenden Paragraphen nachweisen, daß dies wirklich der Fall ist.

Denkt man sich auf einer Kreiszylinderfläche ein regelmäßiges Punktsystem, derart, daß die m- und die n-zeilige Spirale zugeordnet sind und sich außerdem rechtwinklig schneiden. Wird nun diese Zylinderfläche mit der Achse horizontal gestellt und darauf abgerollt, so befindet sich auf dem horizontalen Flächenstreifen ein orthogonales System gerader Linien, welches durch folgende zwei Gleichungen darzustellen ist:

$$Y = qX + p_1 \frac{2\pi R}{m} \quad \text{wenn } p_1 = 0, 1, 2, 3 \ldots \text{ bis } m - 1$$

$$Y = -\frac{1}{q} X + p_2 \frac{2\pi R}{n} \quad \text{wenn } p_2 = 0, 1, 2, 3 \ldots \text{ bis } n-1$$

(R = Radius der Zylinderfläche).

Durch Anwendung der Transformation: $Y = \varphi$, $X = \lg \varrho$ (siehe S. 111), gehen diese Gleichungen über in:

$$\varphi - q \lg \varrho = p_1 \frac{2\pi R}{m}$$

$$\varphi + \frac{1}{q} \lg \varrho = p_2 \frac{2\pi R}{n}$$

Es folgt hieraus, daß durch die logarithmische Abbildung das orthogonale System gerader Linien übergeht in ein solches, das von zwei logarithmischen Spiralscharen gebildet wird, die einander ebenfalls rechtwinklig schneiden. Man kann den beiden Gleichungen auch noch diese Form geben:

$$arc\ tg \frac{y}{x} - \frac{1}{2} q \lg (x^2+y^2) = p_1 \frac{2\pi R}{m}$$

$$arc\ tg \frac{y}{x} + \frac{1}{2q} \lg (x^2+y^2) = p_2 \frac{2\pi R}{n}$$

oder:

$$u_1 = C_1 \qquad u_2 = C_2$$

wenn u_1 und u_2 Funktionen von x und y, C_1 und C_2 Konstante darstellen. Beide Funktionen genügen, wie sich durch Differenzierung unmittelbar ergibt, der partiellen Differentialgleichung: $\Delta u = o$, also dem Kriterium, das Lamé für die Gleichungen isothermer Kurvensysteme aufgestellt hat. Es liegt in diesem Umstand, wie in der theoretischen Physik nachgewiesen wird, die Erklärung der oben angegebenen physikalischen Eigenschaften.

§ 2. Rechtwinkliger Schnitt konjugierter Spiralen in ähnlichen Punktsystemen auf einer Ebene. Stellen wir die m-zeilige Spirale in einem ähnlichen Punktsystem dar durch die Gleichung

$$\varrho = C_m e^{q_m \varphi}$$

so werden, weil diese Kurve die Punkte o (ϱ_o, φ_o) und m $(\varrho_m, \varphi_m = \varphi_o \pm \delta_m)$ enthält, auch folgende gelten:

$$\varrho_o = C_m e^{q_m \varphi_o} \qquad \varrho_m = C_m e^{q_m (\varphi_o \pm \delta_m)}$$

aus denen sich durch Division ergibt:

$$a^m = e^{\pm q_m \delta_m} \quad \text{oder:} \quad q_m \delta_m = +m \lg a$$

In derselben Weise findet man, wenn $\varrho = C_n e^{q_n \varphi}$ die Gleichung der n-zeiligen Spirale darstellt, daß:

$$q_n \delta_n = \pm n \lg a$$

sein muß.

Es ergibt sich also:

$$q_m q_n \delta_m \delta_n = \pm m n (\lg a)^2$$

Bedenkt man nun, daß $q_m = \frac{1}{tg\, \mu_m}$ und $q_n = \frac{1}{tg\, \mu_n}$ ist, wenn μ_m und μ_n die Winkel darstellen, die bei der m- und der n-zeiligen Spirale der Leitstrahl mit der Tangente bildet, so wird einleuchten,

daß diese Spiralen einander rechtwinklig schneiden, sobald $q_m q_n = -1$ ist. Es geht dann die obenstehende Formel in diese über:

$$\delta_m \delta_n = \pm\, m\, n\, (\lg a)^2$$

Man muß nun in Betracht ziehen, daß in der Gleichung der logarithmischen Spirale φ in Bogenmaß auszudrücken ist, sodaß dies in dieser letzten Formel auch mit δ_m und δ_n geschehen muß. Wir können dann $\delta_m = (m\,\alpha - \Delta_m \cdot 2\,\pi)$, $\delta_n = (n\,\alpha - \Delta_n \cdot 2\,\pi)$ setzen, wenn wir die Divergenz α ebenfalls in Bogenmaß ausdrücken. Es ergibt sich alsdann:

$$(m\,\alpha - \Delta_m \cdot 2\,\pi)\,(n\,\alpha - \Delta_n \cdot 2\,\pi) = \pm\, m\, n\, (\lg a)^2$$

Diese Formel stellt also die Beziehung dar, die zwischen α und a in einem ähnlichen Punktsystem auf einer Ebene bestehen muß, wenn die m- und die n-zeilige Spirale einander rechtwinklig schneiden. Für jeden Wert von α gibt diese Formel einen zugehörigen von a, und mit diesen beiden läßt sich dann das Punktsystem mit rechtwinkligem Schnitt der m- und n-zeiligen Spiralen herstellen. Für die Berechnung ist es einfacher, α in Graden auszudrücken und den BRIGGschen Logarithmus statt des NAPIERschen zu benutzen, man schreibt dafür die Formel in dieser Gestalt:

$$\log a = \frac{\pi}{180 \times 2{,}30259} \sqrt{\pm\left(\frac{\Delta_m}{m}\,360^0 - \alpha\right)\left(\alpha - \frac{\Delta_n}{n}\,360^0\right)} \qquad (48)$$

§ 3. Rechtwinkliger Schnitt von Kontaktspiralen. Sind nun durch die Formel (48) die ähnlichen Punktsysteme, in denen die zugeordneten m- und n-zeiligen Spiralen einander rechtwinklig schneiden, bestimmt, so bleibt jetzt die Frage übrig, daraus diejenigen zu wählen, um deren Punkte ein ähnliches System tangierender Kreise möglich ist. Nun wurde die Beziehung, welche zwischen a und α bestehen muß, damit um die Punkte ein solches System mit Kontakten m und n beschrieben werden kann, dargestellt durch Formel (40):

$$\frac{\cos\frac{m\,\alpha}{2}}{\cos\frac{n\,\alpha}{2}} = \pm\frac{1 + a^m}{1 + a^n}\sqrt{a^{n-m}}$$

Wenn man also diejenigen Werte von a und α bestimmt, welche gleichzeitig den Formeln (40) und (48) genügen, so wird man mit diesen Werten ein ähnliches Punktsystem beschreiben können, um dessen Punkte eine ähnliche Kreiskonstruktion mit rechtwinkligen Kontakten m und n möglich ist.

Die Berechnung dieser Werte für bestimmte Größen von m und n ist wieder mit Schwierigkeiten verbunden und kann nur durch ein Annäherungsverfahren ausgeführt werden. Wir wählten dazu wieder eine graphische Methode. Die Tabelle XIII (S. 123) enthält in der dritten Kolumne das Resultat dieser Berechnungen für die Kontakte aus der ersten Kolumne. Es sind dabei auch die zugehörigen Werte von ω und b angegeben. Die geometrischen Konstruktionen, die diesen Kontaktfällen entsprechen, wurden auf Tafel VI in den Fig. 2, 4, 6, 8, 11 und 13 wiedergegeben und sind bereits im vorigen Kapitel behandelt worden. In der graphischen

Darstellung I Tafel VII sind die entsprechenden Punkte durch die Buchstaben $r\,w$ bezeichnet.

Es ist nun wieder von Interesse, die Werte von b und α für rechtwinklige Kontakte bei ähnlichen Kreiskonstruktionen auf einer Ebene denjenigen für rechtwinklige Kontakte bei regelmäßigen Kreiskonstruktionen auf der Kreiszylinderfläche gegenüberzustellen; man siehe dafür die Tabelle XVII.

Es wird gleich auffallen, daß die übereinstimmenden Werte von b und α für Zylinderfläche und Ebene hier größere Differenzen zeigen als das bei den Werten der Tabellen XV und XVI (S. 126 und 127) der Fall war. Es beträgt ja die Differenz der Werte von α für rechtwinklige Kontakte auf Zylinderfläche und Ebene sogar mehr als

Tabelle XVII.

Rechtwinklige Kontakte bei Kreissystemen auf der Zylinderfläche und auf der Ebene.

Kontakte:	Zylinderfläche:	Ebene:
1 u. 2	$\alpha = 144^0$ $b = 0{,}44721$	$\alpha = 132^0\,46'\,47''$ $b = 0{,}39604$
2 u. 3	$\alpha = 138^0\,28'$ $b = 0{,}27735$	$\alpha = 139^0\,37'\,25''$ $b = 0{,}262721$
3 u. 5	$\alpha = 137^0\,39'$ $b = 0{,}17150$	$\alpha = 137^0\,26'$ $b = 0{,}1682$
5 u. 8	$\alpha = 137^0\,31'$ $b = 0{,}10600$	$\alpha = 137^0\,34'$ $b = 0{,}1049$
1 u. 3	$\alpha = 108^0$ $b = 0{,}31623$	$\alpha = 104^0\,45'$ $b = 0{,}305$
3 u. 4	$\alpha = 100^0\,48'$ $b = 0{,}2$	$\alpha = 101^0\,6'$ $b = 0{,}194$

11^0, die der zugehörigen Werte von b mehr als 0,05. Diese Tatsache wird für unsere späteren Betrachtungen von Interesse sein und wir wollen auch schon hier darauf hinweisen, daß der Wert $\alpha = 132^0\,46'\,47''$ kleiner ist als die Limitdivergenz der Hauptreihe ($137^0\,30'\,28''$), der Wert $\alpha = 144^0$ dagegen größer als diese. Die Punkte, welche in der graphischen Darstellung für die Beziehung zwischen b und α diese Kontaktfälle darstellen, liegen also auf verschiedenen Seiten der Limitordinaten (man siehe die graphische Darstellung III Tafel III).

Dennoch zeigen die übereinstimmenden Werte von b und α für die höheren rechtwinkligen Kontakte auf Zylinderfläche und Ebene eine kleinere Differenz und selbst für die Kontakte 3 und 5 kann diese bereits als verschwindend angesehen werden.

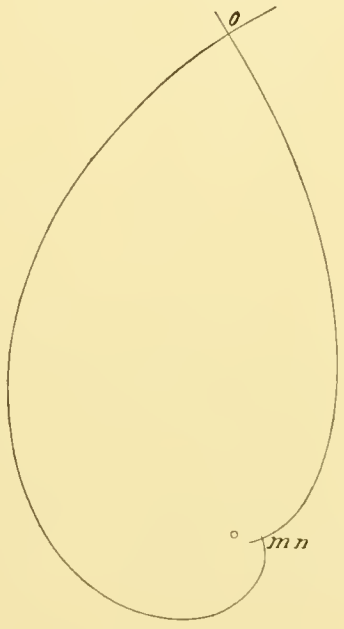
Bedenkt man nun weiter, daß die konforme Abbildung der regelmäßigen Kreiskonstruktionen auf der Kreiszylinderfläche auf einer Ebene mittels kleiner ähnlicher Rechtecke ein ähnliches System tangierender Quasikreise gibt mit denselben Werten von b und α, und zieht man weiter in Betracht, daß für kleine

Werte von b der Quasikreis einem wirklichen Kreis nahe kommt, so wird es deutlich, daß man für höhere Kontakte die ähnlichen Systeme wirklicher Kreise ziemlich genau mittels einer solchen konformen Abbildung konstruieren kann. Es ist diese Methode, wenn auch nicht in dieser Weise ausgedrückt, von CHURCH für die Konstruktion seiner Schemas befolgt worden. Dies wird deutlich werden, wenn wir dieselben im folgenden Paragraphen näher beschrieben haben.

§ 4. Die Konstruktionen von CHURCH. Was die ursprüngliche Form der CHURCHschen Konstruktionsmethode anbelangt, so verweisen wir auf die Originalarbeit dieses Autors[1]); wir werden hier eine Abänderung seines Verfahrens mitteilen, die schließlich zu gleichen Resultaten führt.

Sind in einem regelmäßigen Punktsystem auf einer Kreiszylinderfläche die m- und n-zeiligen Spiralen, die einander rechtwinklig schneiden, zugeordnet, und fertigt man von diesem System auf die schon mehrfach besprochene Weise eine konforme Abbildung auf einer Ebene an, so kann man die m- und n-zeilige logarithmische Spirale, welche durch den Punkt o gehen, darstellen durch die Gleichungen: $\varrho = e^{\pm \frac{m}{n}\varphi}$ und $\varrho = e^{\mp \frac{n}{m}\varphi}$. Sind m und n große Glieder einer Kontaktreihe p, q, so kann man $\frac{m}{n} = \chi$ und $\frac{n}{m} = 1 + \chi$ setzen, worin χ die „göttliche Proportion“ ist (man siehe S. 47 und 48) und es werden alsdann die Spiralen dargestellt durch $\varrho = e^{\pm \chi \varphi}$ und $\varrho = e^{\mp (1+\chi)\varphi}$. Man findet in Fig. 31 die Spiralen $\varrho = e^{-\chi\varphi}$ (die weniger steile) und $\varrho = e^{+(1+\chi)\varphi}$ (die steilere) wiedergegeben. Wenn man diese Figur auf Pappe reproduziert und ausschneidet, so kann man dieselben als Muster benutzen, um orthogonale Spiralscharen zu zeichnen, indem man durch das Zentrum eine Stecknadel steckt.

Fig. 31.

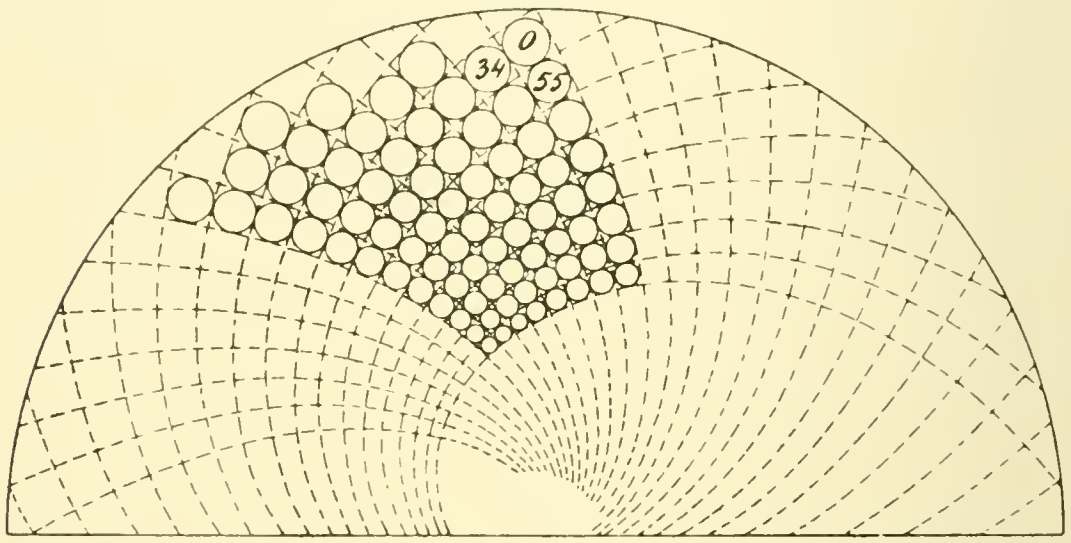


Will man nun z. B. ein Kontaktsystem mit dem Kontakte 34 und 55 zeichnen, so geht man in folgender Weise zu Werke. Man beschreibt einen Kreis, den man einmal in 34 und das zweite Mal in 55 Teile teilt, und zwar in der Weise, daß ein gewisser Teilstrich aus der ersten Einteilung mit einem solchen aus der zweiten zusammenfällt. Darauf zeichnet man mittels des Pappmusters durch die 34 Teilstriche eine Schar von 34 Spiralen, und zwar nimmt man dafür die weniger steile des Musters; nun beschreibt man in gleicher Weise durch die 55 Teilstriche eine Schar von 55 steileren Spiralen. Die Schnittpunkte dieser zwei orthogonalen Spiralscharen werden dann ein ähnliches Punktsystem bilden, um dessen Punkte herum eine ähnliche Kreiskonstruktion mit dem rechtwinkligen Kontakte

1) l. c. p. 52.

34 und 55 möglich ist. Der gemeinschaftliche Teilstrich auf dem Kreis trägt die Nummer 0. Einfacher als durch die Beschreibung von Kreisen um die Schnittpunkte, bekommt man jedoch ein solches Kreissystem, wenn man in den viereckigen Figuren, welche durch die logarithmischen Spiralen gebildet werden, in der Weise Kreise zieht, daß diese die begrenzenden Spiralen berühren. Eine solche Konstruktion ist in Fig. 32 teilweise abgebildet[1]).

Fig. 32.



Konstruktion nach CHURCH für den rechtwinkligen Kontakt 34 und 55 ($\alpha = 137^0\,30'\,28''$, $b = 0{,}01546$).

Es ist diese Konstruktionsweise für die höheren Kontakte sehr empfehlenswert, jedoch wollen wir nochmals bemerken, daß dieselbe nur für unendlich große Werte von m und n mathematisch richtig ist und für die niedrigen Werte nur annähernd gilt. Doch läßt sie sich noch für den rechtwinkligen Kontakt 3 und 5 ziemlich gut anwenden. Für die noch niedrigeren Kontakte muß man jedoch auf die allgemein gültige Methode, welche auf Seite 130 angegeben ist, zurückgehen. CHURCH hat eine Kreiskonstruktion für diese niedrigen Kontakte nicht angegeben, aber dafür eine solche mit Quasikreisen eingeführt. Auch wollen wir noch hervorheben, daß dieser Autor nach seiner Methode nur Systeme mit rechtwinkligen Kontakten anfertigen konnte, während die von uns beschriebene für alle möglichen Systeme Geltung hat.

1) Als Ausgangspunkt der beiden Einteilungen wurde der höchste Punkt des Bogens angenommen.

Dritter Abschnitt.

Einfache Systeme auf einer Kreiskegelfläche.

Kapitel I. Ähnliche Punktsysteme auf einer Kreiskegelfläche.

§ 1. Definition. Unter einem „ähnlichen Punktsystem auf einer Kreiskegelfläche“ werden wir ein solches verstehen, das derart beschaffen ist, daß die Strahlenbüschel, die man durch Verbindung von verschiedenen Punkten mit allen anderen Punkten bekommt, immer ähnlich sind.

Es lassen sich wiederum, je nach der Lage der Punkte, zwei verschiedene Fälle unterscheiden:

a. Die Strahlenbüschel, die man durch die Verbindung von verschiedenen Punkten mit allen anderen erhält, sind ausschließlich solche, die durch eine Vergrößerung oder Verkleinerung in kongruente Strahlenbüschel übergehen können, welche sich zur Deckung bringen lassen.

b. Diese verschiedenen Strahlenbüschel sind zwar durch eine Vergrößerung oder Verkleinerung in kongruente überzuführen, jedoch gibt es darunter Spiegelbilder.

Wir werden im Folgenden nur die erste Art Punktsysteme betrachten [1]).

§ 2. Haupteigenschaften. Betrachten wir ein ähnliches Punktsystem auf einer Kreiskegelfläche und denken wir uns dasselbe

1) Ich hoffe später an anderer Stelle nachzuweisen, daß auch die zweite Art Punktsysteme interessante Aussichten eröffnet, es möge dies an einem einfachen Beispiel hier erläutert werden. Man denke sich eine unendliche Serie Kugeln, deren Radien eine geometrische Reihe mit dem Quotienten 0,526 bilden (diese Zahl wurde durch eine Annäherungsmethode berechnet). Eine der Kugel bekommt die Nummer 0, die folgende kleinere die Nummer 1 usw. Man stelle nun die Kugel 0 an die Kugel 1, die Kugel 2 an 0 und 1, die Kugel 3 auf 0, 1 und 2. Es wird nun die Kugel 4 gerade einen solchen Durchmesser besitzen, daß sie in den Raum zwischen die Kugeln 0, 1, 2 und 3 gebracht, alle vier tangiert. Es muß alsdann auch Kugel 5, falls sie in den Raum zwischen die Kugeln 1, 2, 3 und 4 gebracht wird, diese letzten Kugeln gleichfalls tangieren. So kann man jede folgende Kugel im Zwischenraume von 4 vorhergehenden tangierend aufstellen. Aber auch Kugeln mit größerem Durchmesser als die Kugel 0 können um diesen Kugelstapel herum aufgestellt werden. Die Mittelpunkte aller dieser Kugeln werden dann ein Punktsystem bilden, das derart sein muß, daß jeder Punkt allen anderen gegenüber in ähnlicher Weise liegt. Man sieht leicht ein, daß es sich hier um ein System der zweiten Art handelt. Es läßt sich nun nachweisen, daß die Mittelpunkte sämtlich auf einer und derselben Kreiskegelfläche mit dem Scheitelwinkel $\pm 55^0$ liegen. Die Divergenz dieses Systems beträgt etwa 118^0.

durch ein zweites kongruentes überdeckt, welches wir als veränderlich annehmen werden, während das erste als fest betrachtet wird. Bezeichnen wir ferner die Punkte des festen mit a_o, b_o, c_o usw. und die entsprechenden des beweglichen mit a, b, c usw., so können wir den aus einem Punkt a des beweglichen Systems gezogenen Strahlenbüschel in folgender Weise mit dem Strahlenbüschel aus dem Punkt b_o des festen zur Deckung bringen: Wir denken uns das bewegliche System derart verkleinert oder vergrößert, daß dabei der Scheitel der Kegelfläche auf seinem Platz bleibt und daß das Strahlenbüschel aus a demjenigen aus b_o kongruent wird, darauf bringen wir a durch eine Rotation um die Achse der Kreiskegelfläche auf b_o.

Nach der beschriebenen Deckbewegung wird der Punkt b des beweglichen Systems auf einen Punkt c_o des festen fallen, der Punkt c auf einen Punkt d_o usw.

Es wird dann aber einleuchten, daß die Punkte a_o, b_o, c_o, d_o usw. auf einer Schraubenlinie auf der Kegelfläche oder Kegelloxodrome liegen, d. h. einer Kurve auf der Kegelfläche, welche die beschreibenden Linien unter konstantem Winkel schneidet.

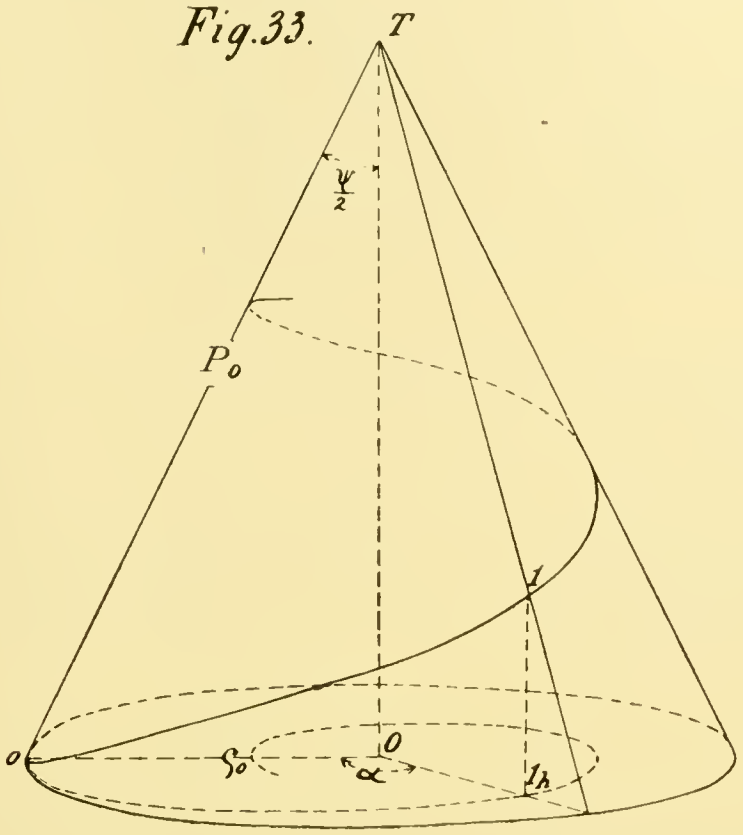
Nach dem, was wir von den ähnlichen Punktsystemen auf einer Ebene in Kap. I § 2 des vorigen Abschnitts sagten, bedarf es nun keines weiteren Beweises, daß man alle Punkte eines ähnlichen Punktsystems auf einer Kreiskegelfläche auf eine Schar paralleler Kegelloxodromen ordnen kann. Wird die Anzahl dieser Loxodromen durch m gegeben, so muß jede dieser Kurven durch eine Drehung um einen Winkel von $\frac{360^0}{m}$ um die Achse der Kegelfläche mit der folgenden zur Deckung gebracht werden.

Es sind dann wieder die Punkte dieser ähnlichen Punktsysteme als Schnittpunkte zweier Scharen Kegelloxodromen aufzufassen. Sind alle Schnittpunkte der beiden Scharen auch Schnittpunkte des Systems, so werden wir die Kegelloxodromen wieder zugeordnet nennen.

Die ähnlichen Punktsysteme auf einer Kreiskegelfläche lassen sich wieder in gleicher Weise wie die ähnlichen auf einer Ebene und die regelmäßigen auf einer Kreiszylinderfläche in 6 Arten einteilen (man siehe S. 11 und 102). Für unseren Zweck genügt eine Einteilung in Systeme, bei welchen mehrere Punkte in derselben Entfernung vom Scheitel liegen und in solche, bei denen das nicht der Fall ist. Erstere heißen wieder mehrfache, letztere einfache Systeme, und nur diese zweite Art kommt vorläufig hier in Betracht. In diesen einfachen ähnlichen Punktsystemen kann man alle Punkte in einer einzigen Kugelloxodrome aufnehmen, und zwar gibt es unendlich viele solcher Loxodromen, von denen jedoch nur die kürzeste (d. i. die steilste) in Betracht gezogen wird und als Hauptspirale bezeichnet werden soll. Man kann dann wieder die Punkte diese Spirale entlang numerieren und wir werden dabei immer denjenigen Punkt der Zeichnung, der in größter Entfernung vom Scheitel liegt, mit Nummer 0 bezeichnen. Die (steilste) Kegelloxodrome, die durch die Punkte o und m gezogen werden kann, wird wieder die m-zeilige Spirale genannt, und es wird deutlich sein, daß alle Punkte des Systems auf einer Schar von m kongruenten, parallelen Kegel-

loxodromen zu ordnen sind. Sind die m- und n-zeilige zugeordnete Spiralen eines einfachen Punktsystems, so läßt sich wieder in einfacher Weise der Nachweis führen, daß m und n unter sich Primzahlen sind.

Fig. 33.



§ 3. Hauptdivergenz, Hauptverhältnis, sekundäre Divergenz, enzyklische Zahlen. Wenn man sich die Hauptspirale entlang von einem Punkt nach dem folgenden bewegt, so durchläuft man dabei einen konstanten Winkel um die Achse der Kreiskegelfläche, wir werden diesen Winkel die Divergenz des Punktsystems nennen und ihr wieder den Buchstaben α geben.

Verbindet man den Scheitel der Kegelfläche mit den in der Hauptspirale aufeinanderfolgenden Punkten, so werden diese Leitstrahlen ein konstantes Verhältnis zeigen, wir werden dies wieder das Hauptverhältnis nennen und mit dem Buchstaben a bezeichnen; dabei nehmen wir wieder $a < 1$ an.

Wir nennen ferner den Scheitelwinkel der Kegelfläche ψ und es wird dann das ganze Punktsystem unzweideutig bestimmt sein, sobald die Werte von a, α und ψ gegeben sind.

Was die Windungsrichtung einer Kegelloxodrome anbelangt, so werden wir diese Kurve linksgewunden nennen, wenn man beim Absteigen in ihr von dem Scheitel hinweg die Achse der Kegelfläche zur Linken hat; rechtsgewunden wird sie heißen, sobald man die Achse dabei zur Rechten hat. Wir werden später noch näher erklären, daß die Bestimmung der Windungsrichtung, wie sie für die zylindrische Schraubenlinie und die logarithmische Spirale gegeben wurde, aus dieser Definition hervorgeht.

Wenn man von dem Punkt o die m-zeilige Spirale entlang nach dem Punkt m geht, so beschreibt man dabei einen Winkel δ_m

um die Achse, welchen wir wieder die sekundäre Divergenz dieses Punktes nennen werden. Es wird diese als positiv betrachtet, wenn die m-zeilige Spirale der Hauptspirale homodrom, als negativ, wenn dieselbe der Hauptspirale antidrom gewunden ist.

Enzyklische Zahl Δ_m eines Punktes m nennen wir wieder die ganze Zahl Touren, die man um die Achse der Kegelfläche machen muß, wenn man vom Punkt o in der Weise die Hauptspirale entlang nach dem Punkte m geht, daß man zuerst eine ganze Anzahl Male die Achse der Kegelfläche umläuft und darauf noch eine Teilstrecke δ_m vorwärts (bei positiver sekundärer Divergenz) oder zurück (bei negativer) schreitet.

Es wird also wieder die Gleichung (1) gelten:

$$m\,\alpha = \delta_m + \Delta_m \cdot 360^0 \tag{1}$$

Es läßt sich weiter in einfacher Weise ableiten, daß auch folgende Beziehung gilt, wenn die m- und die n-zeilige Spirale zugeordnet sind:

$$m\,\Delta_n - n\,\Delta_m = \pm 1 \tag{2}$$

Wir werden dies bald auch noch auf andere Art beweisen.

Schließlich bemerken wir noch, daß auch für die Näherungswerte der Divergenz, falls die m- und n-zeilige Spirale zugeordnet sind, wieder die Formel:

$$\frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0 \lessgtr \alpha \lessgtr \frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0 \tag{3}$$

Geltung hat.

§ 4. Die horizontale Projektion ähnlicher Punktsysteme auf einer Kreiskegelfläche. Wir werden uns im Folgenden immer die Achse vertikal gestellt denken; eine Projektion auf eine Ebene, welche rechtwinklig auf der Achse steht, ist dann eine horizontale Projektion.

Die horizontale Projektion einer Kegelloxodrome wird bekanntlich durch eine logarithmische Spirale dargestellt, welche die Projektion des Scheitels als Zentrum besitzt. Hieraus geht unmittelbar hervor, daß die horizontale Projektion eines ähnlichen Punktsystems auf einer Kreiskegelfläche ein ähnliches Punktsystem auf einer Ebene bildet. Dieses letzte System muß von derselben Art sein wie das ursprüngliche; gibt es im System auf der Kegelfläche eine Hauptspirale, dann findet sich diese auch in der Projektion vor. Die Divergenz beider Systeme muß ebenfalls die gleiche sein. Daß dies auch mit dem Hauptverhältnis der Fall ist, geht aus dem Folgenden hervor.

Nennen wir (man siehe Fig. 33) den Leitstrahl vom Kegelscheitel (T) nach einem Punkt des ähnlichen Systems auf der Kegelfläche, P, denjenigen Leitstrahl, welcher von der Projektion (0) des Scheitels nach der Projektion dieses Punktes gezogen wird, ϱ, so wird:

$$\varrho = P \sin\frac{\psi}{2} = NP \tag{49}$$

sein, wenn

$$N = \sin\frac{\psi}{2} \tag{50}$$

gesetzt wir. Alle Leitstrahlen erleiden also bei der Projektion eine

selbe Verkürzung. Die horizontale Projektion besitzt demnach auch das Hauptverhältnis a des Systems auf der Kegelfläche.

Die sekundäre Divergenz eines Punktes des ähnlichen Systems auf der Kegelfläche ist auch wieder dieselbe wie diejenige seiner horizontalen Projektion im ähnlichen Punktsystem auf der Ebene. Dasselbe gilt für die enzyklische Zahl eines Punktes und für die seiner Projektion. Haben also die Formeln (1) und (2) für eines dieser zwei Systeme Geltung, so muß das auch für das andere der Fall sein. Nun haben wir schon im vorigen Abschnitt diese beiden Formeln für die ähnlichen Punktsysteme auf der Ebene abgeleitet und somit ist der Beweis auch für die ähnlichen Punktsysteme auf der Kegelfläche gegeben. (Man vergleiche die Bemerkung am Schluß des vorigen Paragraphen.)

§ 5. Systeme auf der abgerollten Kreiskegelfläche. Man denke sich die Kreiskegelfläche nach einer beschreibenden Linie, wozu wir meistens diejenige durch den Punkt o wählen werden, aufgeschnitten und auf eine Ebene abgerollt. Es wird dann die Kreiskegelfläche auf dieser Ebene dargestellt durch einen Winkel, der alle Werte von 0^0 bis 360^0 besitzen kann. Nennen wir diesen Winkel ζ und denken wir um den Scheitelpunkt einen Kreis mit dem Radius P_o beschrieben, so wird, wenn ζ in Bogenmaß ausgedrückt ist:

$$\zeta P_o = 2\pi \varrho_o \quad \text{oder:} \quad \zeta = 2\pi \frac{\varrho_o}{P_o}$$

also:

$$\zeta = 2\pi \sin \frac{\psi}{2} = 2\pi N \tag{51a}$$

oder, wenn ζ in Graden ausgedrückt wird:

$$\zeta = N \cdot 360^0 \tag{51b}$$

Die Kegelloxodromen gehen beim Abrollen der Kegelfläche auf einer Ebene in logarithmische Spiralen über, welche den Scheitelpunkt des Winkels als Zentrum besitzen. Es schneiden ja die abgerollten Kurven die Strahlen, welche vom Scheitel aus gezogen werden, unter einem konstanten Winkel. Jedoch muß dabei bemerkt werden, daß diese logarithmischen Spiralen an den begrenzenden Linien des Winkels aufhören, um an der anderen Seite wieder anzufangen. Es kommen also in dieser abgerollten Figur nur Teilstücke von logarithmischen Spiralen vor.

Das Punktsystem, das durch die Schnittpunkte dieser logarithmischen Spiralen gebildet wird, ist also nicht vollständig mit einem ähnlichen zu vergleichen, aber es wird dennoch mit einem solchen in zahlreichen Punkten übereinstimmen. Wir werden die Stücke der logarithmischen Spiralen, welche die Hauptkegelloxodrome darstellen, die „Hauptspirale im abgerollten System" nennen und können dann wieder die Punkte in kontinuierlicher Weise numerieren. Die Leitstrahlen nach den aufeinander folgenden Punkten dieser Spirale werden dieselben Längen besitzen wie die Leitstrahlen vom Kegelscheitel nach diesen Punkten; also ist das Hauptverhältnis des abgerollten Systems gleich a zu setzen.

Bewegt man sich die Hauptspirale (auf der abgerollten Kegelfläche) entlang von einem Punkt nach dem folgenden, so wird man

einen konstanten Winkel um das Zentrum beschreiben, wobei jedoch beachtet werden muß, daß man möglicherweise dabei auf ein anderes Stück der Spirale übergehen muß.

Nennen wir diesen konstanten Winkel „die Divergenz des abgerollten Systems“ und bezeichnen wir denselben mit α', so wird:

$$\alpha' P_o = \alpha \varrho_o \quad \text{oder:} \quad \alpha' = \frac{\varrho_o}{P_o} \alpha$$

und also:

$$\alpha' = \alpha \sin \frac{\psi'}{2} = N\alpha \tag{52}$$

Wenn wir uns auf dem abgerollten System die m-zeilige logarithmische Spirale entlang vom Punkt o nach dem Punkt m bewegen, so beschreiben wir einen Winkel um den Scheitelpunkt, den wir die sekundäre Divergenz des Punktes m auf dem abgerollten System nennen werden und mit δ'_m bezeichnen, es wird alsdann:

$$\delta'_m = \delta_m \sin \frac{\psi'}{2} = N\delta_m \tag{53}$$

Kapitel II. Die Beziehung zwischen den ähnlichen Punktsystemen auf der Kegelfläche, denjenigen auf der Ebene und den regelmäßigen Punktsystemen auf der Kreiszylinderfläche.

§ 1. Die Ebene und die Kreiszylinderfläche als besondere Fälle der Kreiskegelfläche betrachtet. Wird der Scheitelwinkel einer Kreiskegelfläche gleich 180^0, so geht diese in eine Ebene über. Die ähnlichen Punktsysteme auf einer Ebene sind also nur besondere Fälle derjenigen auf einer Kreiskegelfläche. Wird der Scheitelwinkel gleich 0^0 und befindet sich außerdem der Scheitel in unendlich großer Entfernung, so geht die Kreiskegelfläche in eine Kreiszylinderfläche über. Auch die regelmäßigen Punktsysteme auf einer solchen Fläche sind also als besondere Fälle der ähnlichen auf der Kegelfläche zu betrachten.

Es wird einleuchten, daß hierin die Erklärung für die große Übereinstimmung der Eigenschaften dieser drei Systemarten liegt, und man wird jetzt auch einsehen, warum die Definitionen der Divergenz, Windungsrichtung, usw. für die ähnlichen Punktsysteme auf der Ebene und die regelmäßigen auf der Kreiszylinderfläche feststanden, sobald diese für die ähnlichen auf der Kreiskegelfläche gegeben waren.

Ist hiermit nun ein neues Kettenglied aufgefunden zwischen den ähnlichen Systemen auf der Ebene und den regelmäßigen auf der Kreiszylinderfläche, so können wir die ähnlichen auf der Kreiskegelfläche mit diesen beiden anderen auch mittels der Theorie der konformen Abbildung in Beziehung bringen.

§ 2. Die konforme Abbildung mittels kleiner ähnlicher Rechtecke. Wir haben S. 106 u. f. nachgewiesen, daß es immer möglich ist, eine Ebene in kleine ähnliche Rechtecke durch ein

Strahlenbüschel einzuteilen, das eine sehr große Anzahl s Strahlen enthält und dargestellt wird durch:

$$\varphi = \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}$$

wenn $\mathfrak{m} = 0, 1, 2, 3 \ldots$. bis $s-1$ und $\mathfrak{a} = \frac{2\pi}{s}$ ist, und durch eine Kreisschar, die gegeben wird durch:

$$\varrho = \varrho_o\, e^{\mathfrak{n}\mathfrak{b}},$$

wenn $\mathfrak{n} = \pm$ (0, 1, 2, 3, 4 .... bis ∞) ist und b ein kleiner Wert. Das Verhältnis der Rechteckseiten war dann $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$.

Die Kreiszylinderfläche konnte in ähnliche Rechteckchen eingeteilt werden durch s vertikale Linien in Abständen $\frac{2\pi R}{s}$ und unendlich viele horizontale Kreise in Abständen $R\mathfrak{b}$.

Wir werden nun nachweisen, daß es möglich ist, auch die Kreiskegelfläche in kleine Rechtecke einzuteilen, die dasselbe Verhältnis $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ der Seiten zeigen, also denjenigen der vorigen Einteilungen wieder ähnlich sind.

Man rolle die Kreiskegelfläche auf einer Ebene zu einem Winkel $\zeta = 2\pi N$ (siehe Formel 51a) ab und teile darauf diesen Winkel durch ein Strahlenbüschel in s Sektoren ein. Dieses Strahlenbüschel kann dann dargestellt werden durch:

$$\varphi = \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}'$$

wenn $\mathfrak{m} = 0, 1, 2, 3 \ldots., s-1$ und $\mathfrak{a}' = \frac{2\pi N}{s} = N\mathfrak{a}$ ist.

Man konstruiere jetzt innerhalb des Winkels ζ eine Schar konzentrischer Kreisbogen und zwar in der Weise, daß die Kreisschar dargestellt wird durch:

$$\varrho = \varrho_o\, e^{\mathfrak{n}\,\mathfrak{b}'}$$

wenn $\mathfrak{n} = \pm(0, 1, 2, 3, 4, \ldots. \infty)$ und $\mathfrak{b}' = N\mathfrak{b}$ ist.

Man wird alsdann die abgerollte Kreiskegelfläche in Rechtecke eingeteilt haben, deren Rechteckseiten sich verhalten wie:

$$\mathfrak{a}' : \mathfrak{b}' = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$$

und die also ähnlich sind denjenigen, in die die Ebene und die Kreiszylinderfläche eingeteilt wurden. Wir brauchen jetzt nur die abgerollte Kreiskegelfläche wieder aufzurollen, um auch diese Fläche auf dieselbe Weise eingeteilt zu erhalten wie die Ebene und die Kreiszylinderfläche.

Wir können dann in jeder dieser Einteilungen ein kleines Rechteck willkürlich annehmen und diese drei als übereinstimmend betrachten. Weiter können wir uns von jeder Figur auf einer der drei Flächen eine konforme Abbildung auf den beiden andern anfertigen. Hieraus geht hervor, daß man regelmäßige Punktsysteme auf einer Kreiszylinderfläche, ähnliche auf einer Ebene und ähnliche auf einer Kreiskegelfläche als konforme Abbildungen von einander betrachten kann.

Es ist die große Übereinstimmung der Eigenschaften dieser Systeme, die sich in der Gleichheit der Formeln kund gibt, auch als eine Folge dieses Umstandes zu betrachten.

Auch das Punktsystem auf der abgerollten Kreiskegelfläche ist als eine konforme Abbildung des ähnlichen Systems auf diese

Fläche selbst anzusehen, wobei jetzt die Abbildung nicht auf einer unendlichen Ebene, sondern auf einem Sektor derselben auszuführen ist.

Man könnte vielleicht meinen, daß auch die horizontale Projektion eines ähnlichen Punktsystems auf einer Kreiskegelfläche als eine konforme Abbildung desselben auf einer Ebene betrachtet werden kann. Dies ist aber durchaus nicht der Fall, wie man sich in folgender Weise veranschaulichen kann. Man denke sich die Kreiskegelfläche durch ein System beschreibender Linien und horizontaler Kreise in kleine Quadrate eingeteilt und nun die Projektion dieser Einteilung ausgeführt. Dann wird diese horizontale Projektion zwar in Rechtecke eingeteilt, die untereinander ähnlich sind, aber nicht in Quadrate, so daß die beiden Einteilungen nicht konform sind.

§ 3. Die beschriebenen Abbildungen von funktionstheoretischem Standpunkt. Bildet man eine Zeichnung einer unbegrenzten Ebene in der angegebenen Weise auf einem Sektor ab, dessen Winkel $\zeta = N \cdot 360^0 (N < 1)$ ist, so kann man diese Abbildung betrachten als eine solche mittels einer Funktion eines komplexen Arguments. Bezeichnen wir nämlich die unbegrenzte Ebene als z-Ebene, die Ebene des Sektors als Z-Ebene, so wird diese Abbildung dargestellt durch das Symbol:

$$z = Z^N$$

Es läßt sich hieraus ableiten:

$\varrho = P^N$ und $\varphi = N\,\Gamma + \frac{2\pi k}{N}$ $(k = 1, 2, 3 \ldots N)$, woraus hervorgeht, daß die übereinstimmenden Leitstrahlen ebenso wie die übereinstimmenden Winkel auf der Sektorzeichnung kleiner sind als die auf der unbegrenzten Ebene.

Die Abbildung einer Zeichnung auf der (abgerollten) Kreiszylinderfläche mittels kleiner ähnlicher Rechtecke auf dem Sektor kann dargestellt werden durch:

$$z = (\lg Z)^N,$$

wenn die Ebene des Sektors wieder als Z-Ebene, diejenige der (abgerollten) Kreiszylinderfläche als z-Ebene betrachtet wird.

Kapitel III. Ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche. Allgemeine Betrachtungen.

§ 1. Definition. Unter einem „ähnlichen System tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche“ werden wir ein solches verstehen, das folgende Eigenschaften besitzt: 1. die Mittelpunkte der Kreise bilden ein ähnliches Punktsystem auf einer Kreiskegelfläche, 2. die Durchmesser der Kreise bilden eine geometrische Reihe, welche das Hauptverhältnis des Punktsystems als Quotienten besitzt, 3. jeder Kreis tangiert mindestens vier andere, 4. im ganzen System schneiden sich keine Kreise.

Es sei noch bemerkt, daß wir in dieser Definition unter „einem Kreise auf einer Kreiskegelfläche“ wieder eine solche Raumkurve verstehen, welche, mit der Kreiskegelfläche auf einer

Ebene abgerollt, einen wirklichen Kreis liefert. Hiernach wird es deutlich sein, daß wir in diesem Kapitel besonders die abgerollten Systeme behandeln werden.

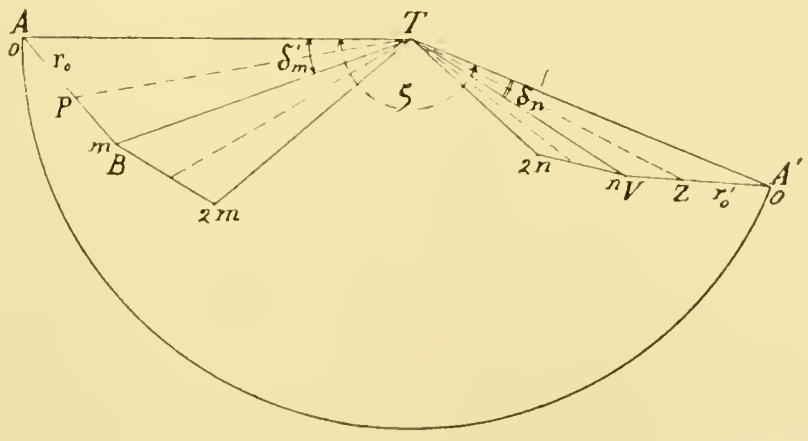
Fertigt man auf die im vorigen Kapitel besprochene Weise auf einer abgerollten Kreiskegelfläche eine konforme Abbildung von einem „regelmäßigen System tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche“ an, so werden zwar die zylindrischen Schraubenlinien übergehen in logarithmische Spiralen, deren Schnittpunkte ein abgerolltes ähnliches Punktsystem auf einer Kreiskegelfläche darstellen, jedoch werden die Kreise dabei in Kurven von sehr kompliziertem Charakter übergeführt. Dasselbe gilt auch, wenn wir auf dem Sektor die Abbildung eines „ähnlichen Systems tangierender Kreise auf einer Ebene anfertigen“[1]).

Auch jetzt läßt sich nicht à priori auf die Möglichkeit einer Existenz von „ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche“ schließen. Wir werden dennoch in dem folgenden Paragraphen diese nachweisen.

Hier bemerken wir noch, daß, wenn es solche Systeme gibt, darin wieder jeder Kreis allen anderen gegenüber ähnlich liegt, und daß also, wenn der Kreis o den Kreis m tangiert, dieser letztere wieder den Kreis $2m$ tangieren muß usw., und daß dann alle Kreise des Systems auf einer Schar von m-parallelen Kegelloxodromen zu ordnen sind. Wir werden in diesem Fall wieder von einem m-zeiligen Kontakte sprechen. Tangiert der Kreis o außerdem noch den Kreis n, so besteht der zweizählige Kontakt m und n.

§ 2. Die Beziehung zwischen a und α für zweizählige Kontakte. Verbindet man auf der abgerollten Kreiskegelfläche o mit m, diesen Punkt mit $2m$, diesen mit $3m$ usw. und halbiert man die Winkel, welche die Leitstrahlen nach diesen Punkten bilden, so werden dadurch die Verbindungslinien in Stücke geteilt, die das Verhältnis a_m zeigen. Nach dem, was wir auf S. 113 u. f. für die Systeme auf der Ebene sagten, kann ein Beweis hierfür als

Fig. 34.



überflüssig betrachtet werden. Auch wird ein Hinweis auf jene Ableitungen genügen, um einzusehen, daß ein Kreissystem mit m-zeiligem Kontakt entsteht, wenn wir in Fig. 34, welche die ab-

1) Die Kreise gehen hierbei in Lemniscaten von der Ordnung $\frac{1}{N}$ über.

gerollte Kreiskegelfläche darstellt, $AP = r_o$ setzen und um die Punkte 0, 1, 2, 3, 4 usw. Kreise mit den Strahlen r_o, ar_o, a^2r_o, a^3r_o, a^4r_o usw. beschreiben. Im allgemeinen wird ein solches System nicht noch einen zweiten Kontakt aufweisen. Damit es auch den n-zeiligen zeigt, muß in Fig. 34 $AP = A'Z$ sein. Indem wir wieder auf die Ableitungen von S. 113 u. f. verweisen, können wir hier, wenn $TA = \varrho_o$ gesetzt wird, gleich die Formeln für AP und $A'Z$ hinzuschreiben:

$$\frac{AP}{\varrho_o} = \frac{\sqrt{1 + a^{2m} - 2\,a^m \cos \delta'_m}}{1 + a^m}$$

$$\frac{A'Z}{\varrho_o} = \frac{\sqrt{1 + a^{2n} - 2\,a^n \cos \delta'_n}}{1 + a^n}$$

woraus nach Gleichsetzen von AP und $A'Z$ und einigen Umformungen folgt:

$$\frac{\cos \frac{\delta'_m}{2}}{\cos \frac{\delta'_n}{2}} = \pm \frac{1 + a^m}{1 + a^n} \sqrt{a^{n-m}} \tag{54}$$

Setzen wir nach (53) (S. 144) $\delta'_m = N\delta_m$ und $\delta'_n = N\delta_n$, so wird diese Formel:

$$\frac{\cos \frac{N\delta_m}{2}}{\cos \frac{N\delta_n}{2}} = \pm \frac{1 + a^m}{1 + a^n} \sqrt{a^{n-m}} \tag{55}$$

Wir bemerken nun zuerst, daß nach der Definition der sekundären Divergenz δ_m und δ_n kleiner als 180^0 sind, während $N < 1$ sein muß, weil $N = \sin \frac{\psi}{2}$ und $\psi < 180^0$. Es stellen also $\frac{N\delta_m}{2}$ und $\frac{N\delta_n}{2}$ spitze Winkel dar, woraus folgt, daß das erste Glied dieser letzten Formel positiv sein muß. Es hat also nur das $+$ Zeichen Geltung.

Wenn wir nun noch für δ_m und δ_n die Werte einführen, die aus der Gleichung (1) hervorgehen, so erhalten wir die wichtige Formel:

$$\frac{\cos N\left(\frac{m\alpha}{2} - \Delta_m \cdot 180^0\right)}{\cos N\left(\frac{n\alpha}{2} - \Delta_n \cdot 180^0\right)} = \frac{1 + a^m}{1 + a^n} \sqrt{a^{n-m}} \tag{56}$$

Bedenkt man ferner, daß $N = \sin \frac{\psi}{2}$ und also N bei gegebener Kegelfläche ganz bestimmt ist, so gibt diese Formel die Beziehung, welche zwischen a und α bestehen muß, wenn um die Punkte des ähnlichen Punktsystems auf der Kegelfläche eine Konstruktion tangierender Kreise mit dem Kontakt m und n möglich sein soll. Es ist jedoch im Vorhergehenden noch keine Rücksicht auf eine der Bedingungen genommen, der ein „ähnliches System tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche“ genügen muß, nämlich diese, daß sich nirgends im System Kreise schneiden dürfen.

Es wird aber deutlich sein, daß diejenigen Werte von a und α, welche der Beziehung (56) genügen und außerdem zwischen den Werten liegen, welche diese Größen bei den dreizähligen Kontakten $(n-m)$, m und n und m, n und $(m+n)$ besitzen, immer solchen Systemen entsprechen müssen.

§ 3. Die Werte von a und α für dreizählige Kontakte. Die Werte von a und α für den dreizähligen Kontakt $(n-m)$, m und n ergeben sich durch Lösung folgender zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos N\left(\frac{n-m}{2}\alpha - \Delta_{n-m}\cdot 180^0\right)}{\cos N\left(\frac{m\alpha}{2} - \Delta_m\cdot 180^0\right)} &= \frac{1+a^{n-m}}{1+a^m}\sqrt{a^{2m-n}} \\ \frac{\cos N\left(\frac{m\alpha}{2} - \Delta_m\cdot 180^0\right)}{\cos N\left(\frac{n\alpha}{2} - \Delta_n\cdot 180^0\right)} &= \frac{1+a^m}{1+a^n}\sqrt{a^{n-m}} \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Die Werte von a und α für den Kontakt m, n und $(m+n)$ aus folgenden beiden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos N\left(\frac{m\alpha}{2} - \Delta_m\cdot 180^0\right)}{\cos N\left(\frac{n\alpha}{2} - \Delta_n\cdot 180^0\right)} &= \frac{1+a^m}{1+a^n}\sqrt{a^{n-m}} \\ \frac{\cos N\left(\frac{n\alpha}{2} - \Delta_n\cdot 180^0\right)}{\cos N\left(\frac{m+n}{2}\alpha - \Delta_{m+n}\cdot 180^0\right)} &= \frac{1+a^n}{1+a^{m+n}}\sqrt{a^m} \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Die Lösung dieser Gleichungen kann wieder nicht auf direktem Wege geschehen, die Resultate graphischer Annäherung für bestimmte Werte von m, n und N werden später zur Sprache kommen.

§ 4. Einführung des Faktors b. Wird ein „ähnliches System tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche“ abgerollt, so werden die Kreise des abgerollten Systems vom Zentrum aus unter einem konstanten Winkel gesehen, welchen wir ω' nennen wollen. Es folgt dann aus Fig. 34 ($TA = \varrho_o$ gesetzt, man siehe auch S. 115):

$$\sin\frac{\omega'}{2} = \frac{r_o}{\varrho_o} = \pm\frac{\sqrt{1+a^{2m}-2a^m\cos\delta'_m}}{1+a^m}$$

woraus sich ableiten läßt:

$$\cos\frac{\omega'}{2} = \pm 2\frac{\sqrt{a^m}}{1+a^m}\cos\frac{\delta'_m}{2}$$

oder, wenn man $\delta'_m = N\delta_m$ und $\delta_m = m\alpha - \Delta_m\cdot 360^0$ setzt:

$$\cos\frac{\omega'}{2} = \pm 2\frac{\sqrt{a^m}}{1+a^m}\cos N\left(\frac{m\alpha}{2} - \Delta_m\cdot 180^0\right) \quad (59)$$

Es läßt sich mit dieser Formel ω' berechnen, wenn a und α für das System gegeben sind.

Wir werden nun den Faktor b für die ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche definieren als das Verhältnis des Winkels ω' zu dem Sektorwinkel der abgerollten Fläche, den wir mit ζ bezeichnet haben.

Es wird also nach (51) S. 143:

$$b = \frac{\omega'}{\zeta} = \frac{\omega'}{N \cdot 360^0} \tag{60}$$

Die Formeln (59) und (60) erlauben die Berechnung von b für jedes System, es muß also auch wieder möglich sein, die Beziehung zwischen b und α graphisch darzustellen; es wird dies im folgenden Kapitel näher besprochen werden.

§ 5. Eigenschaften der ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche. Mehrere Eigenschaften, welche wir im vorigen Abschnitt für die „ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene" nachwiesen, lassen sich in vollkommen gleicher Weise auch für diese Systeme auf der Kegelfläche beweisen. So wird es klar sein, daß, falls $n > m$ ist, die n-zeilige Kegelloxodrome steiler ist als die m-zeilige. Ebenso lassen sich die Regeln, welche wir dort für die Richtung der Spiralen bei dreizähligen und zweizähligen Kontakten ableiteten (S. 119 u. 120), in unveränderter Form auf diese Kreissysteme anwenden. Aus diesen Eigenschaften folgt dann wieder, daß, falls $n < 2m$ ist: $\frac{\Delta_{m+n}}{m+n} \cdot 360^0 \lessgtr \alpha \lessgtr \frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0$ ist. Auch können wir wieder in dem abgerollten System den geometrischen Ort von bestimmten Kreismittelpunkten konstruieren und auf diese Weise die abgerollten „Verschiebungskurven" erhalten, wir brauchen dazu nur die Gleichung (56) in Polarkoordinaten darzustellen. Endlich kann auch hier nachgewiesen werden, daß bei kontinuierlicher Abnahme von b oder Zunahme von a die Möglichkeit besteht, daß man immer in Kontakten aus einer Reihe m, n, $m+n$, $m+2n$ usw. bleibt, daß man aber auch in andere Reihen übergehen kann. Nimmt man diese Anwesenheit eines Druckes in einem System von Kreisen, die man sich dabei als materielle Scheiben zu denken hat, an und zwar eines Druckes, welcher die beschreibenden Linien entlang und vom Scheitel weggerichtet ist, dann ist damit die Notwendigkeit geschaffen, daß bei kontinuierlicher Abnahme von b oder Zunahme von a die Kontakte einer Reihe m, n, $m+n$, $m+2n$ usw. durchlaufen werden.

Daß man beim Fortrücken in einer bestimmten Kontaktreihe p, q dieselbe Limitdivergenz wie bei den „regelmäßigen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche" erreichen wird, die durch die Formel $\frac{\chi\mu+\nu}{\chi p+q} \cdot 360^0$ dargestellt wird (man siehe S. 59), läßt sich auf ganz dieselbe Weise ableiten, wie das für die Systeme auf der Kreiszylinderfläche geschehen ist. Dieselben Kontaktreihen haben also auf allen Kegelflächen, auf der Ebene und auf der Zylinderfläche dieselbe Limitdivergenz.

Kapitel IV. Ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche. Zahlenanwendungen.

§ 1. Die Beziehung zwischen a und α für verschiedene Werte von ψ. Die Gleichung (56) ist allgemein gültig, also auch wenn $\psi = 180^0$, d. h. $N = 1$ wird, sie geht dann über in:

$$\frac{\cos\frac{m\alpha}{2}}{\cos\frac{n\alpha}{2}} = \frac{1+a^m}{1+a^n}\sqrt{a^{n-m}}$$

also in die Beziehung (40), die wir im vorigen Abschnitt für „ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene" ableiteten (S. 115). Es war dies zu erwarten, denn wenn $\psi = 180^0$ ist, geht die Kegelfläche über in eine Ebene.

Setzt man $\psi = 0^0$, also in der Gleichung (56) $N = 0$, so wird dieselbe:

$$1 = \frac{1+a^m}{1+a^n}\sqrt{a^{n-m}}$$

und dieser Formel kann nur dann genügt werden, wenn $a = 1$ wird. Auch dies war zu erwarten, denn für $\psi = 0^0$ geht die Kegelfläche über in eine Kreiszylinderfläche und die Kreise eines regelmäßigen Systems darauf haben gleiche Durchmesser.

Es kommen also in diesem Kapitel diejenigen Werte von N in Betracht, welche zwischen 1 und 0 gelegen sind.

Nehmen wir den Fall $m = 0, n = 1$, d. h. $\Delta_m = 1, \Delta_n = 0$ (siehe S. 33), so geht dabei die Gleichung (56) über in:

$$\frac{\cos N \cdot 180^0}{\cos N\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{a}}{1+a} \tag{61}$$

Es ist hierin $\frac{N\alpha}{2} \leqq 90^0$ und es muß also auch $N \cdot 180^0 \leqq 90^0$ sein, denn sonst könnte das erste Glied dieser Gleichung nicht positiv sein wie das zweite. Es folgt hieraus, daß die Gleichung (61) nur Geltung hat, wenn $N \leqq \frac{1}{2}$, also nach (50): $\psi \leqq 60^0$ und nach (51b): $\zeta \leqq 180^0$ ist.

Die Systeme mit dem Kontakt 0 und 1 sind also nur möglich auf Kreiskegelflächen, deren Scheitelwinkel kleiner oder gleich 60^0, deren abgerollte Scheitelwinkel mithin kleiner oder gleich 180^0 sind.

Betrachten wir jetzt den Fall $m = 1$, $n = 1$, d. h. $\Delta_m = 1$, $\Delta_n = 0$, so geht (56) über in:

$$\frac{\cos N\left(\frac{\alpha}{2} - 180^0\right)}{\cos N\frac{\alpha}{2}} = 1 \tag{62}$$

Es wird dieser Gleichung für jeden Wert von N nur durch $\alpha = 180^0$ genügt. Es folgt hieraus, daß Systeme mit dem

Kontakt 1 und 1 auf allen Kreiskegelflächen möglich sind, und daß sie immer eine Divergenz von 180° zeigen.

Es sei bemerkt, daß der Kontakt 1 und 1 für eine bestimmte Kreiskegelfläche immer einerseits durch den dreizähligen Kontakt 1, 1 und 2 begrenzt, jedoch nur für den Fall $\psi \leq 60^0$ auch anderseits durch den dreizähligen Kontakt 0, 1 und 2 abgeschlossen wird.

Bei anderen Werten von m und n können die Konstruktionen auf allen möglichen Kreiskegelflächen ausgeführt werden wie beim Kontakt 1 und 1.

§ 2. Die Beziehung zwischen a und α für $\psi = 28^0\,57'\,18''$ $\left(N = \frac{1}{4}\right)$ und für $\psi = 60^0$ $\left(N = \frac{1}{2}\right)$ und deren graphische Darstellung. Aus verschiedenen Gründen, die später klargelegt werden sollen, haben wir die Systeme auf derjenigen Kreiskegelfläche, für die $\psi = 28^0\,57'\,18''$ ist, einem eingehenden Studium unterworfen. Es ist für diese Kegelfläche $N = \frac{1}{4}$ und also $\zeta = 90^0$.

Die verschiedenen Formeln, in die Gleichung (56) für diesen Wert von N und bei verschiedenen Werten von m und n übergeht, sind in der zweiten Kolumne der Tabelle XVIII zu finden. Will man mit diesen Formeln bei bestimmten Werten von a die zugehörigen von α, oder umgekehrt, finden, so kann das meistens nicht direkt geschehen. Wir haben dazu wieder die graphische Methode angewandt. Wenn man diese Berechnungen für eine Reihe Werte von α ausführt, so kann man schließlich wieder die Beziehung zwischen a und α für verschiedene Werte von m und n graphisch darstellen. Man findet diese Darstellung in Figur II der Tafel VII. Es enthält jedoch diese Figur noch Kurven, die nicht auf die hier gemeinte Kegelfläche Bezug haben. Zuerst sind darauf die Kurven der Darstellung I derselben Tafel, welche für die Kreissysteme auf einer Ebene, also für $\psi = 180^0$ gelten, nochmals wiederholt. Oberhalb jeder der Kurven dieses Systems findet man nun noch zwei Kurvensysteme, welche dieselben Ziffern tragen und von denen das eine Bezug hat auf Kontaktsysteme auf einer Kreiskegelfläche, für welche $\psi = 60^0$ ist, während das andere sich auf die jetzt betrachtete Kegelfläche $\psi = 28^0\,57'\,18''$ bezieht. Es muß bemerkt werden, daß auf der Ebene der Kontakt 1 und 1 nur in dem Grenzfall 1, 1 und 2 möglich war, während für die Kegelfläche $\psi = 28^0\,57'\,18''$ dieser Kontakt für mehrere Werte von a auftritt und einerseits durch den dreizähligen Kontakt 1, 1 und 2, anderseits durch denjenigen 0, 1 und 1 abgeschlossen wird. Es schließt sich in diesem Punkt der Kontakt 0 und 1 an. Die Beziehung zwischen a und α für diesen letzten Kontakt wird durch eine Kurve wiedergegeben, die sich einer geraden Linie nähert, welche fast horizontal verläuft.

Obwohl also die Kurven, welche sich auf diese Kegelfläche beziehen, in ihrem Verlauf große Ähnlichkeit mit denjenigen, welche für die Ebene gelten, zeigen, so bildet dennoch die Anwesenheit der Kurven für den Kontakt 1 und 1 und denjenigen 0 und 1 einen bedeutenden Unterschied.

Was nun die Kurven der Darstellung betrifft, die sich auf die Kegelfläche mit dem Scheitelwinkel $\psi = 60^0$ beziehen, so zeigen

Tabelle XVIII.

Zweizählige Kontakte bei ähnlichen Kreissystemen auf einer Kreiskegelfläche.

Kegelscheitelwinkel $\psi = 28^0\,57'\,8''\left(N = \frac{1}{4}\right)$.

Kontakte:	Beziehung zwischen a und α:	Rechtwinklige Kontakte:	Andere merkw. Kontaktfälle:
0 u. 1	$\frac{\cos 45^0}{\cos\frac{\alpha}{8}} = \frac{2\sqrt{a}}{1+a}$	$\alpha = 0^0$ $a = 0{,}17158$	$\alpha = 144^0$ $a = 0{,}1985$
1 u. 1	$\alpha = 180^0$	$\alpha = 180^0$ $a = 0{,}4559$	
1 u. 2	$\frac{\cos\frac{\alpha}{8}}{\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{4}\right)} = \frac{1+a}{1+a^2}\sqrt{a}$	$\alpha = 143^0\,30'$ $a = 0{,}729$	
2 u. 3	$\frac{\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{3\alpha}{8} - 45^0\right)} = \frac{1+a^2}{1+a^3}\sqrt{a}$	$\alpha = 138^0\,30'$ $a = 0{,}886$	
3 u. 5	$\frac{\cos\left(\frac{3\alpha}{8} - 45^0\right)}{\cos\left(90^0 - \frac{5\alpha}{8}\right)} = \frac{1+a^3}{1+a^5}a$	$\alpha = 137^0\,39'$ $a = 0{,}955$	
5 u. 8	$\frac{\cos\left(90^0 - \frac{5\alpha}{8}\right)}{\cos(\alpha - 135^0)} = \frac{1+a^5}{1+a^8}\sqrt{a^3}$	$\alpha = 137^0\,31'$ $a = 0{,}9825$	
1 u. 3	$\frac{\cos\frac{\alpha}{8}}{\cos\left(45^0 - \frac{3\alpha}{8}\right)} = \frac{1+a}{1+a^3}a$	$\alpha = 107^0\,50'$ $a = 0{,}854$	$\alpha = 120^0$ $a = 0{,}829$
3 u. 4	$\frac{\cos\left(45^0 - \frac{3\alpha}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 45^0\right)} = \frac{1+a^3}{1+a^4}\sqrt{a}$	$\alpha = 100^0\,48'$ $a = 0{,}939$	
1 u. 4	$\frac{\cos\frac{\alpha}{8}}{\cos\left(45^0 - \frac{5\alpha}{8}\right)} = \frac{1+a}{1+a^4}\sqrt{a^3}$		$\alpha = 90^0$ $a = 0{,}903$
2 u. 5	$\frac{\cos\left(45 - \frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{5\alpha}{8} - 90^0\right)} = \frac{1+a^2}{1+a^5}\sqrt{a^3}$		$\alpha = 144^0$ $a = 0{,}932$

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY WOODS HOLE LIBRARY MASS.

auch diese in ihrem Verlauf mit denjenigen, die auf die Ebene und auf die Kegelfläche $\psi = 28^0\,57'\,18''$ Bezug haben, große Ähnlichkeit. Es muß bemerkt werden, daß hier der Kontakt 1 und 1 für mehrere Werte von a möglich ist, daß aber der Kontakt 0 und 1 zwar theoretisch möglich ist, aber nur für $a = 0$. Nun wird eine Konstruktion, für die $a = 0$ ist, dargestellt durch einen einzigen Kreis und hat also keinen praktischen Wert. Praktisch endet also hier die Darstellung schon vor dem Punkt $a = 0$, $\alpha = 180^0$, theoretisch aber gehört die ganze Abszissenachse noch hinzu.

Bei näherer Betrachtung enthält unsere Darstellung noch eine vierte Serie Kurven. Für den Fall, daß $\psi = 0^0$ ist und also die Kegelfläche in eine Zylinderfläche übergeht, wird für alle Werte von α der Faktor $a = 1$ sein. Also wird die Reihe Kurven, die sich auf diesen Fall beziehen, dargestellt durch die horizontale Linie, die unsere Darstellung an der oberen Seite abgrenzt. Auf dieser Linie hätten wir also z. B. bestimmte Punkte angeben können, welche die dreizähligen Kontakte für die Kreiszylinderfläche bezeichneten und für die wir die Werte von α aus den Tabellen II und IV entnehmen könnten. Es hat diese Erwägung für unsere weiteren Betrachtungen eine gewisse Bedeutung.

§ 3. Die Werte von a und α für dreizählige Kontakte. Die Tabelle XIX enthält die Werte von a und α für einige dreizählige Kontakte auf der Kegelfläche, für die

$$\psi = 28^0\,57'\,18''\left(N = \frac{1}{4},\ \zeta = 90^0\right)$$

ist. Es sind diese Werte mit Ausnahme des ersten, welcher direkt berechnet wurde, durch graphische Annäherung gefunden, und wir haben diese Annäherung nicht weiter fortgesetzt, weil die Auswahl einer Kegelfläche doch immer etwas Willkürliches hat.

Tabelle XIX.

Dreizählige Kontakte bei ähnlichen Kreissystemen auf einer Kreiskegelfläche.

Kegelscheitelwinkel $\psi = 28^0\,57'\,18''\left(N = \frac{1}{4}\right)$.

Kontakte:	Divergenz (α):	Hauptverhältnis (a):
0, 1 u. 1	180^0	0,2167
1, 1 u. 2	180^0	0,625
1, 2 u. 3	$128^0\,30'$	0,823
2, 3 u. 5	$142^0\,6'$	0,929
3, 5 u. 8	$135^0\,55'$	0,972
1, 3 u. 4	$96^0\,55'$	0,901

Eine Vergleichung dieser Werte mit denjenigen, welche wir in den Tabellen II (S. 38) und IV (S. 53) für die dreizähligen Kontakte auf der Kreiszylinderfläche und in der Tabelle XIV (S. 126) für solche auf der Ebene gaben[1]), wird ergeben, daß die Werte von α für dieselben Kontakte nur sehr wenig von einander verschieden sind. Dasselbe wird man finden, wenn man diese Kontakte für andere Werte von ψ berechnet und eine genauere Annäherungsberechnung als die von uns

1) Man siehe auch die Tabelle XV S. 126.

ausgeführte wird dann ergeben, daß die Werte von α für dreizählige Kontakte für die Kreiskegelfläche zwischen denjenigen liegen, welche für dieselben Kontakte auf der Kreiszylinderfläche und auf der Ebene gelten. Die größte Differenz, welche die Werte von α für dieselben dreizähligen Kontakte aufweisen können, ist die, welche die Werte von α für den dreizähligen Kontakt 1, 2 und 3 auf der Kreiszylinderfläche und auf der Ebene aufweisen, d. i. also 24' 15". Für höhere Kontakte wird die Differenz immer geringer.

Man kann diesen wichtigen Schluß auch aus unserer Darstellung II Tafel VII ablesen. Dort liegen ja dieselben dreizähligen Kontakte für verschiedene Werte von ψ fast genau auf vertikalen Linien. Es wird dies besonders dann klar, wenn man nach der Schlußbemerkung des vorigen Paragraphen auf der horizontalen Linie $a = 1$ die dreizähligen Kontakte für die Kreiszylinderfläche abträgt. Aus unserer Figur ersieht man noch, daß die Verbindungslinie der Kontakte 1, 2 und 3 merkbar, aber doch ganz wenig von der vertikalen Richtung abweicht, für die übrigen Verbindungslinien übereinstimmender Kontakte ist das nicht mehr der Fall.

§ 4. Die Darstellung der allgemeinen Beziehung zwischen a, α und ψ im Raume. Der Zusammenhang der Tatsachen, die wir in den vorigen Paragraphen besprachen, wird wesentlich verdeutlicht, wenn wir die Beziehung zwischen a, α und ψ, wie sie durch die Gleichung:

$$\frac{\cos N\left(\frac{m\,\alpha}{2} - \Delta_m \cdot 180^0\right)}{\cos N\left(\frac{n\,\alpha}{2} - \Delta_n \cdot 180^0\right)} = \frac{1 + a^m}{1 + a^n} \sqrt{a^{n-m}}$$

worin $N = \sin\frac{\psi}{2}$, gegeben wird, graphisch darstellen. Dazu werden wir auf der nach rechts laufenden horizontalen Achse wieder die Werte von α abtragen, auf der vertikalen diejenigen von a und auf der dritten Achse diejenigen von ψ. Weil die Figur für mehrere Werte von m und n sehr kompliziert werden würde, so haben wir uns auf eine geringe Anzahl Kontaktfälle beschränkt und auf Tafel XI die hierfür geltende Raumfigur in schiefer Projektion (Kavalierperspektive) wiedergegeben.

Zuerst bemerken wir, daß die vier Kurvensysteme der graphischen Darstellung II Tafel VII die Schnittlinien darstellen, die man bekommt, wenn man die Flächen der Raumdarstellung durch die Ebenen $\psi = 0$, $\psi = 28^0\,57'\,18''$, $\psi = 60^0$ und $\psi = 180^0$ schneidet.

In unserer Raumdarstellung sind diese vier Ebenen angedeutet und man kann darin die vier Kurvensysteme, soweit die Kontakte berücksichtigt wurden, wiederfinden. Hat man sich von der Lage dieser Kurvensysteme Rechenschaft gegeben, so wird es deutlich sein, daß die Beziehung zwischen a, α und ψ dargestellt wird:

1. für den Kontakt 0 und 1 durch die Fläche $ABCD$,
2. „ „ „ 1 „ 1 „ „ Ebene ABE,
3. „ „ „ 1 „ 2 „ „ Fläche $AEFG$,
4. „ „ „ 1 „ 3 „ „ „ $GFHD$.

Mehrere Kontaktfälle wurden bei unserer Darstellung nicht berücksichtigt. Es muß hierbei noch bemerkt werden, daß die Fläche $ABCD$ nicht die vollständige Beziehung zwischen a, α und ψ für

den Kontakt 0 und 1 darstellt, dazu muß man sich diese Fläche nach links fortgesetzt denken bis die Divergenz 0^0 erreicht wird.

Die Kurven, welche die angegebenen Flächen gemeinsam haben, beziehen sich auf die dreizähligen Kontakte. Es sind in unserer Darstellung vier solcher Kurven gezeichnet worden, nämlich:

die Kurve AB, welche auf den Kontakt 0, 1 und 1,
„ „ AE, „ „ „ „ „ 1, 1 „ 2,
„ „ GF, „ „ „ „ „ 1, 2 „ 3 und
„ „ DH, „ „ „ „ „ 1, 3 „ 4

Bezug hat.

Die Kurven AB und AE sind natürlich ebene Kurven; es ist ja (siehe S. 151) für den Kontakt 1 und 1 immer $\alpha = 180^0$[1]). Aber auch die beiden anderen Kurven können nach dem, was wir im vorigen Paragraphen besprachen, als ebene Kurven betrachtet werden, weil der Wert α für dieselben dreizähligen Kontakte auf verschiedenen Kegelflächen als nahezu konstant zu betrachten ist. Es gilt dies natürlich ebensogut für die Kurven, welche sich auf dreizählige Kontakte beziehen, die wir hier nicht berücksichtigt haben.

Ferner sei darauf hingewiesen, daß alle Flächen, welche die Beziehung zwischen a, α und ψ darstellen, mit Ausnahme der ebenen Fläche ABE, an der einen Seite durch einen Teil der Linie AD begrenzt werden. Außerdem werden alle diese Flächen mit Ausnahme der beiden Flächen $ABCD$ und ABE vorne durch eine Kurve desjenigen Kurvensystems begrenzt, das die Beziehung zwischen a und α für die Kreiskonstruktionen auf einer Ebene darstellt und auf Tafel VII in der Fig. I zu finden ist. Es folgt hieraus, daß alle Flächen (praktisch) durch ebene Kurven begrenzt werden. Beachtet man diesen Umstand, so wird es leicht sein, sich auch eine Vorstellung von der Lage von Flächen zu machen, welche wir nicht abbildeten.

Die Kurven, welche auf die dreizähligen Kontakte der Hauptreihe Bezug haben, fallen nacheinander auf verschiedene Seiten der Fläche $\alpha = 137^0\,30'\,28''$, welche wir als „Grenzfläche der Hauptreihe" bezeichnen wollen. Werden in dieser Reihe $m = \infty$ und $n = \infty$, so fällt die Kurve für den dreizähligen Kontakt mit der Linie NQ zusammen. Es schneidet also die Grenzfläche der Hauptreihe alle Flächen, welche sich auf Kontakte dieser Reihe beziehen, mit Ausnahme der Ebene ABE, welche für den Kontakt 1 und 1 gilt. Man findet in unserer Figur die Schnittlinien mit den Flächen $ABCD$ und $AEFG$ angegeben. Dieselbe Bedeutung, die die Ebene $\alpha = 137^0\,30'\,28''$ für die Hauptreihe besitzt, hat die Ebene $\alpha = 99^0\,30'\,5''$ für die erste Nebenreihe. Es ist folglich diese Ebene als „Grenzfläche der 1. Nebenreihe" bezeichnet.

Ist diese Raumdarstellung besonders geeignet, eine Einsicht in die vollständige Beziehung zwischen a, α und ψ zu geben, so sind für ein genaueres Studium diejenigen Fälle passender, bei denen

---

1) Die Gleichung der Kurve AB findet man, indem man in (61) $\alpha = 180^0$ setzt, sie ist also $\frac{\cos N \cdot 180^0}{\cos N \cdot 90^0} = \frac{2\sqrt{a}}{1+a}$, diejenige der Kurve AE bekommt man dadurch, daß man in (56) $m = 1$, $n = 2$, $A_m = 0$, $A_n = 1$ und $\alpha = 180^0$ setzt, sie ist: $\cos N \cdot 90^0 = \frac{1+a}{1+a^2}\sqrt{a}$. Diese Kurven sind auf direktem Wege konstruiert worden.

entweder a, α oder ψ als konstant betrachtet werden. Die Kurvensysteme, welche sich auf diese Fälle beziehen, wird man erhalten, wenn man unsere Raumdarstellung durch Ebenen schneidet, welche rechtwinklig zu einer der Achsen stehen. Der Fall, bei dem ψ verschiedene konstante Werte annimmt, wurde schon in § 2 dieses Kapitels besprochen, es bleiben jetzt noch die Fälle, bei welchen α oder a bestimmte Werte besitzen, übrig.

§ 5. Verschiedene Systeme, welche mit ein und demselben Wert von α möglich sind. Denkt man sich unsere Raumdarstellung durch verschiedene Ebenen, für die α konstant ist, geschnitten, so werden niemals alle Flächen dieser Darstellung durch dieselbe Ebene getroffen und daraus lassen sich mehrere wichtige Schlüsse ziehen, von denen wir hier einige angeben wollen:

1. Mit der Divergenz 180^0 können ausschließlich Kontaktsysteme 1 und 1 hergestellt werden; solche sind auf allen Kegelflächen möglich.

2. Mit der Divergenz $\frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$ können nur Systeme mit dem Kontakte 0 und 1, solche mit dem Kontakte 1 und 2 und solche mit dem Kontakte 2 und 5 angefertigt werden. Auf Kegelflächen, deren Scheitelwinkel größer als 60^0 ist, sind jedoch keine Systeme mit dem Kontakte 0 und 1 möglich, die beiden anderen Kontaktfälle sind auf allen möglichen Kegelflächen zu realisieren.

3. Mit der Divergenz $(1 - \chi)\ 360^0 = 137^0\,30'\,28''$ sind Systeme möglich mit allen Kontaktfällen der Hauptreihe, mit Ausnahme des Kontaktes 1 und 1. Die Systeme mit dem Kontakte 0 und 1 sind wieder unmöglich auf Kegelflächen, deren Scheitelwinkel größer als 60^0 ist.

4. Systeme mit der Divergenz $\frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$ sind nur möglich mit dem Kontakte 0 und 1 und mit dem Kontakte 1 und 3. Für die Systeme mit dem Kontakte 0 und 1 gilt dieselbe Beschränkung wie in den Fällen 2 und 3.

Man kann diesen Schlüssen nach Belieben andere hinzufügen.

§ 6. Verschiedene Systeme, die mit ein und demselben Wert von a möglich sind. Von noch größerem Interesse ist die Frage nach den Systemen, welche mit einem bestimmten Wert von a auszuführen sind. Wie gesagt, muß man zur Lösung dieser Frage die Raumdarstellung durch Ebenen, für die a konstant ist, d. h. also durch horizontale schneiden. Es ist in unserer Figur eine solche Schnittfläche, wofür $a = 0{,}5$, eingezeichnet worden. Außerdem wurde in der graphischen Darstellung IV Tafel III das Kurvensystem, das man in dieser Weise erhält, nochmals wiederholt, während darin auch ein solches für $a = 0{,}8$ konstruiert worden ist. Die Kurven dieser Figur haben auch auf solche Kontaktfälle Bezug, welche bei unserer Raumdarstellung nicht berücksichtigt wurden.

Was die Anfertigung dieser Darstellung betrifft, so sei bemerkt, daß dieselbe aus der Formel (56) durch Berechnung von verschiedenen zusammengehörigen Werten von ψ und α für $a = 0{,}5$ oder $a = 0{,}8$ aufzufinden war und also wiederum zu Annäherungsrechnungen Veranlassung gab.

Wir wollen nun zuerst darauf hinweisen, daß, falls man die räumliche graphische Darstellung durch horizontale Ebenen schneidet,

für die a sehr klein ist, nur drei Schnittkurven auftreten können und zwar mit den Flächen $ABCD$, ABE und $AEFG$. Dies wird so bleiben bis die horizontale Ebene durch den Punkt F dieser Darstellung geht. Da nun dieser Punkt dem dreizähligen Kontakt 1, 2 und 3 für Kreiskonstruktionen auf einer Ebene entspricht und nach Tabelle XIV (S. 126) $a = 0{,}346013$, $\alpha = 128^0\ 10'\ 22''$, $\psi = 180^0$, so folgt hieraus folgender wichtiger Schluß:

Mit Werten von a, die kleiner sind als 0,346013, können nur Systeme mit dem Kontakt 0 und 1, 1 und 1 oder 1 und 2 dargestellt werden.

Ferner läßt sich leicht folgende Regel einsehen:

Mit Werten von a, die zwischen 0,346013 und 0,6161 (Kontakt 1, 3 und 4) liegen, lassen sich Systeme mit dem Kontakte 0 und 1, 1 und 1, 1 und 2, 2 und 3 oder 1 und 3 anfertigen.

Solche Regeln lassen sich in einfacher Weise vermehren.

Aber auch in anderer Hinsicht läßt die gegebene Betrachtung und besonders die Darstellung IV auf Tafel III wichtige Schlüsse zu.

So folgt daraus, daß dieselben Kontaktfälle mit größeren Werten von a nur auf steileren Kegelflächen möglich sind; z. B. ist der Kontakt 1, 2 und 3 mit $a = 0{,}5$ auf einer Kegelfläche vom Scheitelwinkel von $\pm 113^0$, mit $a = 0{,}8$ auf einer solchen vom Scheitelwinkel von $\pm 47^0$ möglich.

Von besonderer Wichtigkeit ist noch folgende Überlegung:

Betrachtet man eine Reihe Konstruktionen mit demselben Wert von a, so kann man sich diese durch kontinuierliche Zu- oder Abnahme von ψ in einander übergehend denken. Aus der genannten Darstellung geht nun hervor, daß man durch Zunahme von ψ immer höhere Kontaktfälle finden muß, durch Abnahme niedrigere. Durch kontinuierliche Abnahme von ψ muß man die Kontakte einer Kontaktreihe m, n, $m+n$, $m+2n$ usw. durchlaufen; durch eine Zunahme kann man jedoch auch in andere Reihen übergehen.

Denkt man sich also eine unveränderliche Serie Kreise, deren Radien eine geometrische Reihe bilden, auf einer Kegelfläche mit veränderlichem Scheitelwinkel derart aufgestellt, daß immer ein Kontaktsystem bestehen bleibt, so wird man beim Steilerwerden der Kegelfläche niedrigere, beim Flacherwerden höhere Kontakte beobachten müssen.

Auch hier wird unter der Voraussetzung, daß die Kreise materielle Scheiben sind, die Annahme eines Druckes, der vom Scheitel aus die beschreibenden Linien entlang wirkt, genügen, um auch beim Flacherwerden der Kegel die Kontakte eine bestimmte Kontaktreihe m, n, $m+n$, $m+2n$ usw. durchlaufen zu lassen.

§ 7. Die Beziehung zwischen b und α. Nachdem wir gesehen haben (S. 144), daß die „ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf der Kreiskegelfläche" als ein Kettenglied betrachtet werden können zwischen den ähnlichen auf der Ebene und den regelmäßigen auf einer Kreiszylinderfläche, so wird man von vornherein erwarten können, daß die Beziehung zwischen b und α für erstere Systeme auch mit derjenigen, welche wir für die beiden letzteren fanden, Übereinstimmung zeigen wird. Wir bringen nämlich in Erinnerung, daß die graphische Darstellung dieser Beziehung für Ebene und Zylinderfläche vom Kontakte 1, 2 und 3 ab gerechnet, praktisch als identisch betrachtet werden konnte (man siehe Darstellung II

Tafel II), während wir die Abweichung für den Kontakt 1 und 2 in der graphischen Darstellung III Tafel III wiedergaben. Auch heben wir nochmals hervor, daß die Darstellung für die Ebene im Punkte $b = 0{,}5$ $\alpha = 180^0$ endete.

Berechnet man nun die zusammengehörigen Werte von b und α für die ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche, so stellt sich heraus, daß wieder vom Kontakt 1, 2 und 3 ab die Kurven der Darstellung mit denjenigen unserer Darstellung II Tafel II praktisch zusammenfallen, während alle Kurven, die sich auf den Kontakt 1 und 2 beziehen, zwischen die beiden der Darstellung III auf Tafel III fallen, und zwar um so mehr in die Nähe der Kurve für die Ebene, je größer ψ, und um so mehr in die Nähe der Parabel für die Zylinderfläche, je kleiner ψ ist.

Dabei muß aber bemerkt werden, daß, sobald ψ kleiner als 180^0 ist, Systeme mit dem Kontakt 1 und 1 möglich sind und also auch ein Teil der Linie $\alpha = 180^0$ der graphischen Darstellung hinzugefügt werden muß. Jedoch kann der Kontakt 0 und 1 erst auftreten, wenn $\psi \leq 60^0$ ist, und folglich wird erst für diese Fälle die Gerade für den Kontakt 1 und 1 bis zu dem Punkt $b = 1$, $\alpha = 180^0$ durchlaufen und auch die Linie $b = 1$ einen Teil der Darstellung bilden.

Für Kegelflächen, bei denen $\psi < 60^0$ ist, wird also die Übereinstimmung mit der Darstellung II Taf. II sehr vollkommen und diese letztere kann dann für praktische Zwecke immer unverändert angewandt werden.

Aus dem Gesagten ergibt sich, daß die Eigenschaften, die wir aus der Beziehung zwischen b und α für die Systeme auf der Zylinderfläche in Kap. V des ersten Abschnittes ableiteten, mit wenigen Änderungen auch auf diese Beziehung bei Systemen auf Kegelflächen Anwendung finden. Es ist dies eines der wichtigsten Resultate, zu denen unser Studium geführt hat.

§ 8. Anfertigung der geometrischen Konstruktionen auf der abgerollten Kegelfläche. Obwohl die Methode der Anfertigung von Kreiskonstruktionen auf der abgerollten Kegelfläche aus dem früher Gesagten bereits hervorgeht, so möge doch hier eine solche Konstruktion der Wichtigkeit wegen an einem bestimmten Beispiel erläutert werden.

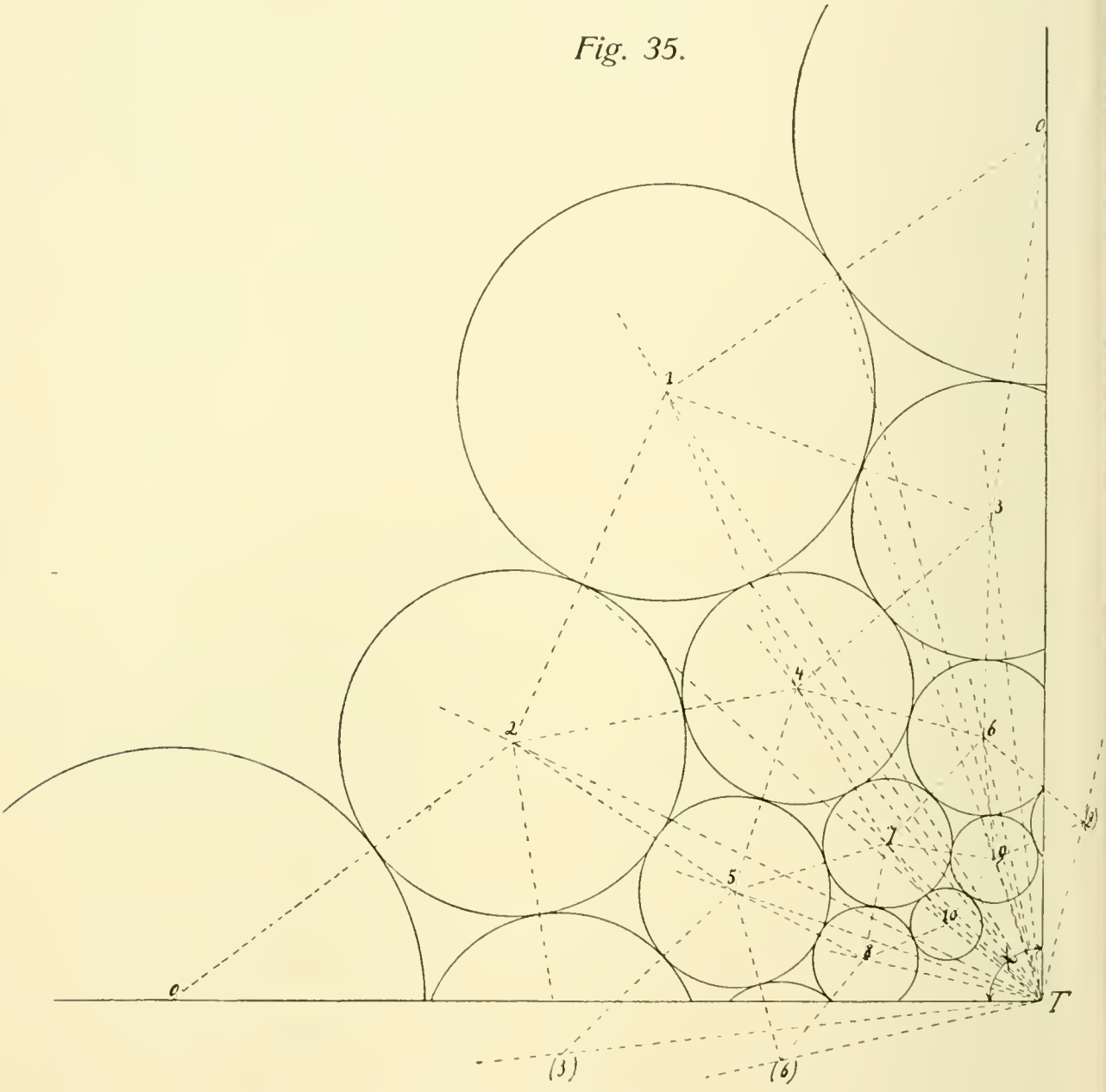
Nehmen wir den Fall, daß auf einer Kreiskegelfläche, für welche $\psi = 28^0\,57'\,18''$ also $N = \frac{1}{4}$ und $\zeta = 90^0$ ist, ein Kontaktsystem mit dem Kontakt 1, 2 und 3 besteht, und daß wir eine Zeichnung davon auf der abgerollten Kegelfläche entwerfen sollen. Nach der Tabelle XIX (S. 154) ist für diesen Kontakt $\alpha = 128^0\,30'$ und $a = 0{,}823$. Auf der abgerollten Kegelfläche ist dann die Divergenz nach (52) (S. 144) $\alpha' = N\alpha = 32^0\,7'{,}5$. Das Verhältnis der Leitstrahlen nach den Punkten auf der Hauptspirale ist in der abgerollten Figur natürlich ebenfalls 0,823.

Man beginnt damit (siehe Figur 35) den Winkel ζ[1]) (hier 90^0) zu zeichnen, welcher die abgerollte Kegelfläche darstellt, so daß die

1) Durch einen Irrtum wurde in unserer Figur dieser Winkel durch χ anstatt durch ζ bezeichnet.

ganze Figur innerhalb der Schenkel dieses Winkels liegen muß. Darauf trägt man von einem dieser Schenkel aus, wozu wir den vertikalen wählten, dreimal den Winkel α' ab, indem man die Linien $T1$, $T2$ und $T(3)$ konstruiert. Die letzte Linie wird außerhalb

Fig. 35.



Ähnliches System tangierender Kreise mit dem Kontakt 1, 2 und 3 auf einer abgerollten Kreiskegelfläche

($\psi = 28^\circ 57' 18''$, $N = \frac{1}{4}$, $\zeta = 90^\circ$, $\alpha = 128^\circ 30'$, $a = 0{,}823$).

der Schenkel des Winkels ζ fallen und mit dem horizontalen Schenkel einen Winkel $o\,T\,(3)$ bilden. Dieser letzte wird nun wieder vom vertikalen Schenkel aus abgetragen, indem die Linie $T3$ konstruiert wird, und darauf wird von dieser Linie aus nochmals dreimal der Winkel α' angetragen. Die Linie $T(6)$ fällt wieder außerhalb des Winkels ζ und gibt Veranlassung zur Konstruktion der Linie T 6. In dieser Weise kann man solange weitergehen bis man soviel Linien $T1$, $T2$, $T3$, $T4$ usw. konstruiert hat als man Kreise im System einzeichnen will.

Es wird nun auf dem vertikalen Schenkel ein Punkt 0 beliebig gewählt und darauf auf der Linie $T1$ der Punkt 1 so angenommen, daß der Abstand $T1$ a-mal den Abstand $T0$ beträgt. In gleicher Weise werden die Punkte 1, 2, 3 usw. bestimmt. Hiermit sind dann die Mittelpunkte der Kreise des Systems aufgefunden.

Es erübrigt sich jetzt noch anzugeben, in welcher Weise man die Radien der Kreise finden kann. Bedenkt man, daß der Kreis 0 den Kreis 1 tangiert und daß der Berührungspunkt auf der Linie liegt, welche den Winkel $0\,T\,1$ halbiert, so ist dadurch sowohl der Radius des Kreises 0 als derjenige des Kreises 1 bestimmt. Da aber der Kreis 0 auch die Kreise 2 und 3 tangiert, so kann man noch auf zwei andere Weisen die Strahlen des Kreises 0 finden und hat dann eine Kontrolle für die Richtigkeit der Konstruktion. Auch die Strahlen der anderen Kreise sind auf gleiche Weise zu bestimmen und damit ist die Konstruktion weiter auszuführen. Dabei muß dann noch bemerkt werden, daß, falls ein Kreis nicht ganz innerhalb der Schenkel des Winkels ζ liegt, wie es z. B. mit dem Kreis 3 der Fall ist, der ergänzende Teil sich in einfacher Weise konstruieren läßt, indem man den zugehörigen Mittelpunkt, hier also (3), außerhalb dieses Winkels aufsucht. Es wird dies keiner näheren Erörterung bedürfen.

Wir bemerken noch, daß wir eine ganze Reihe Konstruktionen auf der abgerollten Kreiskegelfläche tatsächlich ausgeführt haben. Diese Figuren wurden hier jedoch nicht reproduziert, weil sie für unsere weiteren Betrachtungen keine besondere Bedeutung besitzen. In viel höherem Maße ist das dagegen mit den Figuren der Fall, welche sich aus diesen Konstruktionen ableiten lassen und welche die horizontale Projektion der Systeme auf der Kegelfläche darstellen. Im folgenden Kapitel wird hierüber ausführlich gesprochen werden.

Kapitel V. Die horizontale Projektion ähnlicher Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche.

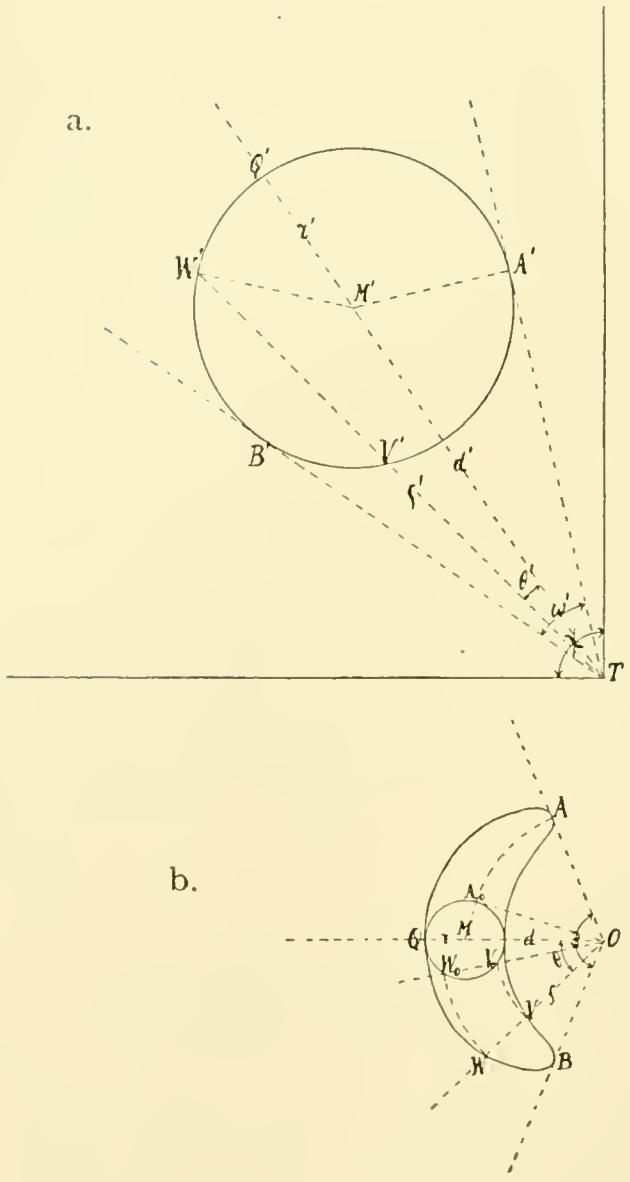
§ 1. Die horizontale Projektion eines Kreises auf einer Kreiskegelfläche: Die Folioide. Wir haben bereits früher gesagt, daß wir uns die Kegelfläche immer mit der Achse vertikal aufgestellt denken und haben bei dieser Annahme nachgewiesen, daß die horizontale Projektion eines „ähnlichen Punktsystems auf der Kegelfläche“ ein solches System auf einer Ebene bildet. Wenn wir uns jetzt fragen, was die horizontale Projektion eines „ähnlichen Systems tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche“ darstellt, so muß zuerst die Frage beantwortet werden, wie sich die horizontale Projektion eines Kreises auf einer solchen Fläche gestaltet. Dabei bedenke man, daß wir unter einem „Kreis auf einer Kreiskegelfläche“ eine Raumkurve auf dieser Fläche verstanden, die, wenn diese Fläche auf einer Ebene abgerollt wird, in einen wirklichen Kreis übergeht.

Es ist der horizontalen Projektion eines solchen Kreises von uns der Name: Folioide gegeben worden. Wir werden nämlich

nachweisen, daß diese Kurve mit den Querschnitten junger Blätter die größte Ähnlichkeit hat.

Es läßt sich diese horizontale Projektion in ganz einfacher Weise konstruieren, sobald der Kreis auf der abgerollten Kegelfläche gegeben ist. Bezeichnet man einen Leitstrahl, der aus dem Scheitel der abgerollten Figur gezogen ist, mit ϱ', den entsprechenden Leitstrahl in der horizontalen Projektion mit ϱ, so wird nach § 5 S. 143 $\varrho = \varrho' \sin\frac{\psi}{2} = N\varrho'$. Nennt man ferner den Winkel zwischen zwei Leitstrahlen auf der abgerollten Fläche φ' und den entsprechenden auf der horizontalen Projektion φ, so wird nach demselben Paragraphen $\varphi = \frac{\varphi'}{\sin\frac{\psi}{2}} = \frac{\varphi'}{N}$.

Fig. 36.



Z. B. haben wir in Fig. 36 [1]) den Fall gesetzt, daß auf einer Kreiskegelfläche, für die $\psi = 28^0\,57'\,18''$ und also $N = \frac{1}{4}$, $\zeta = 90^0$ [2]) ist, ein Kreis gezogen ist, der abgerollt den mit dem Strahl r' um M' beschriebenen (Fig. 36 a) darstellt. Es wird in diesem Fall $\varrho = \frac{1}{4}\varrho'$ und $\varphi = 4\varphi'$.

Stellt nun O die horizontale Projektion des Kegelscheitels, M diejenige von M' dar, sodaß $OM = \frac{1}{4}TM'$ ist, so kann man die horizontale Projektion, welche einem willkürlichen Punkt V' entspricht, in folgender Weise konstruieren: Man ziehe vom Scheitel T aus nach diesem Punkt den Leitstrahl ϱ', dieser möge mit TM' einen Winkel θ' einschließen. Darauf konstruiere man von O aus die Linie OV in der Weise, daß OV mit OM einen Winkel $\theta = \frac{\theta'}{N} = 4\theta'$ bildet, und nehme nun $OV = N \cdot \varrho' = \varrho$.

Auf diese Weise kann man so viele Punkte der Kurve bestimmen, als man wünscht, und damit ist die gestellte Frage beantwortet.

---

1) Fig. 37 (S. 169) stellt eine Wiederholung von Fig. 36 b in einem größeren Maßstab dar.

2) Irrtümlicherweise wurde in unserer Figur der Winkel ζ durch χ bezeichnet.

Im folgenden Kapitel werden die Eigenschaften der Folioide ausführlich besprochen, die Bedeutung des Kreises um den Punkt M in Fig. 36 b wird dann auch erklärt werden. Hier möge nur darauf hingewiesen werden, daß auf allen Leitstrahlen, welche die Kurve schneiden, zwei Punkte derselben liegen, daß ferner die Figur symmetrisch ist in Bezug auf die Linie OM und daß die Tangenten von T aus an den Kreis in der Projektion übergehen in Tangenten, die von O aus an die Folioide gezogen sind. Auch sei noch bemerkt, daß wir die Projektion des Kreismittelpunktes als „Mittelpunkt der Folioide" bezeichnen werden.

§ 2. Ähnliche Systeme tangierender Folioiden. Wird nun von einem „ähnlichen System tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche" die horizontale Projektion dargestellt, so wird daraus ein System von Folioiden resultieren, das folgende Eigenschaften besitzt: 1. die Mittelpunkte der Folioiden bilden ein ähnliches System von Punkten auf einer Ebene mit dem Hauptverhältnis a, 2. alle Folioiden sind ähnliche Figuren und die übereinstimmenden Linien von zwei aufeinander folgenden zeigen das Verhältnis a, 3. jede Folioide tangiert vier oder sechs andere, 4. im ganzen System schneiden sich nirgends Folioiden. Ein solches System werden wir „ein ähnliches System tangierender Folioiden" nennen.

Da nun im vorigen Kapitel nachgewiesen wurde, wie man die Konstruktionen tangierender Kreise auf der abgerollten Kegelfläche ausführen kann, sobald bei einem bestimmten Kontakte die Werte von a und α gegeben sind, und wir soeben gesehen haben, wie dann von jedem Kreis die horizontale Projektion entworfen werden kann, so ist hiermit die Methode der Konstruktion „ähnlicher Systeme tangierender Folioiden" gegeben. Folgendes Beispiel möge dies noch näher erläutern.

Gesetzt, wir wollen das „ähnliche System tangierender Folioiden" konstruieren, das die horizontale Projektion desjenigen „Systems tangierender Kreise" darstellt, das abgerollt durch die früher besprochene Fig. 35 (S. 160) dargestellt wird. Es zeigte dieses Kreissystem den Kontakt 1, 2 und 3 und es war dafür

$$N = \frac{1}{4},\ \zeta = 90^0,\ a = 0{,}823,\ \alpha = 128^0\,30'.$$

Man konstruiere zuerst die horizontale Projektion des Leitstrahls, der vom Kegelscheitel nach dem Punkt 0 gezogen ist, indem man von einem Zentrum O aus eine Linie von der Länge $N \cdot T0$ abträgt. Bedenkt man nun, daß das ähnliche Punktsystem, welches durch die Folioidenmittelpunkte gebildet wird, nach § 4 S. 142 dieselben Werte für a und α besitzt wie das System auf der Kegelfläche, und daß der Punkt 0 bestimmt ist, so kann man das System der Folioidenmittelpunkte konstruieren. Darauf zeichnet man nach den Regeln aus dem vorigen Paragraphen die horizontalen Projektionen der Kreise aus Fig. 35 ein. Das Resultat dieser Konstruktion findet man in Fig. 4 Tafel X und man sieht, daß auch diese Figur den Kontakt 1, 2 und 3 aufweist, wie zu erwarten war.

§ 3. Eigenschaften der ähnlichen Systeme tangierender Folioiden. Zahlreiche Eigenschaften dieser Systeme gehen unmittelbar aus dem Umstand hervor, daß sie die horizontale Projektion „ähnlicher Systeme tangierender Kreise auf einer Kreis-

kegelfläche" darstellen. So folgt daraus, daß die Beziehung zwischen a und α für die ähnlichen Systeme tangierender Folioiden dargestellt wird durch die Gleichung (56):

$$\frac{\cos N\left(\frac{m\,\alpha}{2} - \measuredangle_m \cdot 180^0\right)}{\cos N\left(\frac{n\,\alpha}{2} - \measuredangle_n \cdot 180^0\right)} = \frac{1+a^m}{1+a^n}\sqrt{a^{n-m}}$$

Es haben also auch die graphische Darstellung II auf Tafel VII und diejenige auf Tafel XI ebensogut für die Systeme tangierender Folioiden Geltung wie für solche tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche.

Ebenso ergibt sich, daß bei dem Kontakte m und n, falls $n > m$ ist, die n-zeilige Spirale die steilere ist. Auch die Regeln, welche wir für die „regelmäßigen Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche" und für die „ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene" ableiteten betreffs der Richtung der Kontaktspiralen für dreizählige und zweizählige Kontakte, werden hier unverändert Anwendung finden, da sie auch für „Systeme auf der Kreiskegelfläche" gültig waren.

Die Näherungswerte der Divergenz bei bestimmtem Kontakte, ebenso wie die Limitwerte beim Fortrücken in einer Kontaktreihe, werden wieder durch dieselben Formeln ausgedrückt.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Betrachtung des Faktors b für diese ähnlichen Systeme tangierender Folioiden. Naturgemäß definieren wir den Faktor b für eine Folioide als das Verhältnis zwischen dem Winkel ω, unter dem vom Zentrum aus die Folioide gesehen wird und 360°, also:

$$b = \frac{\omega}{360^0}$$

Da aber $\omega = \frac{\omega'}{N}$, wenn ω' der Winkel ist, unter dem in dem abgerollten System der Kreis vom Kegelscheitel aus gesehen wird, so wird:

$$b = \frac{\omega}{360^0} = \frac{\omega'}{N \cdot 360^0} = \frac{\omega'}{\zeta}$$

Nun ist dieser Wert von b nach der Formel (60) S. 150 derselbe wie derjenige, den wir früher für diesen Faktor bei den ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche fanden. Auch in dieser Hinsicht besteht also völlige Übereinstimmung und dasjenige, was wir im vorigen Kapitel über die Beziehung zwischen b und α für die Systeme auf der Kreiskegelfläche sagten, gilt unverändert für die ähnlichen Systeme tangierender Folioiden.

Es folgt hieraus, daß die graphische Darstellung II Tafel II, vom Kontakt 1, 2, und 3 ab gerechnet, gilt: 1. für die regelmäßigen Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche, 2. für die ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene, 3. für solche tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche, und 4. für solche tangierender Folioiden.

Was speziell den Kontaktfall 1 und 2 für die Folioidensysteme anbelangt, so wird die Kurve, welche dafür die Beziehung zwischen b und α darstellt, zwischen die beiden Kurven der Darstellung III

Tafel III fallen. Diese Beziehung wird für den Kontakt 1 und 1 immer durch einen Teil der Linie $\alpha = 180^0$ dargestellt. Nur für solche Folioidensysteme, die sich auf Kegelflächen beziehen, für die $\psi \leqq 60^0$ ist, kommt auch noch die Linie $b = 1$ als Beziehung zwischen b und α für den Kontakt 0 und 1 in Betracht.

Schließlich weisen wir noch darauf hin, daß durch kontinuierliche „Zunahme" von b oder „Abnahme" von a die Kontaktreihe n, m, $(n-m)$, $(n-2m)$ usw. durchlaufen wird. Durch kontinuierliche „Abnahme" von b oder „Zunahme" von a kann die Kontaktreihe m, n, $(m+n)$, $(m+2n)$ usw. durchlaufen werden, aber es können auch andere Reihen auftreten. Auch hier genügt unter der Voraussetzung, daß die Folioiden durch materielle Körper ersetzt werden, die Annahme einer Kraft, die vom Zentrum weg gerichtet ist und diese Körper angreift, um zu bewirken, daß auch im letzten Fall immer die Kontaktreihe m, n, $(m+n)$, $(m+2n)$ usw. durchlaufen wird.

§ 4. Beschreibung der geometrischen Konstruktionen. In den Figuren 4, 5 und 6 der Tafel IX und auf Tafel X ist eine Reihe Systeme tangierender Folioiden dargestellt, welche die horizontalen Projektionen von ähnlichen Systemen tangierender Kreise bilden, die auf Kegelflächen, für die $\psi = 28^0\ 57'\ 18''$, also $N = \frac{1}{4}$, $\zeta = 90^0$ ist, zu denken sind. Es wird nach dem, was wir früher sagten, deutlich sein, warum wir eben diesen Wert von ψ wählten und nicht lieber einen einfacheren. Es hat sich ja herausgestellt, daß wir für Anfertigung unserer Folioidensysteme nur die abgerollten Systeme brauchen und die Werte von N und ζ für diese Konstruktion bestimmend sind. Diese Größen müssen so einfach wie möglich gewählt werden, wenn man komplizierte Konstruktionen vermeiden will. Es muß bei dieser Wahl noch darauf geachtet werden, daß $\psi < 60^0$ sei, damit alle möglichen Kontaktfälle realisierbar sind.

In allen Figuren wurde der Abstand vom Zentrum zum Punkt 0 gleich 2,5 cm genommen. Auch sind darin die Kontaktspiralen angegeben, sodaß man aus der Zahl der Spiralen in den Spiralscharen den Kontakt ablesen kann. Die Hauptspirale wurde in allen Konstruktionen rechtsgewunden angenommen. Die für diese Konstruktionen nötigen Zahlen findet man in den Tabellen XVIII (S. 153) und XIX (S. 154).

Fig. 4 Tafel IX ist die Darstellung des Systems mit der Divergenz $\frac{0}{1} \cdot 360 = 0^0$ und dem Kontakte 0 und 1. Es ist also diese Figur ganz analog der darunter stehenden Fig. 1, welche sich auf die Kreiskonstruktionen auf einer Kreiszylinderfläche bezieht. Dies wird noch deutlicher, wenn man sich die Figur vergegenwärtigt, die das abgerollte ähnliche Kreissystem darstellt, von dem Fig. 4 die horizontale Projektion ist.

Auch Fig. 5 stellt ein System mit dem Kontakte 0 und 1 dar und zwar dasjenige mit der Divergenz $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$. Diese Figur ist also analog der Fig. 2 derselben Tafel. Die einzeilige

Spirale, die in Fig. 4 durch eine gerade Linie gebildet wird, ist in Fig. 5 eine logarithmische Spirale.

Fig. 6 gibt den Kontakt 0, 1 und 1 wieder, die Divergenz ist also $\alpha = 180^0$. Die Folioide 1, welche in den Figuren 4 und 5 diejenige 0 in einem einzigen Punkt tangiert, hat jetzt mit der Folioide 0 zwei Berührungspunkte gemein. Es sind folglich zwei einzeilige Spiralen angegeben. Diese Figur hat wieder ihr Analogon in Fig. 3.

Die drei jetzt besprochenen Kontaktfälle sind nach dem früher Gesagten nur für die Fälle auszuführen, bei denen für die zugehörige Kegelfläche $\psi < 60^0$ ist. Die Kreise auf der Kreiskegelfläche berühren hierbei sich selbst ebenso wie die Folioiden. Wir weisen noch darauf hin, daß die Folioiden 0 in diesen 3 Figuren kongruent sind, daß aber die Folioide 1 in Fig. 5 größer als in Fig. 4, in Fig. 6 größer als in Fig. 5 ist.

Betrachten wir jetzt die Figuren auf Tafel X. Fig. 1 stellt ein System mit dem Kontakte 1 und 1 dar, und zwar dasjenige, bei dem sich die Kontaktspiralen rechtwinklig schneiden. Wir werden in Kapitel VII näher beschreiben, was damit gemeint ist und wie die Werte von a und α für diesen Fall berechnet werden, hier verweisen wir bloß auf Tabelle XVIII, worin die betreffenden Werte zu finden sind. Die Folioiden dieser Figur berühren sich selbst jetzt nicht mehr, wodurch die Natur der Konstruktion bedeutend geändert wird.

Fig. 2 gibt den Kontakt 1, 1 und 2 wieder, die Divergenz ist immer noch 180^0. Jede Folioide dieser Figur zeigt 6 Berührungspunkte.

Es ist für unsere botanischen Betrachtungen von Wichtigkeit, darauf hinzuweisen, daß der Raum zwischen den beiden kleinsten Folioiden der zwei letzten Figuren mit Kugelzweiecken Übereinstimmung zeigt.

In Fig. 3 ist das System mit rechtwinkligem Kontakte 1 und 2 dargestellt ($\alpha = 143^0\ 30'$, also sehr nahe $\frac{2}{5} \cdot 360^0$); Fig. 4 wurde bereits früher besprochen. Hier mag noch bemerkt werden, daß der freie Raum zwischen den drei letzten Folioiden in Fig. 3 und Fig. 4 eine dreieckige Gestalt besitzt. Fig. 5 gibt den rechtwinkligen Kontakt 2 und 3, Fig. 6 den dreizähligen Kontakt 2, 3 und 5, Fig. 7 den rechtwinkligen Kontakt 3 und 5, Fig. 8 den dreizähligen 3, 5 und 8 und Fig. 9 den rechtwinkligen 5 und 8. Alle Figuren 1 bis 9 dieser Tafel, sowie diejenigen 4 bis 6 der Tafel IX stellen also Systeme mit Kontakten aus der Hauptreihe dar.

Die übrigen Figuren unserer Tafel beziehen sich auf Nebenreihen. Fig. 10 gibt bei dem Kontakt 1 und 3 das System mit der Divergenz $\alpha = \frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$ wieder. Die drei dreizeiligen Kontaktspiralen sind hier in gerade Linien umgewandelt.

Wir wollen noch daran erinnern, daß das System aus Fig. 4 durch kontinuierliche Abnahme von b oder Zunahme von a, sowohl in das System der Fig. 5 als in das jetzt betrachtete übergehen kann, im ersten Falle wird also die dreizählige Kontaktspirale stärker, im zweiten schwächer gebogen.

Fig. 11 zeigt das System mit rechtwinkligem Kontakt 1 und 3, Fig. 12 ist der dreizählige Kontakt 1, 3 und 4, während Fig. 13 den rechtwinkligen 3 und 4 darstellt und Fig. 14 das System mit dem Kontakt 1 und 4 und einer Divergenz $\alpha = \frac{1}{4} \cdot 360^0 = 90^0$. Das System der Fig. 12 kann durch kontinuierliche Abnahme von b oder Zunahme von a, sowohl in das System der Fig. 13 als in dasjenige der Figur 14 übergehen.

Endlich gibt Fig. 15 das System mit dem Kontakte 2 und 5 und der Divergenz $\frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$ wieder. Die Fig. 6 kann also durch kontinuierliche Abnahme von b oder Zunahme von a sowohl in Fig. 7 als in Fig. 15 übergehen.

Die Folioiden ein und derselben Konstruktion sind in allen unseren Figuren natürlich ähnlich, aber die Folioiden der verschiedenen Systeme zeigen unter einander große Verschiedenheit, es wird diese im folgenden Kapitel näher besprochen werden und dabei wird auch die Frage beantwortet werden, wie sich unsere Konstruktionen bei Anwendung anderer Kegelflächen gestalten würden.

Kapitel VI. Eigenschaften der Folioide.

§ 1. Die Gleichung der Folioide. Die Bedeutung, welche die Folioide für unsere weiteren Betrachtungen besitzt, macht eine nähere Besprechung dieser Kurve wünschenswert, umsomehr, da dieselbe, soweit mir bekannt ist, bis jetzt noch nicht beschrieben wurde. Es möge zunächst die Gleichung der Kurve abgeleitet werden.

Bezeichnet man auf dem abgerollten System (man siehe Fig. 36a) den Leitstrahl vom Scheitel T nach einem willkürlichen Punkt eines Kreises mit ϱ', den Winkel, den dieser Leitstrahl mit demjenigen nach dem Kreismittelpunkt bildet mit θ', den Leitstrahl nach diesem Mittelpunkt mit d' und den Radius des Kreises mit r', so kann man die Gleichung dieses Kreises in Polarkoordinaten wie folgt schreiben:

$$\varrho'^2 - 2\,\varrho'\,d'\cos\theta' + d'^2 - r'^2 = 0$$

Nennen wir den Leitstrahl, welcher in der horizontalen Projektion ϱ' entspricht, ϱ, den Winkel, der darin θ' entspricht, θ, so ist: $\varrho = N\varrho'$ und $\theta = \frac{\theta'}{N}$. Wir können also die obige Gleichung auch schreiben:

$$\varrho^2 - 2\,\varrho\,d'\,N\cos N\theta + (d'^2 - r'^2)\;N^2 = 0$$

Wir setzen $Nd' = d$ und $Nr' = r$, sodaß d den Leitstrahl in der Projektion vom Zentrum nach dem Mittelpunkt der Folioide darstellt, und r die Projektion des Kreisradius. Es läßt sich dann der Formel folgende Form geben:

$$\varrho^2 - 2\,\varrho\,d\cos N\theta + d^2 - r^2 = 0 \qquad (63)$$

Diese Formel gibt die Beziehung, welche zwischen den Werten ϱ und θ für einen willkürlichen Punkt der Folioide bestehen muß; sie stellt also die Gleichung dieser Kurve in Polarkoordinaten dar.

Setzt man $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\theta = arc\ tg \frac{y}{x}$, so kann man die Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten schreiben, sie bleibt aber transzendent. Die Folioide gehört also zu den transzendenten Kurven.

Den Punkt O werden wir den Pol, den Punkt M das Zentrum der Folioide nennen, r ihren halben Durchmesser.

Aus ihrer Gleichung geht unmittelbar hervor, daß die Kurve symmetrisch ist in Bezug auf die Linie, welche den Pol mit dem Zentrum verbindet. Da ja $\cos \mathcal{N}\theta = \cos -\mathcal{N}\theta$ ist, so muß, falls ϱ, θ ein Punkt der Kurve ist, auch ϱ, $-\theta$ ein solcher sein.

§ 2. Schnittpunkte mit Strahlen, die aus dem Pol gezogen sind. Ein Strahl aus dem Pol kann allgemein dargestellt werden durch $\theta = a_o + k \cdot 2\pi$, wenn a_o eine Konstante und $k = \pm$ (0, 1, 2, 3, 4 usw.) ist. Will man also die Schnittpunkte der Folioide mit einem solchen Strahl bestimmen, so hat man diesen Wert von θ in die Gleichung (63) einzusetzen. Es leuchtet ein, daß man dann unendlich viele zugehörige Werte von ϱ finden wird. Für einen bestimmten Wert von k aber hat auch θ eine bestimmte Größe und dafür werden aus (63) zwei solche für ϱ gefunden. Nennen wir diese zusammengehörigen Werte ϱ_1 und ϱ_2, so muß, wie aus dieser Formel hervorgeht:

$$\varrho_1 \varrho_2 = d^2 - r^2 = \text{konstant} \tag{64}$$

sein. Hieraus folgt, daß das Produkt zweier Radii vectores, welche zu ein und demselben Wert von θ gehören, konstant ist.

Ist ϱ_1 reell, so muß das nach (64) auch ϱ_2 sein, und umgekehrt, ist dagegen ϱ_1 imaginär, so ist es auch ϱ_2 und umgekehrt. Die Schnittpunkte mit einem Strahl aus dem Pol sind also in Paaren zu ordnen, die reell oder imaginär sein können.

Die Form der Folioide, welcher wir bis jetzt begegneten, ist derart, daß nur zwei reelle Schnittpunkte auf einem Strahl zu finden sind. Wir werden aber auch andere Formen dieser Kurve kennen lernen, wobei mehrere reelle Schnittpunkte angetroffen werden.

Betrachten wir zunächst nur die erste Form, die wir als die „einfache Folioide“ bezeichnen wollen, so gilt dafür die Regel: Das Produkt der Radii vectores nach den Schnittpunkten, welche auf ein und demselben Strahl aus dem Pol gelegen sind, ist konstant.

Die zwei Schnittpunkte auf einem Strahl fallen zusammen, wenn dieser Strahl die Folioide tangiert. Nennt man also den Leitstrahl nach diesem Berührungspunkt ϱ_t, so wird:

$$\varrho_t = \sqrt{d^2 - r^2}$$

Hieraus folgt, daß sich ϱ_t konstruieren läßt als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypothenuse gleich d und dessen andere Kathete gleich r ist.

§ 3. Die Folioide, abgeleitet aus einem Kreise. Der Kreis, welcher um den Punkt M mit dem Radius r beschrieben werden kann (man siehe Figur 37), wird in Polarkoordinaten (O als Pol betrachtet) dargestellt durch:

$$\varrho^2 - 2\,\varrho\, d \cos\theta + d^2 - r^2 = 0.$$

Wenn man nun diese Formel mit derjenigen (63) vergleicht, so findet man als einzigen Unterschied, daß in letzterer $\cos \mathcal{N}\theta$ statt $\cos\theta$

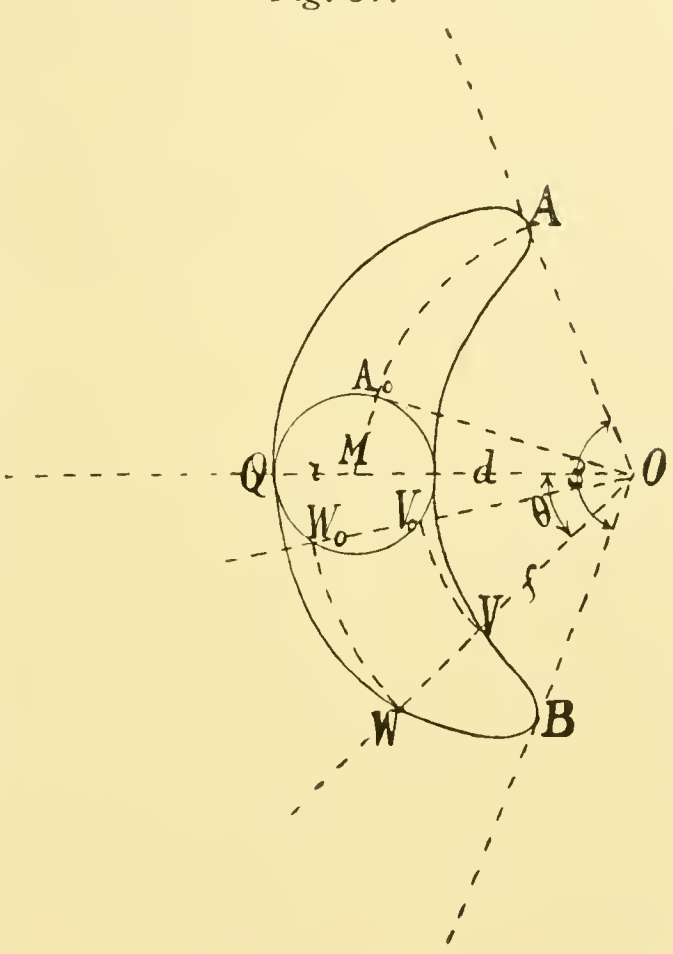
angetroffen wird. Hieraus folgt somit, daß man bei jedem Punkt des Kreises mit den Koordinaten ϱ, θ einen solchen auf der Folioide angeben kann, der die Koordinaten ϱ, $\frac{\theta}{N}$ besitzt.

Wenn also z. B. in Figur 37 OV_0 mit OM einen Winkel θ' (man vergleiche auch Fig. 36 S. 162) einschließt, so muß OV mit OM einen Winkel $\theta = \frac{\theta'}{N}$ bilden.

Es folgt hieraus eine neue Konstruktion für die (einfache) Folioide, wenn d, r und N gegeben sind. Man beschreibe dazu um den Punkt M, der in einer Entfernung d vom Pol liegt, einen Kreis mit dem Radius r und suche in der eben angegebenen Weise für eine Reihe Punkte des Kreises die zugehörigen der Folioide.

Es läßt sich diese Konstruktionsmethode auch mit Erfolg bei der Darstellung der früher beschriebenen ähnlichen Systeme tangierender Folioiden anwenden. Denn es ist $d = Nd'$ und $r = Nr'$, wenn d' und r' die zugehörigen Werte für das System auf der Kreiskegelfläche sind, sodaß d und r aus der Darstellung auf der abgerollten Fläche für jede Folioide zu berechnen sind.

Fig. 37.



Wir bemerken noch, daß aus unserer Betrachtung auch noch ein Ausdruck für den Winkel, unter dem vom Pol aus die Folioide gesehen wird, hervorgeht. Nennen wir den Winkel, unter dem von diesem Pol der Kreis mit dem Radius r um M gesehen wird ω', so ist:

$$\cos\frac{\omega'}{2} = \frac{\sqrt{d^2 - r^2}}{d}$$

Nun ist aber $\omega' = N\omega$, wenn ω der Winkel ist, unter dem man die Folioide vom Pol aus sieht. Also kann dieser Winkel berechnet werden aus:

$$\cos\frac{N\omega}{2} = \frac{\sqrt{d^2 - r^2}}{d} \tag{65}$$

Betrachtet man die Folioide als die Projektion eines Kreises auf einer Kreiskegelfläche, so stellt ω' auch den Winkel vor, unter dem auf der abgerollten Fläche dieser Kreis gesehen wird (man siehe S. 164).

§ 4. Formen der einfachen Folioide. Aus dem Gesagten lassen sich noch einige Schlüsse ziehen auf die Verschiedenheit der Formen, in denen die einfachen Folioiden auftreten und worauf wir schon bei der Beschreibung der geometrischen Konstruktionen ähnlicher Folioidensysteme hingewiesen haben.

Je nachdem nämlich in unserer Figur (37) der Winkel $A_0 O A$ größer wird, muß auch die Folioide eine stärker gekrümmte Gestalt annehmen. Es läßt sich also dieser Winkel als ein Maß für die Abweichung von der Kreisgestalt betrachten. Nun läßt sich für diesen Winkel folgende Formel angeben:

$$\angle A_0 O A = \frac{\omega'}{2}\left(\frac{1}{N} - 1\right) \tag{66}$$

Betrachten wir die Folioide wieder als die Projektion eines Kreises auf einer Kreiskegelfläche, so hängt also $\angle A_0 O A$ ab von dem Winkel (ω'), unter dem auf der abgerollten Fläche dieser Kreis gesehen wird, und von dem Faktor N, d. h. von dem Scheitelwinkel der Kegelfläche.

Wenn ω' größer wird, muß $\angle A_0 O A$ zunehmen, wenn N größer wird, abnehmen. Betrachtet man also auf Kegelflächen mit ein und demselben Scheitelwinkel Kreise, welche unter verschiedenen Winkeln gesehen werden, dann müssen diejenigen Kreise, welche man unter größeren Winkeln sieht, bei der horizontalen Projektion stärker gekrümmte Folioiden liefern. Wird der Winkel, unter dem der Kreis gesehen wird, klein, so nähert sich die Folioide einem Kreis, aber erst, wenn der Winkel 0 wird, geht die Folioide in einen wirklichen Kreis über. Man wird sich von der Richtigkeit dieser Schlüsse überzeugen, wenn man die verschiedenen Folioiden, welche in den Figuren 4 bis 6 der Tafel IX und auf Tafel X angetroffen werden, miteinander vergleicht. Es sind ja alle diese Figuren Projektionen von Kreissystemen auf einer Kreiskegelfläche für die $\psi = 28^0\,57'\,18''$ ist, und die Folioiden werden in den verschiedenen Systemen unter sehr verschiedenen Winkeln gesehen.

Betrachtet man Kreise, welche auf Kegelflächen mit verschiedenen Scheitelwinkeln liegen, jedoch alle unter demselben Winkel gesehen werden, so werden die entsprechenden Folioiden umso stärker gebogen sein, je kleiner der Scheitelwinkel ist. Wird der Scheitelwinkel flacher, so nähert sich die Folioide wieder der Kreisform, aber erst wenn $\psi = 180^0$ ist, geht die Folioide in einen wirklichen Kreis über.

Es sind dies Schlüsse, welche für die Anwendung der mathematischen Ableitungen auf die Theorie der Blattstellungen von großer Wichtigkeit sind.

§ 5. Andere Gestalten der Folioide. Fragen wir zuerst, welchen Bedingungen die Gleichung (63) genügen muß, damit sie die „einfache Folioide" darstellt. Bedenkt man, daß dafür der Kreis, dessen horizontale Projektion die Folioide darstellt, nicht mehr als den ganzen Umfang der Kegelfläche umfassen kann und daß der Scheitel dieser Kegelfläche nicht innerhalb des Kreises liegen darf, so kann man als Bedingungen für die einfache Form aufstellen: $\omega' \leqq \zeta$

und $d' \geqq r'$. Nun ist aber $\sin \frac{\omega'}{2} = \frac{r'}{d'} = \frac{r}{d}$, also $\omega' = 2\,arc \sin \frac{r}{d}$, während $d' = \frac{d}{N}$, $r' = \frac{r}{N}$, sodaß sich diese Bedingungen auch so schreiben lassen: $2\,arc \sin \frac{r}{d} \leqq N \cdot 360^0$ und $d \geqq r$.

Die Fälle, in denen die Gleichheitszeichen gelten, mögen noch kurz erläutert werden. Ist $2\,arc \sin \frac{r}{d} = N \cdot 360^0$, so heißt das, daß der Kreis auf der Kegelfläche den ganzen Umfang umspannt. Die Gestalt der Folioide für diesen Fall ist bereits bekannt, kommt sie doch in den Systemen mit Kontakten 0 und 1 vor, also in den Fig. 4 bis 6 der Tafel IX. Wir wollen noch daran erinnern, daß dieser Kontakt nur möglich war für Kegel, deren $\psi \leqq 60^0$ ist. Es kann also die Gleichung (63) nur dann eine solche Folioide darstellen, wenn $N \leqq \frac{1}{2}$ ist.

Ist $d = r$, so liegt der Kegelscheitel auf dem Kreis. Die zweite Bedingung $\omega' \leqq \zeta$ kann jetzt nur erfüllt werden, wenn $\zeta \geqq 180^0$ ist, also $N \geqq \frac{1}{2}$. Die Kurve entspricht jetzt der einfachen Formel:

$$\varrho = 2\,d \cos N\theta$$

Es ist auf Tafel IX in Fig. 8 eine solche Folioide abgebildet und zwar die horizontale Projektion eines Kreises, der durch den Scheitel einer Kreiskegelfläche geht, für welche $\zeta = 270^0$ also $N = \frac{3}{4}$ ist.

Daß diese Kurve noch unter die einfachen Folioiden gerechnet werden muß, geht schon daraus hervor, daß sie ein ähnliches System darstellen kann, und zwar ein solches, für das $a = 0$ ist.

Wir bemerken noch, daß alle vorigen Gestalten der Folioiden zwei Wendepunkte zeigten, während bei dieser diese Punkte in einem Eckpunkt zusammenfallen.

In einem Fall kann dieser Eckpunkt in einen Rückkehrpunkt übergehen. Es geschieht das, wenn in der Gleichung (63) $N = \frac{1}{2}$ wird, also die Folioide die horizontale Projektion eines Kreises darstellt, welcher auf einer Kreiskegelfläche, für die $\psi = 60^0$ ist, liegt und wenn dieser Kreis durch den Scheitel geht. Diese Folioide, welche also durch die Gleichung:

$$\varrho = 2\,d \cos \frac{\theta}{2} \tag{67}$$

gegeben wird, ist in Fig. 7 der Tafel IX dargestellt.

Endlich mögen auch noch kurz die Fälle erwähnt werden, in welchen die einfache Form komplizierteren Gestalten Platz macht. Wir haben davon in Fig. 9 der Tafel IX ein Beispiel abgebildet und zwar den Fall, in dem $\psi = 60^0$ und $d = \frac{1}{2} r$ ist. Man sieht aus unserer Figur, daß die Folioide dann einen Doppelpunkt hat.

Es würde uns hier zu weit führen eine vollständige Einsicht

in den Formenreichtum der Folioide, wie sie durch die Gleichung (63) dargestellt wird, zu geben. Das Obige möge genügen für den Nachweis, daß die Form, in der wir dieser Kurve bei den „ähnlichen Systemen tangierender Folioiden" begegnet sind, nur eine der vielen möglichen ist.

Kapitel VII. Rechtwinkliger Schnitt der Kontaktspiralen bei ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche.

§ 1. Rechtwinkliger Schnitt von zugeordneten Spiralen in ähnlichen Punktsystemen auf einer Kreiskegelfläche. Fragen wir uns zuerst, welche Beziehung in einem ähnlichen Punktsystem zwischen a und α bestehen muß, damit die m- und die n-zeilige Spirale einander rechtwinklig schneiden. Schneiden sich auf der Kegelfläche Kegelloxodromen rechtwinklig, so entspricht das nach dem Abrollen einem rechtwinkligen Schnitt logarithmischer Spiralen. Wir können uns also auch fragen: Welche Beziehung muß zwischen a und α bestehen, damit in dem abgerollten System die m- und die n-zeilige Spirale einander rechtwinklig schneiden?

Stellen wir die m-zeilige Spirale auf der abgerollten Fläche dar durch:

$$\varrho' = C_m \, e^{q_m \varphi'}$$

so gelten, weil diese Spirale durch die Punkte o und m geht, die Beziehungen:

$$\varrho' = C_m \, e^{q_m \varphi_o'} \quad \text{und} \quad \varrho_m' = C_m \, e^{q_m (\varphi_o' \pm \delta_m')}$$

woraus durch Division folgt:

$$a^m = e^{\pm q_m \delta_m'} \quad \text{oder:} \quad q_m \, \delta_m' = \pm m \lg a$$

Ebenso ergibt sich, wenn die n-zeilige Spirale durch:

$$\varrho' = C_n \, e^{q_n \varphi'}$$

dargestellt wird, daß:

$$q_n \, \delta_n' = \pm n \lg a$$

ist. Es wird also:

$$q_m \, q_n \, \delta_m' \, \delta_n' = \pm m n \, (\lg a)^2$$

Wenn nun die m- und die n-zeiligen Spiralen einander rechtwinklig schneiden, so muß $q_m \, q_n = -1$ sein, also kann die Bedingung hierfür dargestellt werden durch:

$$\delta_m' \, \delta_n' = \pm m n \, (\lg a)^2$$

oder nach (53) S. 144:

$$N^2 \, \delta_m \, \delta_m = \pm m n \, (\lg a)^2$$

Setzt man hierin für δ_m und δ_n die Werte ein, die sich aus unserer Gleichung (1) ergeben, so läßt sich die Bedingung in dieser Form schreiben:

$$N^2 \, (m \alpha - \Delta_m \cdot 2\pi)(n \alpha - \Delta_n \cdot 2\pi) = \pm m n \, (\lg a)^2 \qquad (68)$$

Aus unserer Ableitung folgt, daß in dieser Gleichung α in Bogenmaß ausgedrückt ist, während der Logarithmus ein „natürlicher" Logarithmus ist. Will man BRIGGsche Logarithmen anwenden und α in Graden ausdrücken, so kann man dazu folgende Form der Gleichung (68) benutzen:

$$\log a = \frac{\pi N}{180 \cdot 2{,}30259} \Big/ \pm \left(\frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0 - \alpha\right)\left(\alpha - \frac{\Delta_n}{n} \cdot 360^0\right) \qquad (68a)$$

Diese Formel unterscheidet sich von Formel 48 (S. 135), welche sich auf die „ähnlichen Punktsysteme auf der Ebene" bezieht, nur durch die Anwesenheit des Faktors N.

§ 2. Rechtwinkliger Schnitt von Kontaktspiralen. Für alle Werte von a und α, die der Gleichung (68a) genügen, werden sich die zugeordneten m- und n-zeiligen Spiralen rechtwinklig schneiden. Damit nun um die Punkte des ähnlichen Punktsystems ein ähnliches System tangierender Kreise möglich ist, müssen sie auch noch der Gleichung (56):

$$\frac{\cos N\left(\frac{m\alpha}{2} - \Delta_m \cdot 180^0\right)}{\cos N\left(\frac{n\alpha}{2} - \Delta_n \cdot 180^0\right)} = \frac{1 + a^m}{1 + a^n}\sqrt{a^{n-m}}$$

genügen. Diejenigen Werte von a und α, die gleichzeitig diesen beiden Gleichungen genügen, werden also ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche entsprechen, wobei die m- und die n-zeilige Kontaktspirale einander rechtwinklig schneiden.

Um Mißverständnis vorzubeugen, möge bemerkt werden, daß hier unter Kontaktspiralen die Spiralen durch die Mittelpunkte von Kreisen gemeint sind, welche miteinander in Kontakt stehen, und nicht (wie bei CHURCH) solche, die durch die Berührungspunkte dieser Kreise gezogen werden können.

Es stellt sich nun bei der Berechnung heraus, daß im allgemeinen für jeden Wert von m, n und N ein reeller Wert für a und α zu finden ist, welcher beiden Gleichungen entspricht. Hieraus folgt, daß im allgemeinen auf jeder Kegelfläche und mit jedem Kontakte ein System von Kontaktspiralen nachzuweisen ist, die sich rechtwinklig schneiden. Wir werden in dem folgenden Paragraphen nachweisen, daß dies für bestimmte Kegelflächen bei dem Kontakte 1 und 1 nicht der Fall ist. Es ist das jedoch die einzige Ausnahme von dieser Regel.

Fertigt man von einem ähnlichen System tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche mit rechtwinkligem Kontakte m und n die horizontale Projektion an, so werden sich darin die m- und die n-zeilige Spirale nicht rechtwinklig schneiden. Ja, es gibt selbst mehrere Kontakte, bei denen ein solcher Schnitt nicht möglich ist. Für unsere späteren Betrachtungen hat nun aber der rechtwinklige Schnitt der Kontaktspiralen auf der Kreiskegelfläche viel größere Bedeutung. Wir werden deshalb auch den Schnitt bei den ähnlichen Folioidensystemen selbst gar nicht verfolgen. Wo wir weiterhin von „ähnlichen Systemen tangierender Folioiden mit rechtwinkligen Kontakten" sprechen, so meinen wir damit immer solche, welche die horizontale Projektion von „ähnlichen Systemen

tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche mit rechtwinkligem Schnitt der Kontaktspiralen" darstellen. In diesem Sinne wurde der Ausdruck von uns bereits in § 4 auf Seite 165 gebraucht.

§ 3. Zahlenanwendung. Die dritte Kolumne der Tab. XVIII (S. 153) enthält die Werte von a und α für ähnliche Kreissysteme, die auf einer Kreiskegelfläche, für welche $\psi = 28^0\,57'\,18''\left(N = \frac{1}{4},\ \zeta = 90^0\right)$ ist, gelegen sind, und bei welcher der Kontakt der ersten Kolumne angetroffen wird.

Größtenteils konnten diese Werte nur durch Annäherungsrechnung gefunden werden, wobei wiederum die graphische Methode angewendet wurde.

Die Konstruktionen mit Folioiden, welche diesen Werten entsprechen, sind bereits früher ausführlich besprochen worden (siehe S. 165); hier weisen wir nur darauf hin, daß die Werte von α dieser Tabelle zwischen denjenigen Werten von α liegen, welche für die entsprechenden Kontakte auf der Kreiszylinderfläche und auf der Ebene gefunden wurden und welche in der Tabelle XVII S. 136 nebeneinander gestellt sind.

Fragen wir uns jetzt, was aus diesen Werten von a und α für andere Kegelflächen wird. Zuerst wollen wir bemerken, daß die 0- und die 1-zeilige Spirale einander nur dann rechtwinklig schneiden, wenn $\alpha = 0^0$ ist, denn die 0-zeilige Spirale ist ein horizontaler Kreis auf der Kegelfläche, die 1-zeilige wird in diesem Fall eine beschreibende Linie. Es wird nun die Beziehung, welche zwischen a und N bestehen muß, damit beim Kontakte 0 und 1, $\alpha = 0^0$ wird, gefunden, indem man in der Gleichung (61) S. 151 $\alpha = 0^0$ setzt, sie wird also:

$$\cos N.180^0 = \frac{2\sqrt{a}}{1+a} \tag{69}$$

Es stellt dies in der Raumdarstellung der Beziehung zwischen ψ, a und α eine Kurve in der Ebene $\alpha = 0$ dar. In unserer Darstellung auf Tafel XI ist dieselbe also nicht sichtbar. Denkt man sich diese gezeichnet, so ist damit die Frage, welche Systeme mit rechtwinkligem Kontakte 0 und 1 möglich sind, gelöst.

Beim Kontakte 1 und 1 ist die Divergenz immer 180^0, also auch beim rechtwinkligen. Die Beziehung, welche bei diesem rechtwinkligen Kontakte zwischen a und N besteht, wird gefunden, indem man in der Gleichung (68 a) $m = 1$, $n = 1$, $\Delta_m = 0$, $\Delta_n = 1$ und $\alpha = 180^0$ setzt, sie wird also:

$$\log a = \frac{\pi N}{2{,}30259}$$

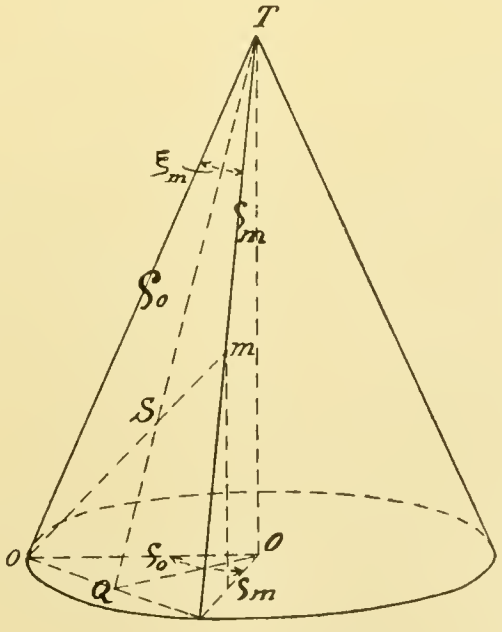
und kann folglich in ganz einfacher Weise berechnet und gezeichnet werden. Man findet diese Kurve in unserer Raumdarstellung auf Tafel XI angedeutet durch den Ausdruck „Rechtwinklige Kontakte 1 und 1". Wie man sieht, endet diese Kurve im Punkt J, woraus folgt, daß Systeme mit diesem rechtwinkligen Kontakt nicht auf allen möglichen Kegelflächen realisierbar sind. Der Punkt J entspricht einer Kegelfläche, für welche $\psi = \pm 145^0$ ist; auf solchen, für die ψ größer als dieser Wert ist, können also diese Systeme nicht mehr vorkommen. Es ist dies die Ausnahme, von der im vorigen Paragraphen die Rede war.

Für andere rechtwinklige Kontakte als 0 und 1 oder 1 und 1 hat α auf verschiedenen Kegelflächen nicht denselben Wert. Berechnet man z. B. für den Kontakt 1 und 2 bei verschiedenen Werten von N die zugehörigen Werte von a und α, so werden die entsprechenden Punkte in der Raumdarstellung eine Kurve bilden, welche in der Fläche $AEFG$ liegt und durch KL bezeichnet wurde. Der Punkt K ($\alpha = 132^0\,46'\,47''$) dieser Linie hat Bezug auf das System tangierender Kreise auf der Ebene mit dem rechtwinkligen Kontakte 1 und 2, der Punkt L ($\alpha = 144^0$) auf ein solches auf der Kreiszylinderfläche. Es können also Systeme vorkommen mit dem rechtwinkligen Kontakte 1 und 2, welche alle möglichen Divergenzen zwischen $132^0\,46'\,47''$ und 144^0 besitzen. Wir weisen noch darauf hin, daß die Kurven KL und MN sich schneiden und daß für den Schnittpunkt ψ ungefähr 100^0 entspricht. Auf einer Kegelfläche mit diesem Scheitelwinkel wird also das System tangierender Kreise mit dem Kontakte 1 und 2 die Limitdivergenz der Hauptreihe ($137^0\,30'\,28''$) zeigen. Auf Kegelflächen, für die ψ zwischen 100^0 und 0^0 liegt, wird diese Divergenz zwischen die Limitdivergenz der Hauptreihe und 144^0 fallen. Es sind dies wieder Schlüsse, welche für unsere weitere Betrachtung wichtig sind.

Kapitel VIII. Ähnliche Systeme tangierender Kugeln auf einer Kreiskegelfläche. Kegelförmige Kugelsäulen.

§ 1. Definition. Wir werden unter einem „ähnlichen System tangierender Kugeln auf einer Kreiskegelfläche“ ein solches verstehen, das folgenden Eigenschaften besitzt: 1. die Mittelpunkte der Kugeln bilden ein ähnliches Punktsystem auf einer Kreiskegelfläche, 2. die Radien der Kugeln verhalten sich wie die Leitstrahlen vom Scheitel der Kegelfläche nach den Mittelpunkten, 3. jede Kugel tangiert wenigstens vier andere, 4. es kommen im ganzen Systeme keine Schnitte zwischen Kugeln vor.

Fig. 38.



Es ist deutlich, daß diese „ähnlichen Systeme tangierender Kugeln“ die größte Übereinstimmung der Eigenschaften mit den „ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche“ zeigen werden und wir werden uns darum kurz fassen können. Was wir unter einer m-zeiligen Kontaktspirale und unter dem zweizähligen Kontakte m und n verstehen, braucht also keine Erläuterung.

§ 2. Die Beziehung zwischen a und α für zweizählige Kontakte. Wir werden uns wieder fragen, welche Beziehung

zwischen a und α in einem „ähnlichen Punktsystem auf einer Kreiskegelfläche“ bestehen muß, damit um die Punkte desselben ein „ähnliches System tangierender Kugeln“ mit dem Kontakte m und n möglich ist.

Wenn wir annehmen, daß in Fig. 38 o und m Punkte eines Punktsystems sind, um dessen Punkte die gewünschte Konstruktion möglich ist, so ist es sehr einfach, den Berührungspunkt der Kreise anzugeben, welche um diese beiden Punkte zu beschreiben sind. Man verbinde dazu o mit m, zeichne die beschreibenden Linien durch o und m, und halbiere darauf den Winkel zwischen diesen beschreibenden Linien. Schneidet diese Halbierungslinie die Verbindungslinie von o und m in dem Punkt S, so ist dieser der gesuchte Berührungspunkt. Es werden sich nämlich die Abstände oS und mS verhalten wie die Leitstrahlen von T nach o und nach m, d. i. wie $1 : a^m$. Bezeichnen wir den Abstand oS mit r_o und den Winkel oTm mit ξ_m, so findet man, wie nach dem früher Besprochenen (siehe S. 113 u. f.) leicht einzusehen ist:

$$\frac{r_o}{oT} = \frac{\sqrt{1 + a^{2m} - 2a^m \cos \xi_m}}{1 + a^m}$$

Ebenso findet man, wenn der Punkt n in Betracht gezogen wird:

$$\frac{r_o}{oT} = \frac{\sqrt{1 + a^{2n} - 2a \cos \xi_n}}{1 + a^n}$$

Hieraus folgt also, daß der Kontakt m und n nur besteht, wenn folgender Beziehung genügt wird:

$$\frac{\sqrt{1 + a^{2m} - 2a^m \cos \xi_m}}{\sqrt{1 + a^{2n} - 2a^n \cos \xi_n}} = \frac{1 + a^m}{1 + a^n}$$

Durch einige Umformungen läßt sich diese Formel wie folgt schreiben:

$$\frac{\cos \frac{\xi_m}{2}}{\cos \frac{\xi_n}{2}} = \frac{1 + a^m}{1 + a^n} \sqrt{a^{n-m}}$$

Nun sind ξ_m und ξ_n unbekannte Winkel, wir können sie aber durch bekannte Größen ausdrücken. Es ist nämlich: oQ

$$\sin \frac{\xi_m}{2} = \frac{oQ}{oT} \quad \text{und} \quad \sin \frac{\delta_m}{2} = \frac{oQ}{oO} = \frac{oQ}{N \cdot oT}$$

falls $N = \sin \frac{\psi}{2}$ ist.

Es wird also:

$$\sin \frac{\xi_m}{2} = N \sin \frac{\delta_m}{2}$$

und ebenso ist:

$$\sin \frac{\xi_n}{2} = N \sin \frac{\delta_n}{2}$$

Die abgeleitete Formel kann also folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{1 - N^2 \sin^2 \frac{\delta_m}{2}}{1 - N^2 \sin^2 \frac{\delta_n}{2}} = \frac{(1 + a^m)^2}{(1 + a^n)^2} a^{(n-m)}$$

oder auch:

$$\frac{1 - N^2 \sin^2 \frac{m\alpha}{2}}{1 - N^2 \sin^2 \frac{n\alpha}{2}} = \frac{(1 + a^m)^2}{(1 + a^n)^2} a^{(n-m)} \qquad (70)$$

Diese Gleichung besitzt für die „ähnlichen Systeme tangierender Kugeln auf einer Kreiskegelfläche" dieselbe Bedeutung, wie die Gleichung (56) S. 146 für die „ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche". Wir brauchen dann auch nicht näher anzugeben, daß hiermit die Bestimmung der dreizähligen Kontakte gegeben ist.

§ 3. Anwendungen. Zunächst sei bemerkt: Wenn wir in der in der Formel (70) $N = 1$ setzen, d. h., wenn wir die Kreiskegelfläche betrachten, für die $\psi = 180^0$ ist, also eine Ebene, dann geht Formel (70) über in:

$$\frac{\cos \frac{m\alpha}{2}}{\cos \frac{n\alpha}{2}} = \pm \frac{1 + a^m}{1 + a^n} \sqrt{a^{n-m}}$$

d. h. also in unsere Formel (40) S. 115.

Dies war ja von vornherein zu erwarten, denn, wenn die Kugelmittelpunkte auf einer Ebene liegen, so müssen die Schnittkreise mit dieser Ebene auf derselben ein „ähnliches System tangierender Kreise" bilden.

Setzen wir in Formel (70) $N = 0$, so kann nur $a = 1$ dieser Beziehung genügen. Wenn also die Kegelfläche in eine Kreiszylinderfläche übergeht, so werden die „ähnlichen Systeme tangierender Kugeln" zu „regelmäßigen Systemen tangierender Kugeln" und diese haben wir in Kapitel VII Abschnitt I besprochen.

Es werden also durch die „kegelförmigen Kugelsäulen" die „ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene" in Beziehung gebracht zu den „zylindrischen Kugelsäulen". Anderseits haben wir früher (S. 105 u. 129) die „ähnlichen Kreissysteme auf einer Ebene" auch mit den „regelmäßigen tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche" in Beziehung gebracht, während wir auf S. 82 den Unterschied und die Übereinstimmung zwischen diesen letzten Systemen und den „zylindrischen Kugelsäulen" näher besprochen haben. Es werden also durch diese Betrachtungsweise die verschiedenen Systeme in einen engen Zusammenhang gebracht. Die Erwägung, daß dadurch die Einsicht in der Natur der Systeme gefördert werden könnte, war eine der Ursachen, die uns dazu geführt haben, die verschiedenen Kugelsäulen näher zu betrachten.

Wenn wir nun in unserer Formel für m und n verschiedene Werte aus der Haupt- und Nebenreihe einsetzten, so könnten wir dieselbe wieder graphisch darstellen. Dabei könnten wir entweder bestimmte konstante Werte für ψ annehmen und würden dann eine Darstellung bekommen, die derjenigen No. II auf Tafel VII analog ist, oder wir könnten auch ψ als dritte Veränderliche betrachten und eine räumliche Darstellung anfertigen, welche mit derjenigen auf Tafel XI Übereinstimmung zeigen würde.

Wir haben jedoch solche Berechnungen hier nicht ausgeführt, da wir den kegelförmigen Kugelsäulen keine bedeutende Rolle für die Aufklärung der Blattstellungsfrage zuschreiben, wie später noch näher gezeigt wird. Dennoch wollen wir auf einige Tatsachen aufmerksam machen, welche ohne weitere Berechnung einleuchten.

Betrachten wir gleiche dreizählige Kontakte auf verschiedenen Kegelflächen, so wird sich die Divergenz als abhängig von der Größe des Scheitelwinkels ψ herausstellen. Es kommt ja in den Formeln, welche zur Berechnung von α dienen, der Faktor N vor. Dennoch werden die Divergenzen für verschiedene Kegelflächen nicht sehr von einander abweichen. Es wird einleuchten, daß die größte Differenz, welche zwischen den Werten von α für gleiche dreizählige Kontakte auf verschiedenen Kreiskegelflächen vorkommen kann, die ist, welche zwischen den Werten von α für den dreizähligen Kontakt 1, 2 und 3 bei dem „zylindrischer Kugelsäule“ und denjenigen für den dreizähligen Kontakt 1, 2 und 3 bei dem „ähnlichen System tangierender Kreise auf einer Ebene“ besteht. Die Werte von α für diese Systeme betragen 131° 48′ 37″ und 128° 10′ 22″, die Differenz ist also 3° 38′ 15″. Bei Vergleichung mit dem in § 3 S. 154 und 155 Gesagten, folgt hieraus, daß bei den „kegelförmigen Kugelsäulen“ der Einfluß der Größe des Scheitelwinkels auf die Divergenz zwar noch gering ist, aber doch bedeutender als bei den „ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche“, wo diese größte Differenz nur 24′ 15″ beträgt.

Um nun schließlich die kegelförmigen Kugelsäulen an einem bestimmten Beispiel zu erläutern, wurde eine Reihe Kugeln, deren Radien das konstante Verhältnis 0,85 besaßen, angefertigt und dieselbe darauf mit dem Kontakte 1, 2 und 3 zusammengeklebt. Die so erhaltene Kugelsäule findet man in Fig. 1 in Tafel V photographisch wiedergegeben und es wird sofort einleuchten, daß die Mittelpunkte der Kugeln wirklich auf einer Kreiskegelfläche gelegen sind.

Wir bemerken noch, daß diese kegelförmige Kugelsäule die größte Übereinstimmung zeigt mit der darunter in Fig. 2 abgebildeten zylindrischen von DELPINO.

Hätte man das Verhältnis der Radien gleich 1 genommen, so würde dann auch diese letzte Säule aufgetreten sein. Wäre dieses Verhältnis dagegen gleich 0,346013 gewählt, so würde die Kegelfläche der Kugelmittelpunkte zu einer Ebene geworden sein und die Durchschnittskreise mit den Kugeln würden das Kreissystem bilden, welches in Fig. 30 (S. 132) abgebildet ist. Dieses Beispiel möge, was wir oben über den Zusammenhang der verschiedenen Systeme sagten, näher erläutern.

Vierter Abschnitt.

Mehrfache Systeme.

Kapitel I. Mehrfache Punktsysteme.

§ 1. Definition eines k-fachen Punktsystems. Sowohl bei der Betrachtung der „regelmäßigen Punktsysteme auf einer Kreiszylinderfläche“ als bei der Behandlung der „ähnlichen Punktsysteme auf einer Ebene“ und bei derjenigen „ähnlicher Punktsysteme auf einer Kreiskegelfläche“, kamen wir zu dem Resultat, daß sich diese Punktsysteme in „einfache“ und „mehrfache“ einteilen lassen. Bei der ersten Art, welche wir in den vorigen Abschnitten ausschließlich betrachteten, konnten alle Punkte des Systems in einer einzigen Spirale, der „Hauptspirale“, aufgenommen werden. Bei diesen Systemen konnte darum eine kontinuierliche Numerierung der Punkte ausgeführt werden; waren dabei die m- und n-zeilige Spirale zugeordnet, so mußten m und n Primzahlen unter sich sein. Bei der zweiten Art von Systemen ist eine einzige Hauptspirale und damit eine kontinuierliche Numerierung unmöglich. Sind hierbei die Punkte als Schnittpunkte zweier Scharen von m und n Spiralen aufzufassen, so müssen m und n einen gemeinsamen Teiler haben. Während bei den einfachen Systemen auf ein und demselben horizontalen oder konzentrischen Kreise höchstens ein Punkt des Systems angetroffen werden kann, kommen bei den mehrfachen Systemen mehrere Punkte auf demselben horizontalen oder konzentrischen Kreis vor.

Ein mehrfaches regelmäßiges oder ähnliches Punktsystem, bei welchem k-Punkte auf demselben horizontalen oder konzentrischen Kreis angetroffen werden, wollen wir ein „k-faches regelmäßiges oder ähnliches Punktsystem“ nennen.

Bevor wir nun die Eigenschaften eines solchen k-fachen Systems ableiten, bemerken wir noch, daß die Tatsache, daß wir die mehrfachen Punktsysteme auf Zylinderfläche, Ebene und Kreiskegelfläche erst behandeln, nachdem die einfachen Systeme für diese drei Fälle besprochen sind, nicht durch Willkür bestimmt ist. Es wird sich nämlich herausstellen, daß die Eigenschaften der „mehrfachen ähnlichen Systeme auf der Ebene“ nur dann in ihrer Allgemeinheit betrachtet werden können, wenn die Behandlung der „einfachen ähnlichen Systeme auf einer Kreiskegelfläche“ vorangeht.

§ 2. Numerierung der Punkte, Hauptspiralen usw. Praktisch wird natürlich immer nur ein Teil eines unendlichen mehr-

fachen Punktsystems betrachtet. Wir werden dann auch den Kreis, durch die niedrigsten Punkte oder durch die in größter Entfernung vom Zentrum oder Kegelscheitel gelegenen, als Anfangskreis des Systems betrachten und die k-Punkte, welche auf diesem Kreise liegen, mit 0, 0', 0'', 0''', 0'''' usw. bis $0^{(k-1)}$ bezeichnen. Auf dem horizontalen oder konzentrischen Kreis des Systems, welcher dem Anfangskreis am nächsten liegt, kommen wieder k-Punkte vor. Hiervon werden wir nun denjenigen Punkt, der dem Punkt 0 am nächsten liegt (der Abstand ist bei der Kreiszylinder- und Kreiskegelfläche wieder in diesen Flächen zu nehmen), die Nummer 1 geben; der Punkt, welcher 0' am nächsten liegt, bekommt dann die Nummer 1' usw. In gleicher Weise wird die Numerierung auch für die Punkte auf anderen horizontalen oder konzentrischen Kreisen fortgesetzt.

Es wird nun einleuchten, daß die 0 mit 1 verbindende Spirale, wozu wir stets wieder die steilste Spirale wählen, auch durch die Punkte 2, 3, 4 usw. gehen muß. Ebenso muß die Spirale, welche 0' mit 1' verbindet, durch die Punkte 2', 3', 4' usw. gehen und die Spirale, welche 0'' mit 1'' verbindet, durch 2'', 3'', 4'' usw., und in dieser Weise kann man weiter schließen. Wegen der Regelmäßigkeit oder Ähnlichkeit des Punktsystems müssen alle diese Spiralen parallel laufen, die Punkte müssen darauf in gleicher Entfernung von einander liegen, und die Spiralen gleich weit von einander entfernt sein.

Die k-Spiralen, auf die man in dieser Weise alle Punkte des Systems ordnen kann, werden wir die „Hauptspiralen" des k-fachen Systems nennen. Die konstante Divergenz, welche die Punkte auf den Hauptspiralen besitzen, werden wir die „Divergenz" des mehrfachen Systems nennen und mit dem Buchstaben α bezeichnen.

Wenn man das k-fache System einen Winkel von $\frac{360^0}{k}$ um die Achse der Zylinder- oder Kegelfläche oder um das Zentrum beschreiben läßt, so wird deutlich sein, daß die Hauptspirale, welche die Punkte 0, 1, 2, 3, 4 usw. enthält, mit derjenigen zusammenfallen muß, die durch die Punkte 0', 1', 2', 3', 4' usw. geht, während zu gleicher Zeit die Punkte wieder dasselbe System bilden.

§ 3. Die mehrfachen Punktsysteme als von den einfachen abgeleitete betrachtet. Denkt man sich die beschreibenden Linien oder die Leitstrahlen durch die Punkte 0 und 0' gezogen, so wird durch diese Linien ein Teil des Punktsystems begrenzt und aus dem Gesagten folgt, daß dieser Teil bei einer Drehung von $\frac{360^0}{k}$ um die Achse oder um das Zentrum mit einem identischen Teil zusammenfallen muß. Hieraus folgt also, daß jedes k-fache Punktsystem zerlegt werden kann in k gleiche Streifen. Diese Streifen können Teile einer Zylinderfläche, einer Ebene oder einer Kegelfläche sein. Wir können uns nun jeden dieser Streifen aufgerollt denken zu einer Kreiszylinder- oder einer Kreiskegelfläche, und man wird einsehen, daß dann die Punkte, welche darauf vorkommen, ein regelmäßiges oder ähnliches System bilden. Da aber bei diesen Systemen auf einem horizontalen Kreis niemals mehr als 1 Punkt vorkommen kann, so werden sie „einfache" Systeme sein.

Die k-fachen Systeme können also in k gleiche einfache zerlegt werden. Während nun aber den mehrfachen regelmäßigen Punktsystemen auf der Kreiszylinderfläche auch ein einfaches Punktsystem auf einer Kreiszylinderfläche zu grunde liegt und den mehrfachen ähnlichen auf einer Kreiskegelfläche ein einfaches auf einer solchen Fläche (obwohl mit anderem Scheitelwinkel), so lassen sich die mehrfachen ähnlichen Punktsysteme auf einer Ebene nur in einfache ähnliche auf einer Kreiskegelfläche zerlegen. Dieser letzte Umstand zwang uns, die mehrfachen Punktsysteme auf einer Ebene zu behandeln, nachdem auch die einfachen auf der Kreiskegelfläche besprochen waren.

Geben wir den Größen, welche sich auf das einfache System beziehen, welches einem k-fachen zu grunde liegt, den Index o, so gilt ganz allgemein:

$$\alpha_o = k\,\alpha \tag{71}$$

Für die ähnlichen Systeme auf einer Kreiskegelfläche lassen sich außerdem noch folgende Beziehungen angeben:

$$\zeta_o = \frac{\zeta}{k} \tag{72}$$

und also:

$$N_o = \frac{N}{k} \tag{73}$$

Wir weisen nun besonders darauf hin, daß man jedes einfache Punktsystem auf einer „Kreiszylinderfläche“ betrachten kann als ein solches, das einem gewissen k-fachen System auf einer solchen Fläche zu Grunde liegt. Doch nicht jedes einfache ähnliche Punktsystem auf einer „Kreiskegelfläche“ kann man als ein solches auffassen, das einem k-fachen System zu grunde liegt. Denn es wird einleuchten, daß dazu ζ_o notwendigerweise einen solchen Wert besitzen muß, daß $k\,\zeta_o < 360^0$ ist. Wenn ein einfaches ähnliches System auf einer Kreiskegelfläche einem k-fachen auf einer „Ebene“ zu Grunde liegen soll, so muß $\zeta_o = \frac{360^0}{k}$ sein, während $N_o = \frac{1}{k}$ ist. Es können also nur ganz bestimmte ähnliche Punktsysteme auf einer Kreiskegelfläche zum Aufbau mehrfacher ähnlicher Systeme auf einer Ebene dienen.

Aus dem Gesagten geht noch Folgendes hervor: Sind in dem einfachen System, das dem k-fachen zu grunde liegt, die m- und die n-zeilige Spirale zugeordnet, so müssen die Punkte des mehrfachen Systems alle als Schnittpunkte von zwei Spiralscharen aufzufassen sein, welche km und kn parallele Spiralen enthalten. Nun werden wir solche Spiralscharen auch hier „zugeordnete“ nennen und es folgt hieraus folgende wichtige Regel:

Sind in einem k-fachen Punktsystem zwei Spiralscharen von je p und q Spiralen anzugeben, deren Schnittpunkte die Punkte des Systems bilden, so müssen die Zahlen p und q notwendigerweise den Faktor k als größten gemeinsamen Teiler besitzen.

Man hat in dieser Eigenschaft ein wichtiges Hilfsmittel für die Beurteilung der Frage, ob ein in der Natur angetroffenes System einfach oder mehrfach ist, denn es ist bei den natürlichen Objekten meistens viel einfacher, zugeordnete Spiralscharen nachzuweisen als zu bestimmen, ob mehrere Punkte in gleicher Höhe gelegen sind

Kapitel II. Mehrfache Systeme tangierender Kreise und Folioiden.

§ 1. Die mehrfachen Systeme tangierender Kreise als aus den einfachen aufgebaute betrachtet. Als Definition der „mehrfachen Systeme tangierender Kreise" gelten dieselben, welche wir in den vorigen Abschnitten (S. 23, 112 und 146) von den „einfachen regelmäßigen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche" und von den „einfachen ähnlichen auf einer Ebene" und „auf einer Kreiskegelfläche" gaben, mit der Einschränkung, daß die Kreismittelpunkte statt eines einfachen, jetzt ein mehrfaches Punktsystem bilden.

Wir haben nun die Frage zu lösen, von welcher Art die mehrfachen Punktsysteme sein müssen, damit sich um ihre Punkte solche mehrfache Systeme tangierender Kreise konstruieren lassen.

Denkt man sich ein k-faches System tangierender Kreise in der im vorigen Kapitel angegebenen Weise in k-Streifen eingeteilt, so werden die Zeichnungen auf jedem dieser Streifen vollkommen gleich sein, was aus der Regelmäßigkeit oder Ähnlichkeit des Systems unmittelbar hervorgeht. Wird nun ein solcher Streifen zu einer Zylinderfläche oder Kegelfläche aufgerollt, so werden die Kreise darauf ein einfaches System tangierender Kreise bilden.

Hiermit ist also die Frage zurückgeführt auf diejenige nach der Beschaffenheit der einfachen Punktsysteme, um deren Punkte Systeme tangierender Kreise möglich sind, und diese letztere wurde in den vorigen Abschnitten vollständig gelöst. Eine kurze Besprechung der einzelnen Fälle möge das Gesagte noch näher erläutern.

§ 2. Mehrfache regelmäßige Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche. Jedes einfache regelmäßige System tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche kann zum Aufbau eines k-fachen Systems verwendet werden. Nennen wir das Verhältnis des Kreisdurchmessers zum Zylinderumfang für das einfache System b_o, für das mehrfache b, so leuchtet ein, daß:

$$b_o = k\,b \tag{74}$$

ist. Nun ist nach (71) $\alpha_o = k\,\alpha$ und hieraus folgt also, daß die Beziehung zwischen b und α bekannt ist, sobald diejenige zwischen b_o und α_o gegeben ist. Nun wird die letzte Beziehung durch die (vollständig, ausgeführt gedachte) graphische Darstellung II Tafel II ausgedrückt und wir bekommen also diejenige zwischen b und α, indem wir die Darstellung k-mal verkleinern.

Wir haben früher gesehen, daß, sobald b_o und α_o für ein einfaches System bekannt sind, sich dieses sehr leicht konstruieren läßt. So setzt uns jetzt diese graphische Darstellung in den Stand, auch jedes gewünschte, mehrfache System tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche zu konstruieren.

§ 3. Mehrfache ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene. Will man ein k-faches System tangierender Kreise auf einer Ebene beschreiben, so konstruiere man einen

Winkel $\zeta_o = \frac{360^0}{k}$ und betrachte diesen als die Darstellung einer abgerollten Kreiskegelfläche, auf der ein ähnliches System tangierender Kreise in der Weise zu konstruieren ist, wie wir es in § 8, S. 159 angegeben haben. Der hierzu notwendige Wert von a oder α ist für jeden bestimmten Kontaktfall mittels der Formel (56) zu berechnen, oder aus der graphischen Darstellung auf Tafel XI zu entnehmen. Der Wert von N, welcher für die Konstruktion zu verwenden ist, beträgt nach (73): $N_o = \frac{1}{k}$. Ist einmal die Konstruktion auf dem Sektorwinkel ausgeführt, so braucht man nur k solcher Sektoren zu einer unbegrenzten Ebene zusammen zu legen, um damit das gewünschte k-fache System zu erhalten.

Man könnte vielleicht denken, daß der Wert von a, welchen man für die Konstruktion auf dem Sektor braucht, zu finden wäre, indem man denjenigen Wert von a, welcher dem einfachen System mit gleichen Kontakten „auf einer Ebene“ entspricht, durch den Faktor k teilt. Dies ist jedoch durchaus nicht der Fall; der Wert von a kann nur gefunden werden mittels der Formeln, welche für die Systeme „auf einer Kreiskegelfläche“ gelten.

Wir bemerken endlich noch, daß der Faktor b_o hier nicht gleich kb gesetzt werden darf wie bei den regelmäßigen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche. Dennoch wird b_o nur wenig von kb verschieden sein, und zwar wird die Differenz umso geringer, je höhere Kontakte betrachtet werden.

§ 4. Mehrfache ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche und deren horizontale Projektion. Wenn man ein ähnliches k-faches System tangierender Kreise auf einer Kegelfläche konstruieren will, für welche der Winkel der abgerollten Fläche gleich ζ ist, so zeichne man das einfache System innerhalb eines Winkels $\zeta_o = \frac{\zeta}{k}$ und vereinige darauf k solcher Sektoren zu einem Ganzen.

Die k-fachen Folioidensysteme bekommt man dann natürlich, indem man sich diese mehrfachen Systeme aufgerollt denkt und nun die horizontale Projektion entwirft auf die Weise, wie es auf S. 163 angegeben wurde.

In den folgenden Paragraphen werden wir das Besprochene noch auf bestimmte Zahlenbeispiele anwenden.

§ 5. Superponierte Quirle. Die einfachste Form der mehrfachen Systeme tangierender Kreise ist natürlich diejenige, bei der das einfache System, das dem mehrfachen zu grunde liegt, den Kontakt 0 und 1 zeigt. Wenn die Kontaktspiralen dabei einander rechtwinklig schneiden, so nennen wir ein solches System eines von „superponierten Quirlen“.

Will man sich von einem solchen k-fachen System auf einer Kreiszylinderfläche eine Vorstellung machen, so braucht man nur die Figur 1 Tafel IX $k$mal zu wiederholen und diese k-Figuren nebeneinander zu legen.

Auch die Darstellung solcher Systeme auf einer Ebene und auf einer Kreiskegelfläche wird keine Mühe verursachen, ebensowenig wie die mehrfachen Folioidensysteme, die diesen Kontakt

zeigen. Wir haben dieselben hier auch nicht abgebildet, umsomehr, weil sie für die Theorie der Blattstellung nur wenig Bedeutung besitzen. Wir wollen bloß noch bemerken, daß ein zweifaches System auf einer Ebene, das von einem einfachen mit dem Kontakt 0 und 1 abgeleitet ist, eine Eigentümlichkeit besitzt. Ein solches System wird nämlich dargestellt durch zwei Kreise mit willkürlichem Radius, die einander tangieren. Es muß ja das einfache System konstruiert werden auf einer Kegelfläche, für die $\zeta_o = \frac{360^0}{2} = 180^0$ und also $\psi = 60^0$ ist. Nun wird das abgerollte System mit dem Kontakt 0 und 1 in diesem Fall dargestellt durch einen einzigen Kreis, welcher durch den Kegelscheitel geht. Also wird das zweifache System durch zwei tangierende Kreise gegeben.

§ 6. Alternierende Quirle. Von viel größerer Wichtigkeit für unsere Betrachtungen als die soeben besprochenen Systeme sind diejenigen, welchen als einfaches System ein solches mit dem Kontakte 1 und 1 zu grunde liegt und welche den Namen „Systeme von alternierenden Quirlen“ tragen. Nach dem Wert, welchen der Faktor k besitzt, spricht man von zweizähligen, dreizähligen usw. Quirlen. Die Systeme von zweizähligen alternierenden Quirlen werden auch „dekussierte“ Stellungen genannt.

Die Divergenz der einfachen Systeme mit dem Kontakte 1 und 1 beträgt immer 180^0, diejenige der 2-, 3-, 4-, 5-zähligen Quirle also 90^0, 60^0, 45^0, 36^0.

Tabelle XX.

Mehrfache Systeme tangierender Kreise.

	k	Zylinderfläche	Ebene	Kegelfläche $\psi = 28^0\,57'\,18''$, $N = \frac{1}{4}$
Dekussierte Stellung	2	$b = 0{,}35355$ $\alpha = 90^0$	$a = 0{,}2079$ $N_0 = 0{,}5$ $\zeta_0 = 180^0$	$a = 0{,}6752$ $N_0 = 0{,}125 \left(= \frac{1}{8}\right)$ $\zeta_0 = 45^0$
Dreizählige alternierende Quirle	3	$b = 0{,}2357$ $\alpha = 60^0$	$a = 0{,}3509$ $N_0 = 0{,}33333$ $\zeta_0 = 120^0$	$a = 0{,}7697$ $N_0 = 0{,}0834 \left(= \frac{1}{12}\right)$ $\zeta_0 = 30^0$
Fünfzählige alternierende Quirle	5	$b = 0{,}1414$ $\alpha = 36^0$	$a = 0{,}5335$ $N_0 = 0{,}2$ $\zeta_0 = 72^0$	$a = 0{,}8546$ $N_0 = 0{,}05 \left(= \frac{1}{20}\right)$ $\zeta_0 = 18^0$
Zweifaches System mit Grundsystem mit Kontakten 1 u. 2 und $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$	2	$b = 0{,}2236$ $\alpha = 72^0$	$a = 0{,}503$ $N_0 = 0{,}5$ $\zeta_0 = 180^0$	$a = 0{,}862$ $N_0 = 0{,}125 \left(= \frac{1}{8}\right)$ $\zeta_0 = 45^0$

Wir haben auf S. 152 nachgewiesen, daß auf jeder Kreiskegelfläche einfache Systeme mit dem Kontakte 1 und 1 möglich sind. Nur auf einer Ebene war ein solches einfaches System nicht zu beschreiben. Aus allen möglichen Fällen wollen wir nun als Beispiele solche wählen, bei denen die beiden einzeiligen Spiralen des einfachen Systems einander rechtwinklig schneiden. Die Werte von a, welche sich auf solche Systeme für verschiedene Kegelflächen beziehen, sind in der graphischen Darstellung Taf. XI aus der Kurve AJ abzulesen.

Es sind nun in der Tabelle XX für zwei-, drei- und fünfzählige alternierende Quirle mit rechtwinkligem Schnitt der Kontaktspiralen diejenigen Werte angegeben, welche für die Konstruktion auf der Kreiszylinderfläche, auf der Ebene und auf einer Kreiskegelfläche, für die $\psi = 28^0\ 57'\ 18''\ \left(N = \frac{1}{4}\right)$ ist, notwendig sind.

Die Tafel XII enthält die Konstruktionen, welche mit diesen Werten ausgeführt wurden. Die Figuren 1—3 stellen die zwei-, drei- und fünfzähligen Quirle mit rechtwinkligem Schnitt der Kontaktspiralen auf einer Kreiszylinderfläche dar und zwar ist der Umfang dieser Zylinderfläche gleich 5 cm angenommen, also derselbe wie für alle unsere früheren Konstruktionen auf der Kreiszylinderfläche. Die Durchmesser der Kreise geben also wieder einen Einblick in den Wert von b, was besonders dann von Interesse ist, wenn man diese mehrfachen Systeme mit den einfachen vergleicht.

Die Figuren 5—7 stellen die übereinstimmenden Systeme auf der Ebene dar. Wir bemerken dabei noch, daß, wie gesagt, ein einfaches System mit dem Kontakte 1 und 1 auf einer Ebene praktisch nicht besteht, während das zweifache, welchem ein einfaches mit diesem Kontakte zu grunde liegt, wohl konstruiert werden kann, wie aus der Figur 5 hervorgeht.

Die Figuren 9—11 geben dieselben Kontaktfälle mit Folioidensystemen wieder, wobei diese Systeme die horizontalen Projektionen ähnlicher Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche darstellen, für die $\psi = 28^0\ 57'\ 18''\ \left(N = \frac{1}{4}\right)$ ist. Diese Figuren beziehen sich also auf dieselbe Kegelfläche, wie die Konstruktionen 4 bis 6 der Tafel IX und alle Konstruktionen der Tafel X.

§ 7. Gedrehte Quirle. Diejenigen mehrfachen Systeme, welchen andere einfache Systeme als solche mit dem Kontakte 0 und 1 oder 1 und 1 zu grunde liegen, werden wohl mit dem Namen „gedrehte Quirle“ bezeichnet. Wir werden uns damit begnügen, ein einziges Beispiel dieser Systeme zu geben und zwar ein zweifaches System, welchem ein einfaches mit dem Kontakte 1 und 2 zu grunde liegt. Dabei wurde die Divergenz des einfachen Systems gleich 144^0 angenommen. Es entspricht dieser Divergenz bei dem System auf der Kreiszylinderfläche ein rechtwinkliger Schnitt von Kontaktspiralen; bei dem System auf der Ebene oder demjenigen auf der Kreiskegelfläche ist dies nicht der Fall, dennoch kommt man hier auch einem solchen rechtwinkligen Schnitt sehr nahe, und praktisch kann bei dieser Divergenz der rechtwinklige Schnitt wohl angenommen werden. Die Zahlen, welche sich auf

diesen Kontaktfall beziehen, sind für die Kreiszylinderfläche, die Ebene und die Kreiskegelfläche, für die $\psi = 28^0\ 57'\ 18''$ $\left(N = \frac{1}{4}\right)$ ist, in die Tabelle XX aufgenommen. Die Figuren 4, 8 und 12 der Tafel XII geben die geometrischen Konstruktionen wieder, welche mit diesen Werten angefertigt wurden. Dabei wurde der Umfang der Zylinderfläche wieder gleich 5 cm angenommen, der Abstand von Punkt 0 bis zum Zentrum gleich 2,5 cm. Auch diese Figuren lassen also eine Vergleichung mit unseren vorigen Konstruktionen zu.

---

1) Die „mehrfachen Systeme tangierender Kugeln“ sind hier, um nicht zu ausführlich zu werden, nicht behandelt, obwohl dies von den gleichen Gesichtspunkten aus geschehen könnte als für die „mehrfachen Systeme tangierender Kreise“. Damit wollen wir jedoch nicht sagen, daß dieselben für die Erklärung von gewissen Erscheinungen keinen Wert besitzen.

Fünfter Abschnitt.

Rekapitulation.

Wenn wir jetzt versuchen, die Hauptresultate, zu denen uns die Betrachtungen des vorigen Abschnitts führten, in kurzer Fassung wiederzugeben, so muß zunächst bemerkt werden, daß dies nur auf sehr unvollkommene Weise geschehen kann und in mehreren Fällen auf die früheren Ausführungen verwiesen werden muß. Anderseits aber wird uns diese Zusammenfassung in den Stand setzen, einzelne Fragen durch eine abweichende Behandlungsweise näher zu beleuchten.

Ausgangspunkt unserer mathematischen Studien bildet folgende Frage: Welches sind die Eigenschaften von Punktsystemen auf einer Kreiszylinderfläche, einer Ebene und einer Kreiskegelfläche, welche derart sind, daß die Strahlenbüschel, welche man erhält, indem man verschiedene Punkte des Systems mit allen anderen verbindet, entweder kongruent (für die Kreiszylinderfläche) oder ähnlich (für die Ebene und Kegelfläche) sind. Es sind hier aber diejenigen Fälle, worin unter den Strahlenbüscheln kongruente oder ähnliche „Spiegelbilder“ angetroffen werden, nicht in Betracht gezogen.

Es ist nun nachgewiesen worden, daß die Haupteigenschaften solcher Punktsysteme, welche wir „regelmäßige“ (auf einer Kreiszylinderfläche) und „ähnliche“ (auf einer Ebene oder auf einer Kreiskegelfläche) nannten, die sind, daß darin unendliche Reihen Punkte auf Schraubenlinien (Kreiszylinderfläche), logarithmischen Spiralen (Ebene) oder Kegelloxodromen (Kegelfläche) liegen. Die logarithmischen Spiralen haben alle dasselbe Zentrum, die Kegelloxodromen laufen natürlich alle nach unendlich vielen Umgängen in dem Kegelscheitel zusammen. Die drei genannten Arten Kurven wurden gemäß der botanischen Ausdrucksweise unter dem gemeinschaftlichen Namen „Spiralen“ zusammengefaßt.

Die Punktsysteme ließen sich ferner in zwei Arten einteilen. Bei der ersten Art konnten alle Punkte in einer einzigen Spirale aufgenommen werden, solche Systeme haben wir „einfache“ genannt, und die Spirale selbst „Hauptspirale“. Bei der zweiten Art war eine solche einzige Spirale nicht möglich; es waren mehrere parallele Spiralen notwendig, um alle Punkte des Systems aufzunehmen. Solche Systeme nannten wir „mehrfache“.

Zuerst werden nun ausschließlich die einfachen Punktsysteme betrachtet, wobei die kontinuierliche Numerierung der Punkte die Hauptspirale entlang vorgenommen werden kann.

Ein einfaches Punktsystem auf einer Kreiszylinderfläche ist bestimmt durch zwei Faktoren: die Divergenz α der Punkte in der Hauptspirale und die Steighöhe h dieser Spirale. Ein einfaches Punktsystem auf einer Ebene und ein solches auf einer Kreiskegelfläche ist ebenfalls durch zwei Faktoren völlig bestimmt, hier sind es die Divergenz α der Punkte in der Hauptspirale und das konstante Verhältnis a, das zwischen den Leitstrahlen nach den aufeinander folgenden Punkten der Hauptspirale besteht und welchem wir den Namen „Hauptverhältnis" gaben. Bei jedem Wert von α sind nun unendlich viele Werte von h oder a anzugeben, mit denen solche Punktsysteme aufgebaut werden können. Von allen diesen Möglichkeiten haben wir bestimmte Fälle ausgewählt und zwar durch folgende Betrachtungsweise:

Man denke sich um die Punkte eines regelmäßigen oder ähnlichen Punktsystems unendlich kleine Kreise auf der Zylinderfläche, Ebene oder Kegelfläche beschrieben, und nehme an, daß diese Kreise im Wachstum begriffen sind, aber so, daß sie dabei immer kreisförmig bleiben. Es muß hierbei noch bemerkt werden, daß hier unter Kreisen auf einer Kreiszylinderfläche und einer Kegelfläche, Raumkurven verstanden werden, die derart sind, daß sie nach dem Abrollen auf einer Ebene wirklich Kreise darstellen. Man denke sich nun das Wachstum der Kreise derart, daß sich bei den Punktsystemen auf der Zylinderfläche alle Kreise gleich schnell ausdehnen, bei denjenigen auf der Ebene und auf einer Kreiskegelfläche aber so, daß die Radien sich in jedem Augenblick verhalten wie die Leitstrahlen, die vom Zentrum oder vom Kegelscheitel aus nach den Punkten gezogen werden.

Es wird dann ein Moment kommen, in dem der Kreis um Punkt o einen anderen berührt. Nehmen wir an, dies sei derjenige um Punkt m. Es muß dann aber wegen der Regelmäßigkeit oder Ähnlichkeit des Systems der Kreis um Punkt m denjenigen um $2m$ und dieser wieder denjenigen um $3m$ berühren usw. Ferner muß der Kreis um 1 denjenigen um $(1+m)$ berühren usw. Wir haben ein solches Kreissystem eines mit m-zeiligen Kontaktspiralen genannt.

Es besteht nun die Möglichkeit, daß der Kreis um o gleichzeitig die Kreise um m und n tangiert. In diesem Falle sprechen wir von einem zweizähligen Kontakte m und n, und es wird einleuchten, daß dabei jeder Kreis von vier anderen berührt wird. Es läßt sich nun nachweisen, daß für einen bestimmten Wert von α nur ein solcher von h oder a zu finden ist, für den ein Kontakt m und n besteht. Daraus folgt also, daß eine gewisse Beziehung zwischen α und h oder zwischen α und a anzugeben ist für alle Fälle, in denen ein Kontakt m und n verwirklicht ist.

Für die Kreiskonstruktionen auf einer Ebene und auf einer Kreiskegelfläche haben wir dann auch wirklich die Beziehung zwischen α und a durch eine Gleichung dargestellt (Formel 40 S. 115 und Formel 56 S. 148), jedoch haben wir aus gewissen Gründen vorgezogen, für die Kreiskonstruktionen auf der Kreiszylinderfläche anstatt der Beziehung zwischen α und h eine andere einzuführen, und zwar eine solche zwischen α und einem Faktor b. Dieser Faktor b, den wir den „relativen Kreisdurchmesser" nannten, gibt das Verhältnis des konstanten Kreisdurchmessers einer Kreiskonstruktion zu dem Umfang der Zylinderfläche an.

Die Beziehungen, die wir zwischen b und α oder a und α fanden, sind zwar unter der Annahme eines Kontaktes m und n abgeleitet, dabei bleibt jedoch die Möglichkeit bestehen, daß in der Kreiskonstruktion sich noch Kreise schneiden. Es kann nun aber sehr leicht nachgewiesen werden, daß dies nicht möglich ist für alle diejenigen Werte von b oder a und α, welche zwischen denen liegen, die diese Größen bei dem dreizähligen Kontakt $(n-m)$, m und n und dem dreizähligen Kontakte m, n und $(m+n)$ besitzen. Solche Systeme mit zwei- oder dreizähligem Kontakte, bei denen sich keine Kreise schneiden, haben wir „regelmäßige" (Zylinderfläche) und „ähnliche" (Ebene und Kreiskegelfläche) „Systeme tangierender Kreise" genannt.

Die Beziehung zwischen b und α für die „regelmäßigen Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche" ist bei verschiedenen Werten von m und n in der graphischen Darstellung II Tafel II wiedergegeben. Dabei wurden besonders Kontakte aus der „Hauptreihe" (s. S. 32) und den einfachen Nebenreihen (s. S. 50) in Betracht gezogen. Sind einmal für einen bestimmten Kontakt die zusammengehörigen Werte von b und α bekannt, dann läßt sich die Kreiskonstruktion leicht ausführen. Tafel I enthält eine Reihe solcher Kreissysteme.

Die Beziehung zwischen a und α für die „ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene" findet man bei bestimmten Werten von m und n in der Darstellung I Tafel VII. Auch hier läßt sich die Konstruktion, sobald a und α bekannt sind, ohne Mühe anfertigen; Tafel VI gibt eine Reihe solcher Systeme.

Was nun die Beziehung zwischen a und α für die „ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche" anbelangt, so ist diese abhängig von dem Wert des Scheitelwinkels der Kegelfläche (ψ). Es sind in die graphische Darstellung II der Tafel VII verschiedene Kurvensysteme eingetragen, die für verschiedene Werte von ψ Geltung haben. Will man die Beziehung zwischen a und α jedoch ganz allgemein darstellen, so muß man eine räumliche Darstellung verwenden, indem man den Wert von ψ auf einer dritten Achse abträgt. Es ist dies für einige Werte von m und n in der Darstellung auf Tafel XI geschehen.

Sind bei einer gewissen Kegelfläche und bei einem bestimmten Kontakt die zusammengehörigen Werte von a und α bekannt, so läßt sich die Konstruktion auf der „abgerollten" Kreiskegelfläche sehr leicht ausführen. In Textfigur 35 S. 160 ist als Beispiel der Kontakt 1, 2 und 3 auf einer abgerollten Kegelfläche, für die $\psi = 28^0\,57'\,28''$ ist, dargestellt. Der Sektorwinkel (ζ) der abgerollten Kegelfläche ist in diesem Fall gleich 90^0. Die Kreiskonstruktionen auf der Kegelfläche selbst lassen sich natürlich nur als Projektionszeichnung geben, wir wählten dazu die Projektion auf eine Ebene, die rechtwinklig auf der Kegelachse steht und welche wir als „horizontale Projektion" bezeichneten. Ein Kreis auf der Kreiskegelfläche geht bei dieser Projektion über in eine Kurve, der wir den Namen „Folioide" gaben und deren Eigenschaften wir genau feststellten. Das Kreissystem geht also bei der horizontalen Projektion über in ein „ähnliches System tangierender Folioiden", welches dieselben Kontakte zeigt wie das Kreissystem und auch in anderer Hinsicht damit große Übereinstimmung besitzt. Die Figuren 4 bis 6 der Tafel IX und die Figuren

der Tafel X geben eine Reihe solcher Folioidensysteme, welche sich auf Kreiskonstruktionen auf einer Kreiskegelfläche beziehen, für die $\psi = 28^0\ 57'\ 18''$ ($\zeta = 90^0$) ist. Die Gestalt der Folioiden ändert sich auf sehr bestimmte Weise, wenn man die Kreiskonstruktion auf anderen Kegelflächen ausgeführt denkt. Es werden sich die hier gemeinten Konstruktionen im zweiten Teil dieser Arbeit als das Hauptresultat unserer mathematischen Studien herausstellen.

Wir haben nun auch für die „ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene" ebenso wie für die „auf der Kreiskegelfläche" und die „ähnlichen Systeme tangierender Folioiden" den Faktor b eingeführt und zwar wurde diese Größe hier definiert als das Verhältnis zwischen dem konstanten Winkel, unter dem die Kreise oder Folioiden vom Zentrum oder vom Scheitel (der abgerollten Kegelfläche) aus gesehen werden, und einem Winkel von 360^0. Es hat sich ergeben, daß die Beziehung zwischen b und α für diese Systeme die größte Übereinstimmung zeigt mit derjenigen, die wir zwischen b und α für die „regelmäßigen Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche" fanden. Praktisch konnte sogar die graphische Darstellung II Tafel II vom Punkt 1, 2 und 3 ab, nach unten hin, für alle diese Systeme in Anwendung gebracht werden (siehe S. 128 und 165). Bei dem Kontakt 1 und 2 findet man aber eine ziemlich bedeutende Abweichung für verschiedene Systeme. In der Darstellung III Tafel III gilt die mit „Ebene" bezeichnete Kurve für die Kreiskonstruktionen auf der Ebene, die mit „Zylinderfläche" bezeichnete ist mit der Kurve für den Kontakt 1 und 2 aus der Darstellung II Tafel II identisch. Die Kurven für diesen Kontakt bei Konstruktionen auf der „Kegelfläche" fallen zwischen diese beiden Linien. Auch für den Kontakt 1 und 1 sind bemerkenswerte Unterschiede bei den verschiedenen Systemen wahrzunehmen; für solche auf der Ebene ist dieser Kontakt nicht zu realisieren, für solche auf Kegelflächen für die ψ zwischen 180^0 und 60^0 variiert, nur für Werte von b kleiner als 1. Der Kontakt 0 und 1 kann erst auf Kegelflächen, für welche $\psi < 60^0$ ist, auftreten.

Aus der genannten graphischen Darstellung der Beziehung zwischen b und α ließen sich nun mehrere Schlüsse ziehen auf die verschiedenen Systeme, die mit ein und demselben Wert von b oder α möglich sind (man vergleiche S. 65, 129 und 159). Auch diese Schlüsse werden sich für unsere weiteren Betrachtungen als besonders wichtig herausstellen.

Wir bemerken noch, daß für alle Kreiskonstruktionen außer den Kontaktfällen mit dreizähligen Kontakten auch besonders diejenigen näher betrachtet wurden, bei denen die Kontaktspiralen (d. h. diejenigen Spiralen, welche durch die Mittelpunkte von Kreisen gezogen werden, die miteinander in Kontakt sind) einander rechtwinklig schneiden. Es hat sich herausgestellt, daß für jeden Kontakt m und n ein Wert für b oder a und für α zu finden ist, für den das der Fall ist.

Nachdem die „einfachen" Systeme behandelt waren, sind auch die „mehrfachen" in Betracht gezogen worden. Außer durch das Fehlen einer einzigen Hauptspirale unterscheiden sich diese „mehrfachen" noch dadurch von den „einfachen", daß mehrere Punkte des Punktsystems oder mehrere Kreismittelpunkte des Kreissystems

auf demselben horizontalen oder konzentrischen Kreise gelegen sind. Werden auf einem solchen Kreise k-Punkte angetroffen, so haben wir das mehrfache System ein „k-faches“ genannt und nachgewiesen, daß es betrachtet werden kann als aus k einfachen Systemen aufgebaut. Damit war die Behandlung der mehrfachen Systeme auf die der „einfachen“ zurückgeführt. Beispiele solcher mehrfachen Systeme sind auf Tafel XII dargestellt.

Schließlich möge erwähnt werden, daß wir auch solche „regelmäßigen“ und „ähnlichen Punktsysteme“ untersucht haben, um deren Punkte „regelmäßige“ und „ähnliche Systeme tangierender Kugeln“ zu beschreiben sind (für die Definition siehe man S. 77 und S. 175) Es sind derartige Systeme für unsere weitere Betrachtung zwar nicht von großem Interesse, aber es wurde bemerkt, daß sie vom historischen Standpunkt betrachtet, gewisse Bedeutung besitzen, und ihr Studium außerdem der Einsicht in die ganze Frage förderlich sein kann.

ZWEITER TEIL.

Botanische Anwendungen.

Beobachtungstatsachen. Aufgaben einer mechanischen Theorie der Blattstellungen.

Obwohl die Beobachtungen betreffs der Blattstellungen hier größtenteils als bekannt vorausgesetzt werden, so möge dennoch eine kurze Darstellung derselben folgen, um klar zu machen, welche Aufgaben nach unserer Meinung an eine mechanische Theorie der Blattstellung gestellt werden müssen. Es ist dies besonders auch darum nötig, weil diese Beobachtungen meistens nur zerstreut in verschiedenen Büchern zu finden sind. Die hier gemeinten Haupttatsachen sind folgende:

1. Bei den meisten Phanerogamen, Pteridophyten und Bryophyten und bei einzelnen Thallophyten sind größere oder kleinere Zonen der Pflanzenachse nachzuweisen, innerhalb derer die seitlichen Organe in Bezug aufeinander in annähernd übereinstimmender Weise geordnet sind.

2. Innerhalb dieser Zonen sind dann die seitlichen Organe zu ordnen auf Quirlen, auf Spiralen oder auf beiden gleichzeitig.

3. Sind keine Quirle nachzuweisen, so läßt sich immer eine „Hauptspirale" auffinden, die alle Organe in sich schließt. Die Divergenz, diese Hauptspirale entlang gerechnet, ist annähernd konstant.

4. Von den anderen Spiralen, den „sekundären", fallen meistens bestimmte besonders ins Auge, und die seitlichen Organe lassen sich dann auf einer Schar solcher Spiralen ordnen.

5. Die Anzahl Spiralen einer solchen Schar (die Koordinatzahl) wird in den meisten Fällen dargestellt durch ein Glied der „Hauptreihe":

$$0{,}1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \text{usw.}$$

In viel selteneren Fällen wird diese Zahl angegeben durch ein Glied einer der „Nebenreihen", welche allgemein wie folgt darzustellen sind:

$$1,\ z,\ 1+z,\ 1+2z,\ 2+3z,\ 3+5z,\ 5+8z,\ \text{usw.},$$

wenn $z=3$, 4 oder 5 ist. Je größer in diesen Reihen der Wert von z wird, desto seltener wird ein Glied derselben als Koordinatzahl in der Natur angetroffen. Die Fälle, in denen $z = 5$ ist, sind bereits sehr selten.

Ganz ausnahmsweise findet man als Koordinatzahlen solche, welche nicht in den angegebenen Reihen unterzubringen sind.

6. In den meisten Fällen tritt nicht nur eine einzige Spiralschar besonders deutlich hervor, sondern es fallen zwei solche stark ins Auge. In diesen Fällen werden fast immer die Koordinatzahlen dieser Scharen durch zwei aufeinander folgende Glieder der genannten Reihen dargestellt. In anderen Fällen sind drei solcher Scharen sichtbar, und dann werden die Koordinatzahlen durch drei aufeinander folgende Glieder gegeben.

7. Die Divergenz einer „Blattstellung aus der Hauptreihe“ kann, wenn man dieselbe als Bruchteil des Achsenumfangs angibt, angenähert dargestellt werden durch ein Glied der folgenden Reihe:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \text{ usw. bis } \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

oder in Graden ausgedrückt, durch einen der folgenden Winkel:
180°, 120°, 144°, 135°, 138° 28′, 137° 9′, 137° 39′, usw. bis 137° 30′ 28′.

Für eine „Blattstellung aus einer Nebenreihe“ wird die Divergenz bei der ersten Ausdrucksweise annähernd dargestellt durch ein Glied der folgenden Reihe:

$$\frac{1}{z}, \frac{1}{z+1}, \frac{2}{2z+1}, \frac{3}{3z+2}, \frac{5}{5z+3}, \text{ usw. bis } \frac{1}{z+\chi}.$$

8. Die Divergenzen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ werden sowohl am Vegetationsscheitel als an ausgewachsenen Pflanzenachsen ziemlich genau verwirklicht angetroffen. Die Divergenzen $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}$ werden bisweilen an ausgewachsenen Pflanzenteilen genau realisiert, an den zugehörigen Vegetationspunkten aber werden durchgehends merkbare Abweichungen davon gefunden, und zwar sind diese derart, daß eine größere Annäherung an die „Limitdivergenz“ verwirklicht ist.

9. Diejenigen Fälle, in welchen Quirle vorkommen, lassen sich einteilen in solche, in welchen „superponierte“, „alternierende“ und „gedrehte“ Quirle angetroffen werden. Die „superponierten Quirle“ sind selten, meistens findet man sie in den Blütenregionen, die „alternierenden Quirle“ dagegen sind allgemein. Die Anzahl Organe in einem Quirl zeigt eine große Mannigfaltigkeit, jedoch werden die zwei-, drei- und fünfzähligen und daneben die vier- und sechszähligen alternierenden Quirle am meisten angetroffen.

10. Wenn bei einem „gedrehten“ Quirl auf jedem Wirtel k Organe liegen, so lassen sich die Koordinatzahlen der Spiralscharen, welche am stärksten ins Auge fallen, gewöhnlich darstellen durch zwei aufeinander folgende Glieder der Reihe:

$$1k,\ 1k,\ 2k,\ 3k,\ 5k,\ 8k,\ 13k,\ 21k, \text{ usw.}$$

In seltenen Fällen werden diese Koordinatzahlen zwei aufeinander folgende Glieder einer der Reihen darstellen, welche wie folgt ausgedrückt werden können:

$$1k,\ zk,\ (1+z)k,\ (1+2z)k,\ (2+3z)k, \text{ usw.,}$$

wenn $z = 3, 4, 5$ ist.

Ganz ausnahmsweise werden die Koordinatzahlen durch andere Zahlen als diese ausgedrückt.

Für die meisten, in der Natur angetroffenen „gedrehten“ Quirle ist $k = 2$, darauf folgen solche, für welche $k = 3$ ist.

11. Die Pflanzenachsen sind öfters ausgezeichnet durch Rippen, Blattkissen oder charakteristische Linien. In vielen Fällen ist die Anzahl solcher Bildungen, welche auf ein und demselben Querschnitt angetroffen werden, konstant, und sie wird dann meistens dargestellt durch ein Glied der Hauptreihe, seltener durch ein solches einer der Nebenreihen.

12. Die Zahl der Rand- und Scheibenblüten mancher Kompositenköpfchen variiert in der Weise, daß eine Zahl der Hauptreihe

oder ein einfaches Vielfaches derselben als die „wahrscheinlichste" Anzahl dieser Blüten betrachtet werden kann[1]).

13. Bedeutende Formänderungen der Pflanzenachse, welche die seitlichen Sprossungen trägt, Änderungen, bei denen öfters diesen Sprossungen eine andere physiologische Bedeutung zukommt, geben meistens auch zu einer Änderung der Blattstellung Veranlassung.

14. Die Regionen der Pflanzenachse, innerhalb deren eine Änderung der Blattstellung auftritt, und diese also keine konstante ist, sind meistens kurz und ihnen folgen gewöhnlich bald wieder solche mit konstanter Blattstellung.

15. Sucht man oberhalb und unterhalb dieser Zonen mit nicht konstanter Blattstellung, die Koordinatzahlen der am meisten ins Auge fallenden Spiralscharen auf, so findet man dafür in den meisten Fällen verschiedene Glieder einer und derselben Reihe. So trifft man an demselben Stengel öfters verschiedene Blattstellungen aus der Hauptreihe an.

Daneben kommen jedoch andere Änderungen der Blattstellungen ganz allgemein vor, diese werden erst später zur Sprache kommen.

Die Beobachtung, die wir unter 1. beschrieben haben, fordert eine nähere Erläuterung. Der Ausdruck: „die seitlichen Organe sind in bezug auf einander in annähernd übereinstimmender Weise geordnet", muß bei der Mannigfaltigkeit der Form der Pflanzenachse noch näher beschrieben werden. Nach unseren mathematischen Betrachtungen können wir denselben in drei Fällen sehr genau definieren: Ist die Pflanzenachse zylindrisch, so lehrt die Beobachtung, daß die Mittelpunkte der Ansatzstellen der seitlichen Sprossungen ein „regelmäßiges Punktsystem auf einer Kreiszylinderfläche" (siehe S. 8) bilden. Ist die Pflanzenachse aber flach, so bilden diese Mittelpunkte ein „ähnliches Punktsystem auf einer Ebene" (siehe S. 95). Kann endlich die Pflanzenachse als eine Kegelfläche betrachtet werden, so bilden die genannten Punkte ein „ähnliches Punktsystem auf einer Kreiskegelfläche" (siehe S. 139).

Die erste dieser drei Beobachtungen ist allgemein bekannt, obwohl sie meistens in abweichender Form beschrieben wird[2]). Für die zweite und dritte sind aus den Arbeiten von CHURCH manche Tatsachen zu entnehmen, aber auch im Folgenden werden solche angeführt.

Die drei angegebenen Formen der Pflanzenachse sind nun diejenigen, welche hier fast ausschließlich in Betracht kommen. Was die Fälle anbelangt, in denen diese Achse andere Formen annimmt, so bleibt es einem späteren Studium vorbehalten, auch dafür die genaue Definition der „übereinstimmenden Lage" der Mittelpunkte der Ansatzstellen zu geben.

Als Endziel einer mechanischen Theorie der Blattstellungen kann natürlich die Erklärung aller oben beschriebenen Tatsachen aus

---

1) Man vergleiche: F. LUDWIG. Über Variationskurven und Variationsflächen der Pflanzen. Botanisch-statistische Untersuchungen. Bot. Zentralbl., LXIV. Bd., 16. Jahrg., 1895, S. 1—8, S. 33—41, S. 65—72, S. 96—105. — Eine fünfgipfliche Variationskurve. Ber. d. d. bot. Gesellsch., XIV. Bd., 1896, S. 204—207. — Weiteres über Fibonaccikurven. Bot. Zentralbl., LXVIII. Bd., 17. Jahrg., 1896, Originalmittcilung, S. 1.

2) Nur DE CANDOLLE (Arch. d. sc. phys. et nat. 1881, S. 358) hat diese Tatsache in übereinstimmender Weise ausgedrückt.

Vorgängen, welche sich im Innern des Pflanzenkörpers vollziehen, gestellt werden. Dennoch sind wir weit von der Lösung einer solchen allgemeinen Frage entfernt; die Gesetze der Zellteilung und die Ursachen, welche zu dieser Teilung Veranlassung geben, die Erblichkeit der Eigenschaften, die Erscheinungen der Korrelation, alle diese Umstände sind noch gar nicht genug bekannt, um schon jetzt eine solche allgemeine Theorie aufbauen zu können.

Wir müssen uns also begnügen, einer mechanischen Theorie der Blattstellungen eine einfachere Aufgabe zu stellen und zwar wählen wir dazu die folgende: „Die beschriebenen zahlenmäßigen Eigentümlichkeiten der Blattstellungen aus bestimmten, kontrollierbaren Beobachtungstatsachen zu erklären." Wenn es uns gelingt, nachzuweisen, daß die genannten Zahlengesetze eine notwendige Folge von bestimmten morphologischen Eigentümlichkeiten der Pflanze sind, so wird das für unser Bedürfnis nach „Erklärung der Naturerscheinungen" schon einen wichtigen Fortschritt bedeuten. Es ist ja eben diesen Gesetzmäßigkeiten eine viel größere Aufmerksamkeit geschenkt worden, als den anderen Eigenschaften in der Stellung der seitlichen Sprossungen an der Pflanzenachse.

Wenn wir also im Folgenden als eine morphologisch gegebene Tatsache voraussetzen werden (man vergl. S. 220), daß die Pflanze die Eigenschaft besitzt, geringe Unregelmäßigkeiten, welche bei der Anlegung der Organe auftreten, nachträglich wieder auszugleichen, sodaß dennoch eine „übereinstimmende Lage der seitlichen Sprossungen" erreicht wird, so geschieht das nicht, weil für diese Erscheinung unserer Meinung nach niemals eine weitere Erklärung aus anderen Tatsachen möglich wäre, sondern darum, weil uns diese Voraussetzung für die Lösung der genannten Aufgabe bei dem jetzigen Stand unseres Wissens notwendig zu sein scheint.

Die genannte Einschränkung der Aufgabe der mechanischen Blattstellungstheorie verhindert jedoch nicht, daß morphologische Eigentümlichkeiten, die mit den Zahlengesetzen nicht in direktem Zusammenhang stehen, bei der Ausarbeitung dieser Theorie eine Erklärung finden werden. Es gilt dies z. B. für die Querschnittsform der jungen Anlagen, welche im folgenden Kapitel besprochen wird.

Selbstverständlich werden wir uns besonders beschäftigen mit den Beobachtungen am Vegetationsscheitel, weil in dieser Region der Pflanzenachse die Gesetzmäßigkeiten in der Anordnung der seitlichen Organe ihre Begründung finden. Wir haben deshalb auch unseren Stoff in der Weise eingeteilt, daß zuerst diejenigen Fälle besprochen werden, bei denen eine konstante Blattstellung am Vegetationspunkt angelegt wird, während darauf solche in Betracht gezogen sind, bei denen die neu angelegte Blattstellung eine andere ist als diejenige, welche bereits am Scheitel vorhanden ist. Dementsprechend zerfällt dieser Teil in zwei Abschnitte: in einen über „Konstante Blattstellung" und einen über „Veränderliche Blattstellung". Es muß bemerkt werden, daß wir hier unter „Veränderlicher Blattstellung" nicht die Fälle verstanden haben, bei welchen nach der Anlegung der Organe am Scheitel, eine Änderung der Blattstellung auftritt; die Besprechung solcher nachträglicher Änderungen ist im ersten Abschnitt zu suchen.

Erster Abschnitt.

Konstante Blattstellung.

Kapitel I. Die Form der jüngsten Anlagen seitlicher Organe und die Blattstellung am Scheitel.

§ 1. Die Form des Vegetationspunktes. Der Stammscheitel, an dem die seitlichen Sprossungen entstehen, kann verschiedene Formen aufweisen, meistens stellt er einen Umdrehungskörper dar und öfters zeigt er annähernd die Gestalt eines Umdrehungsparaboloids, manchmal auch gleicht er einem Kegel mit darauf gesetzter Halbkugel. Doch kann dieser Scheitel auch ganz flach sein und bisweilen zeigt er sogar eine konkave Gestalt.

Die jüngsten Anlagen seitlicher Sprossungen kommen immer in gewisser Entfernung vom höchsten Punkt des Scheitels zum Vorschein, das eine Mal liegt diese Zone tiefer, das andere Mal höher. Fast immer jedoch kann die ziemlich schmale Region des Scheitels, worin die jüngsten Anlagen sichtbar werden, und ihre nächste Umgebung aufgefaßt werden als ein Teil einer Kreiskegelfläche, deren Achse mit derjenigen des Stammscheitels zusammenfällt. Die Breite des Streifens, welcher als zu derselben Kegelfläche gehörig betrachtet werden kann, ist für verschiedene Vegetationspunkte sehr verschieden, bisweilen ist sie sehr bedeutend, und in diesem Falle werden noch ziemlich alte Bildungen mit den jüngsten Anlagen auf derselben Kegelfläche liegen; in anderen Fällen aber ist sie schmal und dann stehen bereits ganz junge Sprossungen auf einer anderen Kegelfläche als die jüngsten Anlagen. Meistens nimmt der Stammscheitel nach unten an Steilheit zu. Es stehen also dann die älteren Organe auf steileren Kegelflächen als die jüngeren. Die ausgewachsene Achse kann in vielen Fällen als eine Zylinderfläche aufgefaßt werden. Es kommt jedoch auch ausnahmsweise vor, daß diese ausgewachsene Pflanzenachse nicht steiler ist als die Kegelfläche, auf der die jüngsten Anlagen gebildet wurden, dies gilt z. B. für die Sonnenköpfe.

§ 2. Die Form der jüngsten Anlagen seitlicher Organe. Das Studium einer großen Anzahl Vegetationsscheitel von verschiedener Steilheit und mit verschiedenem relativen Durchmesser der jüngsten Anlagen, lehrt bei der Verschiedenheit der

Form dieser Bildungen gewisse Gesetzmäßigkeiten kennen, die wir in folgender Weise beschreiben können:

Ist der Streifen, auf dem die jüngsten Anlagen zum Vorschein kommen, flach oder sind die Bildungen klein im Vergleich zu dem Umfang des Scheitels, so ist die Form dieser Anlagen von oben gesehen oder im Querschnitt meistens rund, und zwar nähert sie sich umsomehr einem wirklichen Kreis, je flacher der Streifen des Scheitels, oder je kleiner der relative Organdurchmesser ist. Die jüngsten Anlagen erheben sich in diesem Falle über die Oberfläche des Scheitels wie kleine Höcker, welche eine uhrglasähnliche Form besitzen. Wenn aber der Stammscheitel spitz ist, oder wenn die Durchmesser der Anlagen groß sind in Bezug auf den Umfang des Vegetationspunktes, so ändert sich die Form dieser Bildungen bedeutend. Von oben gesehen oder im Querschnitt zeigen die jüngsten Anlagen dann die bekannte sichelförmige Gestalt, welche, wie noch näher nachgewiesen wird, die größte Ähnlichkeit mit der Kurve besitzt, welcher wir im ersten Teil unserer Studien begegneten und den Namen Folioide gegeben haben. Es stellt sich nun bei weiterer Beobachtung heraus, daß diese sichelförmige Figur um so stärker gebogen ist, je nachdem die Ansatzstelle der Anlage einen größeren Teil des Umfangs des Vegetationspunktes umfaßt oder die Kegelfläche, auf der die jüngsten Anlagen gelegen sind, steiler ist. Wie gesagt, nähert sich diese Figur bei flacheren Kegelflächen oder kleinerem relativen Durchmesser mehr einem Kreis.

§ 3. Hypothese über die Form der jüngsten Anlagen. Wenn man beachtet, daß die jüngsten Anlagen angenähert vertikal (oder richtiger: in der Richtung der Achse) aus dem Scheitel hervorwachsen und, daß man also bei Betrachtung von oben oder im Querdurchschnitt, die horizontale Projektion der Umrißlinie der Ansatzstelle dieser Bildungen wahrnimmt, so wird es, nach dem, was wir über die Gestalt der Folioide im ersten Teil sagten, begreiflich sein, daß die beschriebenen Beobachtungen uns zu der Aufstellung folgender Hypothese geführt haben:

Die Umrißlinien der Ansatzstellen ganz junger seitlicher Organe sind meistens Kreise auf einer Kreiskegelfläche, d. h. Raumkurven, welche derart sind, daß sie wirkliche Kreise darstellen, wenn sie mit dieser Fläche auf einer Ebene abgerollt werden.

Es ist bekannt, daß es auch Fälle gibt, in denen die Ansatzstellen keine symmetrische Figur bilden, indem, wie HOFMEISTER es ausdrückt, „der eine Blattrand den anderen in der Entwicklung voraneilt“. Dann kann die horizontale Projektion der Umrißlinie natürlich nicht mit einer Folioide identisch sein, denn diese Kurve ist, wie wir gesehen haben, symmetrisch in Bezug auf einen Leitstrahl durch den Mittelpunkt. Solche Fälle sind jedoch große Ausnahmen und sie werden auch hier nicht in Betracht gezogen.

Bemerken wir noch, daß aus der Tatsache, daß die Umrißlinien der Ansatzstellen sich in horizontaler Projektion als Folioiden zeigen, allein noch nicht hervorgeht, daß jene Linien auch Kreise auf der Kegelfläche darstellen. Es ist nämlich leicht einzusehen, daß sich auch „Folioiden auf einer Kreiskegelfläche“ in der horizontalen Projektion wieder als Folioiden abbilden. Nur die Kombination dieser Beobachtung mit derjenigen, daß diese Umrißlinien

auf flachem Scheitel sich wirklichen Kreisen nähern, gibt zur Aufstellung obiger Hypothese Veranlassung. Wollte man annehmen, daß die Umrißlinien auf steileren Scheiteln keine Kreise, sondern Folioiden sind, so würden dadurch unsere weiteren Betrachtungen nicht wesentlich geändert werden.

Wir behaupten natürlich nicht, daß die Voraussetzungen der aufgestellten Hypothese in der Natur mit mathematischer Genauigkeit verwirklicht sind, aber doch wird dieselbe für die wirklichen Verhältnisse einen annähernd richtigen Ausdruck geben. Auch wird die Hypothese sich darum besonders fruchtbar erweisen, weil sich die Ursachen angeben lassen, welche zu abweichenden Umständen Veranlassung geben können. Diese Ursachen werden in § 6 dieses Kapitels ausführlich besprochen.

§ 4. Erklärungsmöglichkeit für die Form der jüngsten Anlagen. Über die inneren Ursachen, welche die Bildung neuer Anlagen seitlicher Organe veranlassen, läßt sich sehr wenig aussagen; eine Erklärung für die eigentümliche Gestalt derselben besitzt also keinen großen Wert, und wenn wir eine solche dennoch hier andeuten wollen, so geschieht das besonders darum, weil sie von Nutzen sein kann um unserem Vorstellungsvermögen zu Hilfe zu kommen, für die Theorie selbst ist sie ohne Bedeutung.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß derjenige Teil der Epidermis, aus welchem nach einiger Zeit eine neue Anlage hervortritt, bereits bevor diese Hervorwölbung sichtbar wird, merkbar in Struktur von dem übrigen Gewebe abweicht. SCHWENDENER hat einem solchen Gebiet den Namen „Entwicklungsfeld“ gegeben. Nun wird man sich den Prozeß, der das Auftreten eines solchen Feldes einleitet, immer als von einem Zentrum ausgehend und sich gleichmäßig über die Oberfläche des Vegetationspunktes verbreitend vorstellen müssen. Ob nun dieser Vorgang in einer Erweichung der Zellwände oder einem Intussusceptionswachstum dieser Wände besteht, wodurch neue Zellteilungen eingeleitet werden, möge dahingestellt bleiben. Hauptsache ist hierbei, daß dieser Prozeß eintreten muß, noch bevor die Erhebungen sich hervorwölben. Dadurch nämlich wird es begreiflich, daß die Umrißlinie, zu der der Vorgang fortgeschritten ist, einen Kreis auf der Oberfläche des Scheitels darstellen kann. Wird nun die neue Anlage aus diesem Kreis in der Richtung der Achse des Vegetationspunktes emporgehoben, so muß diese Bildung, von oben gesehen oder im Querschnitt betrachtet, die Gestalt einer Folioide zeigen.

Hier möge bereits bemerkt werden, daß die oberen Teile der jungen Organe in vielen Fällen nicht genau vertikal stehen, sondern nach dem Scheitel des Vegetationspunktes hingebogen sind. Meistens sind dann aber doch die unteren Teile des Organs annähernd vertikal gestellt und werden also solche Querschnitte, welche dicht über der Ansatzstelle geführt sind, dennoch die größte Übereinstimmung mit der Folioide aufweisen können.

§ 5. Die Blattstellung der jungen Anlagen. Wie man auch über die Frage der An- oder Abwesenheit seitlicher Kontakte zwischen jungen Anlagen denken mag, man wird zugeben müssen, daß in den meisten Fällen diese Bildungen mit einander in Berührung stehen. Zwar ist es nicht zu leugnen, daß es vorkommen kann, daß die jüngsten Anlagen, wenn sie sich eben aus der Ober-

LIBRARY

fläche des Scheitels herauswölben, die bereits angelegten Höcker nicht berühren (Köpfe von *Helianthus*), aber dann stehen sie doch nach Ablauf der ersten Entwicklungsphase mit den Umrißlinien ihrer Ansatzstellen in Kontakt. Die Ausnahmefälle, bei welchen auch nach Ablauf dieses ersten Entwicklungszustandes kein Kontakt auftritt, werden später noch kurz erwähnt; es hat sich gezeigt, daß dabei immer Ursachen nachzuweisen sind, welche das abweichende Verhalten erklären.

Wir werden also zuerst nur diejenigen Fälle betrachten, bei welchen nach Beendigung der ersten Entwickelung die jüngsten Anlagen mit älteren in Berührung stehen. Meistens tangiert jede neue Anlage mindestens zwei ältere. Wenn man nun bedenkt, was wir über die Form der jüngsten Bildungen aussagten, und wenn man außerdem den Schluß in Betracht zieht, zu dem wir auf S. 197 gekommen sind, daß nämlich bei konstanter Blattstellung die Mittelpunkte der Ansatzstellen seitlicher Organe auf einer kegelförmigen Pflanzenachse annähernd „ein ähnliches Punktsystem auf einer Kreiskegelfläche“ bilden, so führt dies zu der Aufstellung folgender Sätze:

Die Umrißlinien der Ansatzstellen junger seitlicher Organe bilden bei konstanter Blattstellung annähernd ein „ähnliches System tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche“, wie wir das auf S. 146 kennen gelernt haben.

Die Obenansicht oder die Querschnitte solcher Bildungen stellen annähernd ein „ähnliches System tangierender Folioiden“ dar, wie wir das auf S. 163 beschrieben haben.

Diese Sätze lassen eine Prüfung an den natürlichen Objekten zu, und in den folgenden Paragraphen haben wir uns auch deshalb eine solche zur Aufgabe gestellt. Hier mögen zuerst noch einige allgemeine Betrachtungen erwähnt werden, welche aus diesen Sätzen folgen.

Aus unseren mathematischen Ableitungen geht hervor, daß die Beziehungen zwischen den relativen Durchmessern (b) der Kreise oder Folioiden und der Divergenz (α) für alle Kegelflächen annähernd dargestellt wird durch die graphische Darstellung II Tafel II. Allein für den Kontakt 1 und 2 traten geringe Abweichungen für die verschiedenen Kegelflächen auf, während solche Abweichungen für den Kontakt 1 und 1 und denjenigen 0 und 1 ziemlich bedeutend waren (man siehe S. 158 und S. 164).

Es folgt hieraus, daß bei einem bestimmten Kontakt der Wert von b die Blattstellung ganz bestimmt. Es ist also der relative Organdurchmesser eine bestimmende Größe für die Blattstellung. Dieser Schluß gibt in abweichender Form ein Resultat wieder, zu dem HOFMEISTER und SCHWENDENER durch Beobachtung der Verhältnisse am Scheitel gekommen waren. Was wir auf S. 65 und 159 gesagt haben über die Möglichkeit verschiedener Systeme mit ein und demselben Wert von b, läßt also eine Prüfung der Theorie zu, es wird dies bei der Besprechung einzelner Beispiele noch näher erläutert werden.

Will man nun die tatsächlich beobachteten Ansichten oder Querschnitte von Vegetationspunkten mit Figuren vergleichen, welche die oben angegebene Theorie erwarten läßt, so kann man für letztere die Konstruktionen verwenden, welche auf den Tafeln IX und X angefertigt wurden. Dabei muß man dann bedenken,

daß diese Folioidenkonstruktionen sich alle auf Kreissysteme auf einer Kegelfläche mit einem Scheitelwinkel $\psi = 28^0\ 57'\ 18''$ beziehen. Wenn man aber die Bemerkungen in Betracht zieht, welche wir in Kapitel VI S. 167 über die Änderungen machten, welche die Form dieser Folioiden erleidet, wenn die Kreissysteme auf anderen Kegelflächen angefertigt sind, so wird es keine großen Schwierigkeiten bereiten, sich mittels der hier gegebenen Konstruktionen auch von anderen eine Vorstellung zu machen. Wir wollen hier nur daran erinnern, daß, wenn man denselben Kontaktfall auf eine steilere Kegelfläche abbildet als die von uns benutzte, die Folioiden schmäler werden, d. h. mehr von der Kreisform abweichen[1]), während aber der Teil des Kegelumfangs, der durch die Folioiden umfaßt wird, derselbe bleiben muß. Bei flacheren Kegelflächen nähert sich die Form der Folioide, wie bereits öfters gesagt, der Kreisform.

§ 6. Ursachen für Abweichungen von den theoretischen Figuren. Es mögen hier diejenigen Umstände besprochen werden, welche dazu Veranlassung geben können, daß die beobachteten Querschnitte oder Ansichten von Vegetationspunkten von den theoretischen Konstruktionen abweichen. A priori läßt sich erwarten, daß alle Faktoren, welche Änderungen in den Prämissen bedingen, von welchen unsere Theorie ausgeht, auch Umgestaltungen in den Figuren bewirken werden. In vielen Fällen lassen sich nun Richtung und Art solcher Abweichungen voraussagen.

1. Der Streifen, auf dem die jüngsten Anlagen hervortreten, ist zwar meistens als ein Teil einer Kreiskegelfläche aufzufassen, aber bisweilen ist er auch merkbar gebogen. Die Kurve, welche den Querschnitt einer Anlage auf einem solchen Streifen wiedergibt, wird dann nicht eine wirkliche Folioide darstellen. Meistens jedoch ist die Abweichung davon so gering, daß sie für unsere Betrachtungen außer Acht gelassen werden kann. In sehr vielen Fällen dagegen werden die älteren Anlagen auf einem Teil des Vegetationspunktes liegen, der als zu einer steileren Kegelfläche gehörig aufzufassen ist. Es läßt sich also erwarten, daß die Folioiden, welche die jungen Anlagen darstellen, meistens nur für eine ziemlich schmale Zone des Scheitels wirklich ähnlich sind, und daß durchgehends die älteren Anlagen durch schmälere Folioiden als die jüngsten dargestellt werden. Es kommt jedoch auch vor, daß ein größerer Teil des Vegetationspunktes als zu derselben Kegelfläche gehörig betrachtet werden kann, und dann wird sich die Ähnlichkeit über eine größere Anzahl Folioiden erstrecken.

2. Die seitlichen Sprossungen wachsen meistens nur in ihren jüngsten Stadien wirklich in der Richtung der Achse des Vegetationspunktes empor und dann noch bisweilen, wie bereits früher gesagt, nur in ihren Basalteilen. Bei den älteren Anlagen findet oberhalb der Ansatzstelle aktives Dicken- und Breitenwachstum statt, wodurch nicht nur die Form des Querschnittes sehr beträchtliche Änderungen erfährt, sondern sogar Verschiebungen und Kontaktwechsel eintreten können, und zwar werden diese Abweichungen mehr hervortreten in einiger Entfernung oberhalb der Ansatzstelle des Sprosses als in der Nähe dieser Stelle selbst. Fertigt man nun

1) Man vergleiche besonders § 4, S. 170.

von einem Vegetationspunkt einen Querschnitt an, der den Scheitel oder die Zone, worin die jüngsten Anlagen hervortreten, enthält, so werden dabei die älteren Bildungen in ziemlich beträchtlicher Entfernung oberhalb ihrer Ansatzstellen durchgeschnitten. Es läßt sich also erwarten, daß diese älteren Organe bedeutende Abweichung von der Folioidenform aufweisen können, ja daß zwischen ihnen andere Kontaktverhältnisse bestehen können, als sie zwischen den jüngsten Anlagen wahrgenommen werden. In vielen Fällen werden dann diese Änderungen in folgenden Schnitten des Präparats weniger bedeutend erscheinen.

Sind die jüngsten Anlagen selbst bereits über den Scheitel des Vegetationspunktes gebogen, so muß man dieselben dicht über den Ansatzstellen durchschneiden, um die Folioidengestalt wahrzunehmen. Es wurde dies bereits früher erwähnt.

3. Die Blattstellung am Vegetationspunkt ist, selbst wenn die ausgewachsenen Organe eine regelmäßige Stellung aufweisen, nicht immer ganz konstant. Es werden eben an dem Scheitel öfters Übergangsstellungen verwirklicht, ohne daß dies bei den älteren Bildungen sichtbar ist. Aber auch, wenn solche nicht vorkommen, so werden doch vielfach kleine Unregelmäßigkeiten in der Stellung wahrgenommen, so daß z. B. eine mathematisch genaue gleiche Divergenz fast nie eingehalten wird. Wir werden später nachweisen, daß solche Abweichungen oft bei der weiteren Entwicklung aufgehoben werden.

4. Endlich mögen noch die Fälle erwähnt werden, auf die wir bereits früher hinwiesen, und wobei die beiden Blatträndern der ursprünglich symmetrischen Anlage sich ungleich vergrößern. Es kommt selten vor, daß solche Abweichungen bereits frühzeitig merkbar sind, meistens ist das erst der Fall, nachdem die Blattstellung bereits fixiert ist (z. B. bei den Gräsern), und dann können solche Änderungen bei den unter 2. besprochenen sekundären Abweichungen untergebracht werden. Ist die asymmetrische Form bereits in den jüngsten Anlagen ausgesprochen, dann haben unsere Betrachtungen keine Anwendung mehr, und diese Fälle fallen außer den Rahmen unseres Studiums.

Beispiele für einfache Systeme.

§ 7. Der Kontakt 1 und 1. Zunächst möchte ich bemerken, daß mir keine Beispiele bekannt sind, bei denen mit Sicherheit der Kontakt 0 und 1 angetroffen wird. Zwar bestehen Andeutungen, daß dieser Kontaktfall bei verschiedenen Umbelliferen vorkommen kann, aber jedenfalls nicht als konstante Blattstellung. Vorläufig werden wir deshalb auch den Kontakt 1 und 1 als einfachsten Kontaktfall annehmen müssen (als besondere Fälle davon sind auch noch die Kontakte 0, 1 und 1 und 1, 1 und 2 zu betrachten).

Ist unsere Theorie richtig, dann muß bei dem Kontakte 1 und 1 eine Divergenz von 180° angetroffen werden, während der relative Durchmesser der Ansatzstelle der Blätter (der Faktor *b*) variieren mag zwischen 0,5 und 1. Jedenfalls müssen also bei dem Kontakt die Blattbasen mehr als die Hälfte des Umfangs von dem Vegetationspunkt umfassen.

Umgekehrt muß dann aber auch jede Blattstellung, welche die Divergenz 180° aufweist, an dem Scheitel den Kontakt 1 und 1

zeigen. Daß diese Schlüsse nun wirklich bestätigt werden, möge zuerst an der Hand der Literatur nachgewiesen werden.

Bei der Besprechung der Anlegung der zweizeiligen Blattstellung am Stammscheitel sagt HOFMEISTER[1]) Folgendes:

„Der Entstehungsort eines neu auftretenden Blattes wird durch das Maß der Verbreiterung des Grundes des letzt zuvor gebildeten Blattes allein bestimmt, wenn das Blatt bis zum Hervortreten des nächst jüngeren Blattes seine Basis bis auf mindestens die Hälfte des Stengelumfanges verbreitert; — mit anderen Worten, wenn zwischen der Anlegung zweier konsekutiver Blätter ein relativ langer Zeitraum verfließt, während das Breitenwachstum der Blattbasen vergleichsweise rasch erfolgt. Dann ist am blätterbildenden Vegetationspunkte der Achse die von oben her erste Lücke zwischen Blatträndern, zwischen den beiden Rändern eines und desselben Blattes gelegen; oberhalb dieser Lücke erhebt sich aus dem nackten Stengelende die wärzchenförmige Anlage des jüngsten Blattes."

Obwohl nun die Anlegung der neuen Blätter erst im folgenden Kapitel zur Sprache kommt, so geht doch aus diesem Zitat hervor, daß HOFMEISTER bereits die Beziehung zwischen dem großen relativen Durchmesser und der zweizeiligen Blattstellung erkannt hat.

SCHUMANN hat die Beobachtung von HOFMEISTER, daß bei der Anlegung der zweizeiligen Blattstellung die jüngsten Blattbasen mehr als die Hälfte des Stengelumfangs einnehmen, an zahlreichen Beispielen bestätigt gefunden. So erwähnt er in den „Untersuchungen über den Blütenanschluß"[2]) die *Gramineen, Iridaceen* und einigen *Bromeliaceen* als Pflanzen, die in ihren Blüten dieses Verhalten aufweisen. In Heft I seiner „Morphologischen Studien"[3]) spricht er ausführlich über diesen Bautypus. „Es kommt (vielmehr) vor", sagt er, „daß nur ein einziges Blatt als Kontaktkörper fungiert: dann nämlich, wenn durch eine scheidige Umgreifung des Vegetationskegels sämtliche außenstehende Blätter aus dem Kontakt eliminiert werden. Die beiden Scheidenränder lassen dann eine Lücke zwischen sich, welche durch die Neubildung besetzt wird. Auf diese Tatsache hat schon HOFMEISTER hingewiesen, nur hat er in die Anlagebedingungen einen Faktor eingeführt, der nicht herein gehört, nämlich die Schnelligkeit, mit welcher die Scheidenränder wachsen. Die Zeit an und für sich kann nicht in Betracht kommen, da die Anlage der Neubildungen und die Entwicklung des Scheidengrundes zeitlich konkordant sind."

Die von SCHUMANN weiter besprochenen Änderungen, welche in der zweireihigen Blattstellung auftreten, wenn die Blattbasen asymmetrisch werden, und welche dieser Autor meines Erachtens ganz richtig erklärt hat[4]), können, wie bereits gesagt, in dieser Arbeit nicht besprochen werden. Hauptsache ist für uns die zitierte Beobachtung über die zweireihigen Blattstellungen, welche noch durch die folgende Be-

---

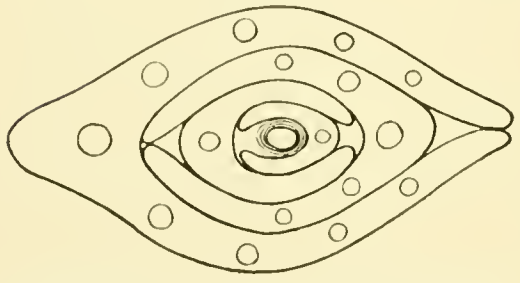
1) Allgemeine Morphologie der Gewächse. Leipzig, 1868, S. 485.
2) Leipzig, 1890.
3) Leipzig, 1892, S. 101.
4) Wir meinen hier die Blattstellung in gewundenen Zeilen, die man bei den Aloe-Arten antrifft; was die Stellungen bei *Pandanus* und *Cyperus* anbelangt, müssen wir uns ein Urteil noch vorbehalten.

merkung an Bedeutung gewinnt[1]): „Die morphologische Natur der Scheidenränder der den Vegetationskegel umfassenden Blattflanken kann für die Anlagebedingungen der Neubildungen von keiner Bedeutung sein, deshalb ist es gleichgültig, ob dieselben sich später zu einer wirklichen Scheide zusammenschließen oder eine Ochrea oder Nebenblätter bilden, der Erfolg ist, wie die *Polygonaceen*, gewisse *Papilionaceen* und die *Vitaceen* usw. zeigen, der nämliche."

Weisse hat in seiner Abhandlung „Neue Beiträge zur mechanischen Blattstellungslehre"[2]) die verschiedenen Meinungen, welche über die Anlegung der zweizeiligen Blattstellung herrschen, kritisch zusammengestellt, und es ist von großem Interesse, daß dieser Forscher zu dem Resultat gelangt, daß er nur die diesbezüglichen Angaben Schumanns bestätigen kann. Er gibt dann noch 19 Arten an, unter denen sowohl Monokotylen als Dikotylen sich befinden, welche alle das beschriebene Verhältnis zeigten.

Geht also aus den in der Literatur beschriebenen Wahrnehmungen schon hervor, daß die Schlußfolgerung, wozu die Theorie der Beziehung zwischen der Breite der Blattbasis und der Divergenz führte, hier wirklich bestätigt wird, so werden wir nun weiter nachweisen, daß die Querschnitte der Vegetationspunkte bei zweireihiger Blattstellung auch in anderer Hinsicht mit der Theorie übereinstimmen.

Fig. 39.



Querschnitt einer vegetativen Endknospe von *Bupleurum perfoliatum*. Vergr. 45.

In Fig. 39 ist der Stammscheitel von *Bupleurum perfoliatum* abgebildet, einer Umbellifere, welche, wie bekannt, das typische Beispiel für eine Pflanze mit „Folia perfoliata" ist.

Wie aus unserer Figur zu sehen ist, kann man im Vegetationspunkt noch gar nichts von einem Wachstum der Blattränder um den Stengel wahrnehmen, die jüngsten Blätter lassen sogar einen Zwischenraum zwischen den Rändern frei. Hieraus geht also unzweifelhaft hervor, daß der Zustand, wie er bei den älteren Blättern angetroffen wird, erst ziemlich spät nach der Anlegung zu stande kommt.

Hauptsache für uns ist, daß alle Blattbasen, auch die der jüngsten Anlagen, einen Teil des Stengelumfangs einnehmen, der größer als dessen Hälfte ist. Vergleicht man nun weiter die Figur, welche durch die zwei oder drei jüngsten Sprossungen gebildet wird, mit der Folioidenkonstruktion, welche in Fig. 1 Taf. X dargestellt ist, so wird man sogleich die Übereinstimmung des beobachteten Verhaltens mit dem theoretischen Aufbau bemerken. Daß die Folioiden unserer Konstruktion relativ viel weniger gebogen sind als die Querschnitte der jungen Blätter, kann dabei keine Schwierigkeit verursachen. Wir haben ja früher dargelegt, daß die Breite der Folioiden in unseren Konstruktionen durch die Steilheit der Kegelfläche bestimmt wird, auf der die entsprechende

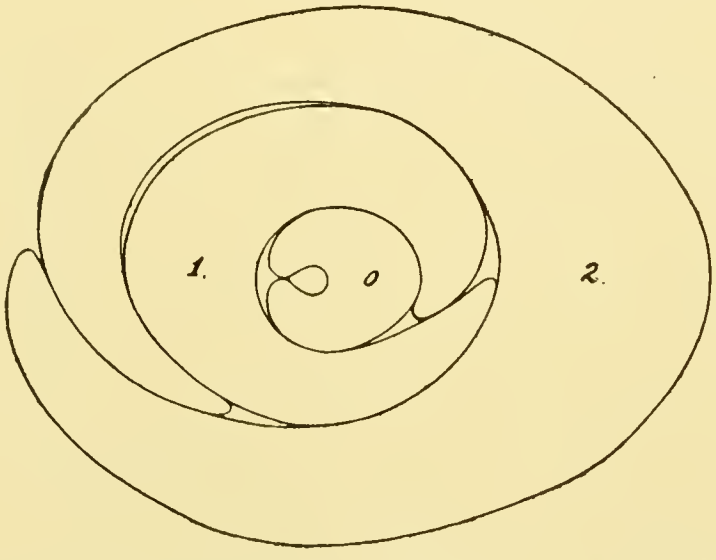
1) Siehe Morphologische Studien, Heft I, S. 102.
2) Pringsheim's Jahrbücher, 26. Band, 1894, S. 236—294.

Kreiskonstruktion ausgeführt zu denken ist. Der Vegetationspunkt von *Bupleurum perfoliatum* ist dann auch, wie die Beobachtung gelehrt hat, einer sehr steilen Kegelfläche ähnlich. Die Zone, auf der die jüngsten Blätter stehen, kann als eine Kegelfläche mit einem Scheitelwinkel von etwa 15° betrachtet werden.

Auch die ungefähre „Ähnlichkeit" der jüngsten Anlagen geht aus unserer Figur hervor, obwohl diese nicht mit mathematischer Genauigkeit verwirklicht ist, wie es sich übrigens auch nicht erwarten läßt, weil die älteren Blätter an solchen Stellen durchgeschnitten sind, wo bereits Änderungen durch sekundäres Wachstum merkbar werden. Bei den ältesten Anlagen sind diese Änderungen bereits so fortgeschritten, daß die Folioidengestalt ganz verloren gegangen ist; hierbei liegen die Blattränder gegeneinander gedrückt.

Fig. 40 gibt ein zweites Beispiel für die zweireihige Blattstellung und zwar für den Stammscheitel von *Menyanthes trifoliata*, das darum interessant ist, weil hier die Querschnitte der jungen Anlage eine beträchtliche Breite aufweisen und in ihrer Form sehr stark an die Folioiden erinnern, welche auf Taf. IX abgebildet wurden. Dieser Umstand wird dadurch veranlaßt, daß, wie die Beobachtung lehrt, der Scheitel von *Menyanthes trifoliata* relativ stumpf ist. Die genaue Messung des Scheitelwinkels war in diesem Fall mit Schwierigkeiten verknüpft. Die Stellung, wie sie in unserer Figur dargestellt ist, nähert sich dem Kontakt 0, 1 u. 1, doch muß bemerkt werden, daß in anderen Querschnitten eine größere Entfernung der beiden Blattränder beobachtet wurde.

Fig. 40.



Querschnitt einer vegetativen Endknospe von *Menyanthes trifoliata*. Vergr. 30.

Der Querschnitt des zweiten Blattes zeigt schon eine beträchtliche Abweichung von der Folioidengestalt, die wieder dem sekundären Wachstum zuzuschreiben ist. Schneidet man dieses Blatt dicht in der Nähe der Ansatzstelle durch, so nimmt man eine größere Annäherung an diese Gestalt wahr.

Das gesetzmäßige Übergreifen der Blattränder[1]) hat also für die Beurteilung der Blattstellung eine untergeordnete Bedeutung.

Nach den gegebenen Zitaten wird es wohl unnötig sein, diese Beispiele durch andere zu vermehren. Bemerken wir darum nur kurz, daß wir dasselbe Verhalten, wie bei den hier abgebildeten

1) Man siehe A. Braun: Vergleichende Untersuchungen über die Ordnung der Schuppen an den Tannenzapfen etc. 1830, Tafel XXXIII, Fig. 2.

Scheiteln, bei mehreren Arten gefunden haben, auch bei solchen, welche durch den Besitz von Nebenblättern ausgezeichnet sind, wie z. B. manche *Papilionaceen, Tilia* u. a. Es ist nämlich eine allgemeine Erscheinung, daß die Nebenblätter am Scheitel gleichzeitig mit dem Achselblatt hervortreten, sodaß sie mit demselben eine einzige Anlage bilden. Erst wenn die Entwicklung weiter fortgeschritten ist, bemerkt man die Differenzierung dieser Organe, obwohl das bei verschiedenen Arten in sehr verschiedenen Stadien der Entwicklung der Fall ist.

Wir sind also zu dem Resultat gelangt, daß bei der zweizeiligen Blattstellung Anschlußverhältnisse am Scheitel angetroffen werden, die ganz in Übereinstimmung mit den theoretischen Darlegungen stehen. Nun gehört diese Stellung zu den allgemeinsten (man vergleiche BRAUN, Ordnung der Schuppen an den Tannenzapfen, S. 265, 271 und 275), sie ist bei den Monokotylen sogar die herrschende, sodaß die Tatsache, daß die Kontaktverhältnisse bei dieser Blattstellung so ganz übereinstimmen mit dem, was die Theorie erwarten läßt, eine wichtige Stütze derselben genannt werden muß.

§ 8. Der Kontakt 1 und 2. Die Theorie läßt für den Kontakt 1 und 1 nur eine mögliche Divergenz, die von 180° zu, und wir hätten also umgekehrt in dem Antreffen dieser Divergenz einen Hinweis auf die Fälle, in welchen wir den Kontakt 1 und 1 zu suchen haben. Anders ist es für den Kontakt 1 und 2, hier läßt die Theorie alle Divergenzen zwischen 180° und 128° 34′ als möglich erscheinen. Die graphische Darstellung II Tafel II zeigt aber, daß diese Divergenzen auch mit anderen Kontakten bestehen können, und zwar die Divergenzen zwischen 142° 6′ und 180° mit Kontakten aus verschiedenen Nebenreihen, die Divergenzen zwischen 142° 6′ und 128° 34′ auch mit anderen Kontakten aus der Hauptreihe.

Weil nun bekanntlich die Kontakte aus der Hauptreihe in der Natur viel allgemeiner sind als solche aus den Nebenreihen, so könnte man erwarten, daß wenigstens die Divergenzen zwischen 142° 6′ und 180° für den Kontakt 1 und 2 am Stammscheitel charakteristisch sind. Weil nun die Divergenzen an den ausgewachsenen Stengeln meistens nur um einige Grade von denen verschieden sind, die am Vegetationspunkt angelegt wurden, so hätte man dann einen Hinweis auf den Kontakt 1 und 2 darin, daß die Stengelblätter eine Divergenz zwischen etwa 145° und 180° aufweisen. Jedoch ergibt sich recht bald, wenn man solche Fälle in der Natur aufsucht, daß sie sich, wenigstens als konstante Blattstellung, nicht nachweisen lassen[1]).

Bei dem Studium vieler Vegetationspunkte, welche den Kontakt 1 und 2 aufweisen, hat es sich dann auch herausgestellt, daß dabei Divergenzen angelegt werden, welche zwischen 137° und 144° liegen, obwohl sogleich bemerkt werden muß, daß die Bestimmung dieser Divergenzen Schwierigkeiten mit sich bringt, wovon bald näher die Rede sein wird. Die Ursache für diese wichtige Erscheinung,

---

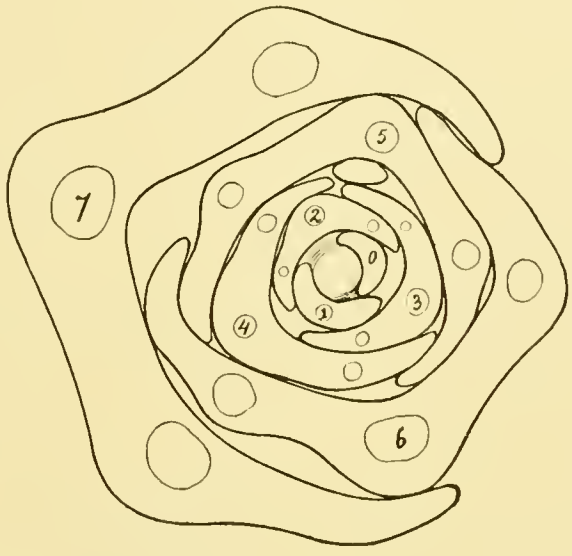
1) Bei veränderlicher Blattstellung werden solche Divergenzen wohl angetroffen, aber als Übergang zwischen zwei konstanten Blattstellungen. So zeigen bei *Doronicum Pardalianches* die Stengelblätter, welche dem Blumenköpfchen unmittelbar vorausgehen, eine Divergenz von etwa 160° oder 170° (man vergleiche BRAUN, l. c. S. 266).

welche sich nach dem, was wir oben gesagt haben, nicht à priori erwarten ließ, wird in Kapitel V S. 247 näher erklärt werden.

Aus dem Gesagten folgt also, daß wir in der Divergenz, welche die Stengelblätter aufweisen, kein Mittel haben, Pflanzen auszuwählen, welche den Kontakt 1 und 2 am Scheitel zeigen. Wir werden später sehen, daß man in bestimmten Fällen in der „Stengelzeichnung" wohl einen Hinweis darauf finden kann, aber auch dieser gibt keine Gewißheit, und wir sind also für das Auffinden dieses Kontaktfalls auf die Anfertigung von mehreren Querschnitten angewiesen.

Als charakteristisches Beispiel für den Kontakt 1 und 2 kann der Vegetationspunkt von *Ribes sanguineum* (Figur 41) dienen. Die Divergenz am Scheitel nähert sich dem Grenzwert der Hauptreihe (am ausgewachsenen Stengel kommt sie 144° nahe). Der Querschnitt unserer Figur wurde derart ausgeführt, daß die Spitze des Vegetationspunktes weggenommen wurde, die Wölbung des unteren Teils der Kuppe ist jedoch noch wahrnehmbar.

Fig. 41.



Querschnitt einer Endknospe eines wachsenden Sprosses von *Ribes sanguineum*. Vergr. 35.

Vergleicht man nun die Figur, welche durch die Querschnitte der drei oder vier jüngsten Sprossungen gebildet wird, mit der Kreiskonstruktion, welche in Fig. 3 Tafel X abgebildet ist, so wird man sogleich die große Übereinstimmung bemerken, welche hier zwischen den wahrgenommenen Tatsachen und dem theoretisch Erwarteten besteht. Die jungen Anlagen umfassen hier ein wenig mehr als ein Drittel des Achsenumfanges, sie zeigen sehr überzeugend die Gestalt einer Folioide, lassen zwischen sich freie Stammoberfläche sehen und besitzen genau den angegebenen Kontakt.

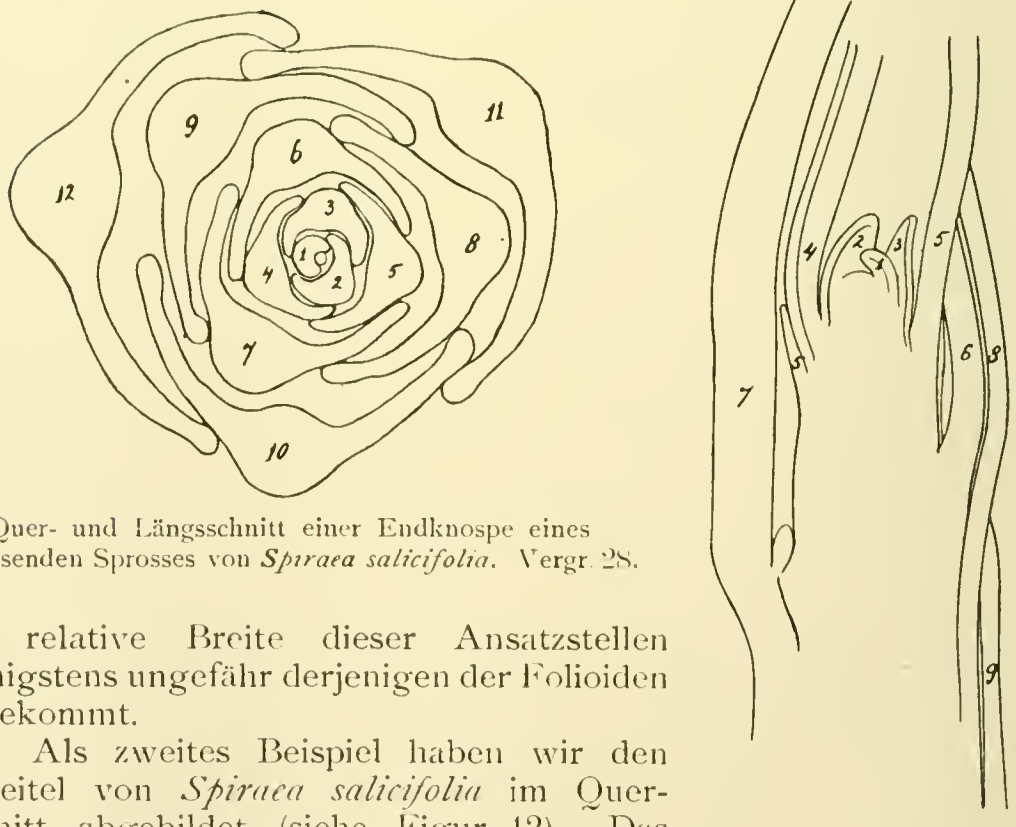
Jedoch weicht schon die dritte Anlage einigermaßen von der Folioidengestalt ab, obwohl diese Änderung nur gering ist und bei tiefer geführten Schnitten sogar ganz verschwindet. Auch hier mag also die Umrißlinie der „Ansatzstelle" als ein Kreis auf einer Kreiskegelfläche betrachtet werden.

Die Änderungen, welche die noch älteren Anlagen aufweisen, sind beträchtlicher. Nicht nur, daß dabei die Folioidengestalt wichtige Abweichungen erfahren hat; auch die Blattränder umfassen dabei bedeutend mehr als ein Drittel des Stengelumfangs. Die ältesten Blätter unserer Figur umfassen sogar mehr als die Hälfte. Tiefer geführte Schnitte zeigen, daß hier die Änderungen auch an den Ansatzstellen der älteren Blätter merkbar sind, sodaß auch diese mehr als die Hälfte des Stengelumfanges einnehmen. Doch ist die Divergenz dieser Blätter nur sehr wenig von derjenigen der jüngsten verschieden. Daraus folgt dann aber, daß die Umrißlinien der Ansatzstellen dieser Blätter gar nicht mehr mit

einem Foliodensystem vergleichbar sind, denn wäre dies der Fall, so müßte sich bei einer Breite, die größer ist als die Hälfte des Stengelumfangs, auch eine Blattstellung mit der Divergenz 180° ergeben.

Obwohl nun später diese sekundären Änderungen noch ausführlich zur Sprache kommen (man siehe S. 232), so mußten sie doch bereits hier angegeben werden, weil dadurch auch die Beurteilung der durch die jüngsten Organe gebildeten Systeme in ein anderes Licht gestellt wird. So wird es deutlich sein, daß man für die Beantwortung der Frage, welches Kontaktsystem ursprünglich angelegt wird, nur solche Querschnitte verwenden kann, die die allerjüngsten Anlagen enthalten, ein Umstand, auf den besonderer Wert zu legen ist. Auch geht daraus hervor, daß man von einer direkten Messung dieser relativen Breite der Ansatzstelle (des Faktors *b*) zur Prüfung der Theorie wenig zu erwarten hat. Es befinden sich ja die jüngsten Blätter so dicht in der Nähe der Spitze, deren Mitte außerdem nicht genau anzugeben ist, daß die Messung des Mittelpunktwinkels gar nicht genau ausfallen kann, während dieser, wie wir sahen, für die älteren Blätter schon merkbar geändert sein kann. Nur für flache Vegetationspunkte, mit geringen sekundären Änderungen, kann eine solche Messung einige Genauigkeit besitzen[1]). Wir haben uns deshalb damit begnügt, die große Übereinstimmung der von den jungen Anlagen gebildeten Figuren mit unseren theoretischen Konstruktionen nachzuweisen und hervorzuheben, daß

a. *Fig. 42.* b.



Quer- und Längsschnitt einer Endknospe eines wachsenden Sprosses von *Spiraea salicifolia*. Vergr. 28.

die relative Breite dieser Ansatzstellen wenigstens ungefähr derjenigen der Folioiden nahekommt.

Als zweites Beispiel haben wir den Scheitel von *Spiraea salicifolia* im Querschnitt abgebildet (siehe Figur 42). Das jüngste Blatt greift hier über die Kuppe des Scheitels, wie das aus dem Längsschnitt durch diesen Vegetationspunkt (Fig. 42b) zu sehen

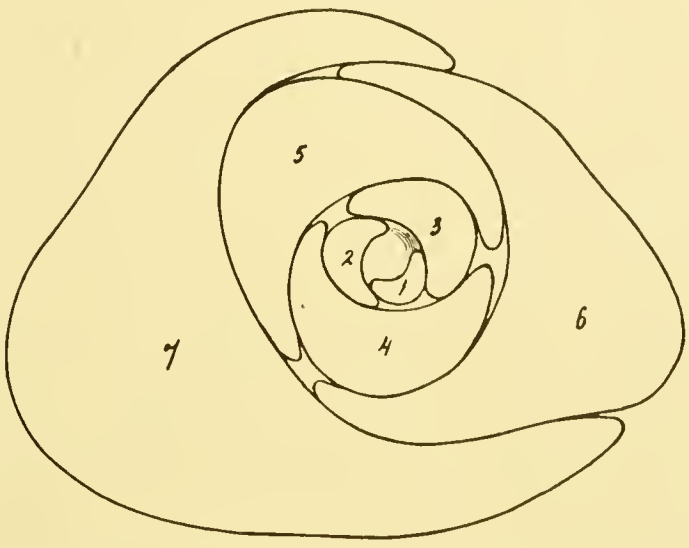
1) Auch die Divergenz ist, wie gesagt, nur sehr annähernd eine wirklich konstante Größe.

ist. Dadurch weicht dann auch der Querschnitt dieses Blattes ein wenig von der Folioidengestalt ab. Man wird aber auch in diesem Fall die Übereinstimmung mit der Theorie bemerken können.

Wir weisen noch besonders auf den Umstand hin, daß man durch die Lage der Ansatzstellen in dem Längsschnitt einen Eindruck bekommen kann von der Steilheit des Scheitelteils, auf dem die jungen Anlagen eingepflanzt stehen. Man wird dann auch wahrnehmen, daß dieser Teil sich mit einer Kreiskegelfläche vergleichen läßt, die steiler ist als eine solche mit dem Scheitelwinkel von $28^0 57' 18''$, welche wir für die theoretischen Konstruktionen gebraucht haben. Dadurch erklärt sich dann auch die Tatsache, daß sich die Querschnitte der jungen Blätter in Fig. 42 als Folioiden ergeben, die viel schmaler sind als die Folioiden unserer theorethischen Konstruktion (Fig. 3 Tafel X).

Als folgendes Beispiel kann hier ein Scheitel von *Bellis perennis* dienen (Fig. 43), welcher wieder in sehr schöner Weise die Übereinstimmung mit der theoretischen Konstruktion zeigt.

Fig. 43.



Scheitel einer einjährigen Blattrosette von *Bellis perennis* im August. Vergr. 30.

Wir wollen nun für ein weiteres Beispiel des Kontaktes 1 und 2 noch verweisen auf Figur 77, S. 277, welche Querschnitte von Scheiteln junger Pflanzen von *Myosotis palustris* darstellen. Obwohl sich diese Figuren auf Anschlußverhältnisse beziehen, die unmittelbar auf die Kotyledonen folgen, so können sie doch auch hier als Beispiel für konstante Blattstellung genommen werden, weil die Vegetationspunkte der älteren Pflanzen in ihrem Bau ganz mit diesen übereinstimmen.

Außer bei den hier gegebenen Beispielen wurde nun dieser Kontakt 1 und 2 noch bei zahlreichen anderen Arten in der Natur angetroffen; hier folgen davon diejenigen, bei welchen dieser Kontakt konstant gefunden worden ist und zwar an Vegetationsscheiteln von Stengeln oder Ästen, die in voller Entwicklung begriffen sind[1]).

Prunus Padus, Prunus Mahaleb, Populus tremula, Populus nigra, Tanacetum vulgare, Lactuca perennis, Robinia Pseudo-Acacia, Quercus Robur, Ribes nigrum, Lupinus luteus, Lupinus arboreus, Isatis tinctoria (Rosette), *Helianthus annuus, Ginkgo biloba, Alnus glutinosa.*

Außerdem werden wir später Beispielen von Vegetationspunkten begegnen, bei denen diese Stellung im Anschluß an andere

1) Soweit diese Arten Stipula aufweisen, gilt auch hier dasselbe was wir bei der zweizeiligen Blattstellung darüber gesagt haben.

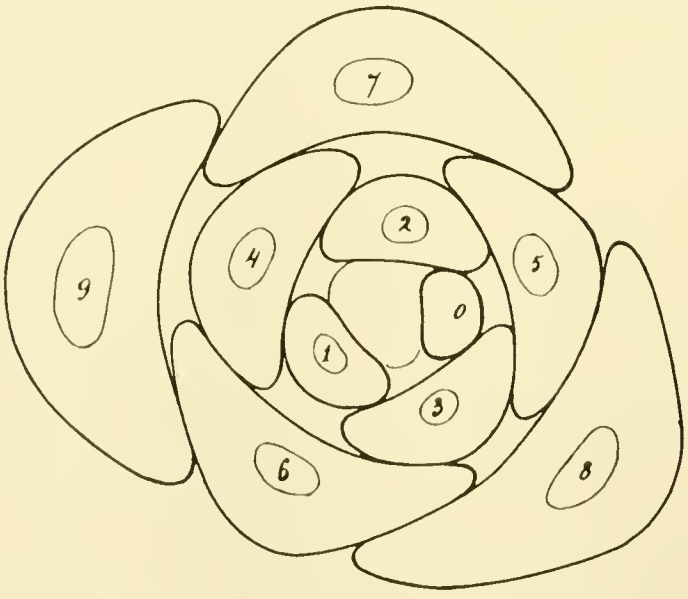
Stellungen auftritt oder als Übergang zwischen zwei anderen. Es gehört auch diese Blattstellung zu den allgemein in der Natur verbreiteten, und ohne Zweifel wird man bei fortgesetztem Studium die hier gegebene Liste noch bedeutend erweitern können.

Bemerken wir nun noch, daß die Blattstellung, welche eine Art am Scheitel aufweist, nicht immer ganz konstant ist. So fand ich unter den zahlreichen Vegetationspunkten von *Ribes sanguineum,* welche ich untersucht habe, einen, der eine Abweichung in der Stellung des jüngsten Blattes aufwies, die dadurch verursacht war, daß dieses Blatt sich nur sehr wenig hervorwölbte, und zwar so, daß die Stellung mehr dem Kontakt 2 und 3 nahe kam. Nun werden wir später nachweisen, daß dieser Umstand für unsere Theorie von untergeordneter Bedeutung ist, aber wir wollten doch darauf aufmerksam machen, weil es nicht ausgeschlossen ist, daß solche kleine Abweichungen bei den anderen genannten, von mir weniger untersuchten Arten zahlreicher sind als bei *Ribes.*

§ 9. Der Kontakt 2 und 3. Die Theorie läßt für diesen Kontakt alle Divergenzen zwischen 128° 34′ und 142° 6′ als möglich erscheinen, aber auch hier laufen die wirklich angetroffenen Divergenzen gar nicht so viel auseinander als die Theorie erwarten läßt. Auch hier sind die am Scheitel wahrgenommenen Divergenzen meistens in der Nähe des Grenzwertes gelegen, obwohl sie zwischen etwa 142° und 137° variieren können. Wieder gibt uns also die Divergenz kein Mittel an die Hand, bei einer Art den Kontakt 2 und 3 am Scheitel vorauszusagen, sodaß wir auch hier ganz auf das Studium der Querschnitte von Vegetationspunkten angewiesen sind, um Beispiele für dieses Verhalten aufzufinden.

Nehmen wir als erstes Beispiel den Vegetationspunkt von *Jasminum fruticans* (Fig. 44). Diese Abbildung hat man mit der theoretischen Konstruktion Fig. 5 Tafel X zu vergleichen, und, wenn man von der relativ breiteren Gestalt der Blattquerschnitte absieht, so wird die Übereinstimmung der beiden Figuren sehr auffallen. Es wird dies auch darum besonders überzeugend, weil bei der hier betrachteten Art die Übereinstimmung der Blattquerschnitte mit der Folioidengestalt nicht auf die jüngsten Anlagen beschränkt ist, sondern auch noch für die älteren Blätter gilt, da diese nur wenig durch sekundäres Wachstum geändert erscheinen. Die breitere Gestalt der Querschnitte wird dadurch erklärt, daß der Vegetationspunkt in dem

Fig. 44.



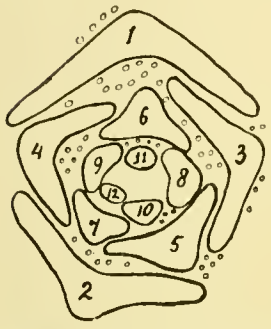
Querschnitt einer Endknospe eines wachsenden Sprosses von *Jasminum fruticans.* Vergr. 80.

Teil, auf dem die hier betrachteten Blätter stehen, ein wenig stumpfer ist als die Kegelfläche mit einem Scheitelwinkel von 28° 57′ 18″, die wir für unsere theoretischen Konstruktionen benutzt haben. Daß die jüngste Anlage eine relativ noch breitere Gestalt aufweist als die anderen, kommt daher, daß diese auf einem noch stumpferen Teil des Scheitels eingepflanzt steht.

Wir weisen noch darauf hin, daß die 5-zeilige Spirale (hier keine Kontaktspirale) deutlich gewunden ist, ein Umstand, der für die Beurteilung der Divergenz von Wert ist. Es geht daraus ja hervor, daß diese am Scheitel kleiner ist als 144°. Wie wir später besprechen werden, ist diese Divergenz am ausgewachsenen Stengel öfters ziemlich genau 144°.

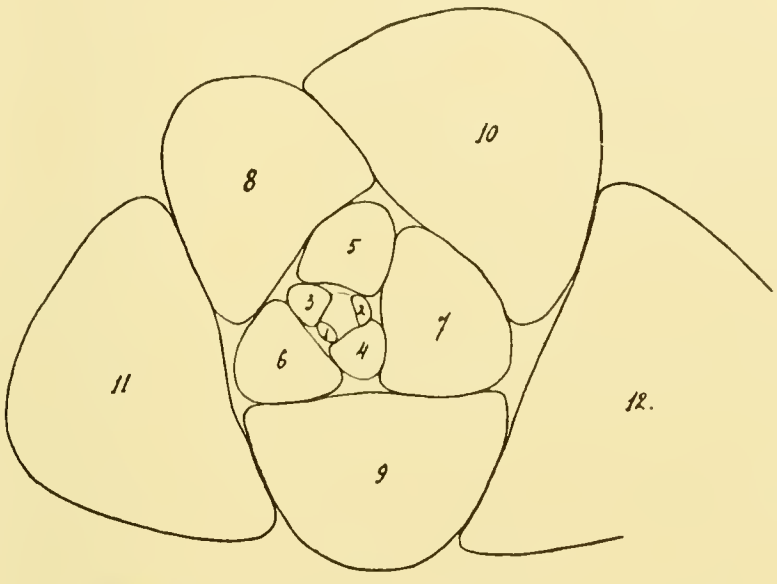
Wir haben noch zwei andere Beispiele hier abgebildet, welche denselben Kontakt aufweisen und zwar die Stammscheitel von

Fig. 45.



Querschnitt einer Endknospe eines wachsenden Sprosses von *Sarothamnus vulgaris*. Vergr. 30.

Fig. 46.



Ebensolches Präparat von *Sedum acre*. Vergr. 30.

Sarothamnus vulgaris (Fig. 45) und von *Sedum acre* (Fig. 46). Der erste ist darum von einigem Interesse, weil diese Pflanze in dem Bau ihrer Stengel eine große Übereinstimmung mit *Jasminum fruticans* aufweist und weil aus unserer Figur hervorgeht, daß dies auch in der Anordnung der Anlagen am Scheitel der Fall ist. Zwar wird hier die Wahrnehmung des Kontaktes durch die Haare erschwert, doch unterliegt es keinem Zweifel, daß die Stellung der Blattbasen genau dem theoretischen Schema entspricht. Das zweite Beispiel ist von Bedeutung, weil daraus die Anwesenheit des Kontaktes 2 und 3 am Scheitel hervorgeht, während CHURCH, indem er die Kontakte älterer Anlagen untersuchte, der Meinung war, daß hier der Kontakt 3 und 5 anzunehmen sei[1]).

Endlich wollen wir noch auf Figur 65a S. 245 hinweisen, welche den Vegetationspunkt von *Arabis alpina* zur Darstellung bringt, der ebenfalls diesen Kontakt aufweist.

Diesen Beispielen ließen sich nun noch zahlreiche hinzufügen; hier wollen wir wieder einige Arten angeben, bei welchen dieser Kontakt 2 und 3 als konstante Stellung vorkommt, unter denen man

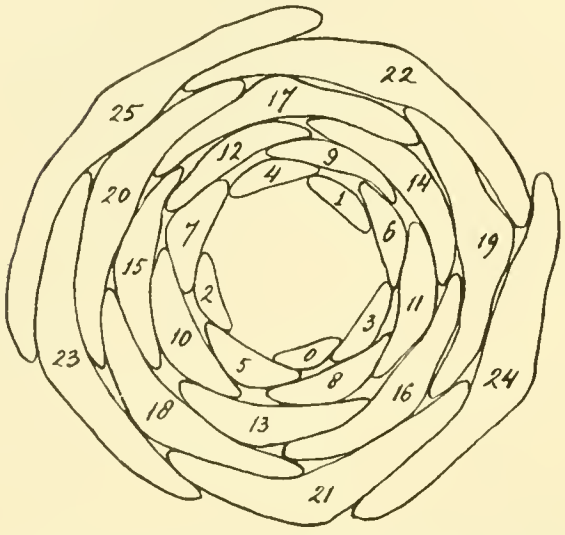
1) Relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws, p. 296.

wieder solche antreffen wird, bei welchen die Nebenblätter zusammen mit dem Achselblatt als ein einziger Kontaktkörper fungieren. *Euphorbia palustris, Daphne Mezerum, Ulex europaeus, Cnicus benedictus, Ilex Aquifolium, Brassica napus, Delphinium consolida.*

Auch diesen Kontaktfall werden wir später als Übergangsfall antreffen, und man kann auch von ihm sagen, daß er zu den allgemeinsten in der Natur gehört.

§ 10. Der Kontakt 3 und 5. Die Theorie läßt für diesen Kontakt Divergenzen zwischen 142° 6′ und 135° 35′ möglich erscheinen, aber auch hier kommen die tatsächlich angetroffenen Divergenzen dem Limitwert der Hauptreihe sehr nahe.

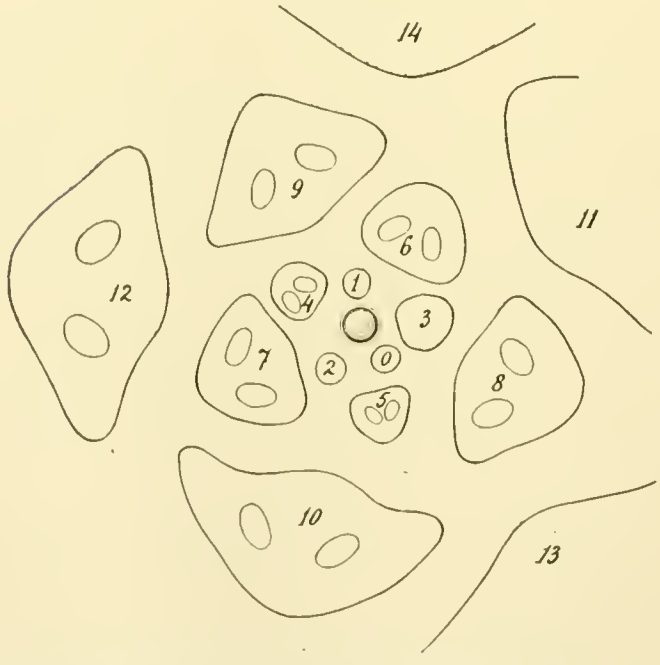
Fig. 47.



Querschnitt durch die vegetative Endknospe eines wachsenden Stengels von *Linum usitatissimum*. Vergr. 30.

Als Beispiel möge hier der Scheitel von *Linum usitatissimum* (Fig. 47) dienen, welcher einen Vergleich mit der theoretischen Konstruktion Fig. 7 Tafel X zuläßt. Die Übereinstimmung ist hier wieder eine sehr frappante, die dadurch erhöht wird, daß hier der Teil, auf dem die jüngsten Anlagen liegen, nur wenig verschieden ist von der Kegelfläche, welche uns für die theoretischen Konstruktionen gedient hat. Bemerken wir noch, daß in unserer Figur die jüngsten Anlagen weggeschnitten sind; es ist nämlich mit einigen Schwierigkeiten verknüpft, diese gleichzeitig mit den älteren in einem Querschnitt zu Gesicht zu bekommen. Sie zeigen aber den gleichen Kontakt, wie aus speziell darauf gerichteten Untersuchungen hervorging.

Fig. 48.



Querschnitt einer ruhenden Knospe von *Struthiopteris germanica* im August.

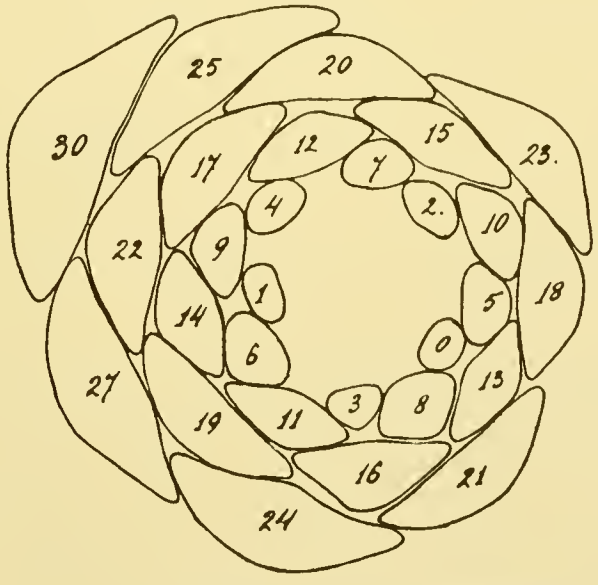
Wir weisen noch darauf hin, daß die älteren Blätter wieder bedeutende Abweichungen von der Folioidengestalt erkennen lassen, sodaß sie auch dreizählige Kontakte an der Stelle von zweizähligen aufweisen.

Einige nähere Erläuterungen verlangt der Scheitel von *Struthiopteris germanica*, der in Fig. 48 dargestellt ist. Scheinbar kommen hier nämlich keine

Kontakte zwischen den jungen Anlagen vor[1]). In Wirklichkeit aber bestehen solche Kontakte. Der Scheitel ist hier, wie bei allen Farnen flach und mit Schuppen dicht besetzt, zwischen denen nur die nackten Gipfel der Anlagen und die runde Kuppe hervortreten. Fertigt man nun einen Querschnitt dicht oberhalb der Scheitelkuppe an, so bekommt man die genannten nackten Gipfel der jüngsten Anlagen in Obenansicht zu sehen, die älteren werden dabei durchgeschnitten. Die Kreise unserer Figuren stellen also teilweise diese Gipfel, teilweise auch Querschnitte der älteren Blätter dar, der Kreis in der Mitte der Zeichnung ist die Kuppe des Scheitels. Die Ansatzstellen selber aber werden durch die dichtstehenden Schuppen ganz unsichtbar gemacht. Daß aber wirklich hier Kontakt besteht zwischen diesen Ansatzstellen, das geht aus den Längsschnitten des Stammscheitels hervor, obwohl auch dann noch die Anwesenheit der Schuppen die Vegetationspunkte der Farnen zu sehr ungünstigen Objekten für die Untersuchung der Kontaktfrage macht.

Denkt man sich nun um die Obenansichten und Querschnitte der Anlagen in unserer Figur die Umrißlinien der Ansatzstellen gezeichnet, so geht schon aus den Kreisformen, die unsere Figur für die jüngsten Anlagen aufweist, hervor, daß auch die Ansatzstellen sich dafür als Kreise darstellen. Man bekommt also dann eine Figur, die annähernd übereinstimmt mit der Kreiskonstruktion, die in Fig. 6 Tafel VI abgebildet ist. Eben dieser Umstand war es, der uns Veranlassung gab, den Vegetationspunkt von *Struthiopteris germanica* hier zur Abbildung zu bringen. Es ist dieser Fall ja ein schönes Beispiel für den Umstand, auf den wir früher aufmerksam machten, daß nämlich die Gestalt der Ansatzlinien sich einem Kreis nähert, wenn der Scheitel flach ist.

Fig. 49.



Ruhende Endknospe eines Sprosses von *Taxus baccata*. Vergr. 30.

Außer bei den hier genannten Arten fand ich diesen Kontakt 3 und 5 noch an den Sproßscheiteln von *Sempervivum tectorum*, *Sempervivum auvergnii*, *Aspidium Filix mas* und an dünneren Zweigen von *Taxus baccata*.

§ 11. Höhere Kontakte. Wir haben unsere Untersuchungen hauptsächlich auf die niederen Stellungsverhältnisse gerichtet, weil diese in der Natur die größte Bedeutung besitzen. Für die höheren Kontaktfälle findet man außerdem in HOFMEISTERs Handbuch der Physiologischen Botanik mehrere Beispiele gegeben, während auch CHURCH sehr schöne Vegetationsscheitel mit solchen Kontakten zur Darstellung gebracht hat. Nun stimmen gerade diese Figuren auch am besten mit den CHURCHschen Konstruktionen

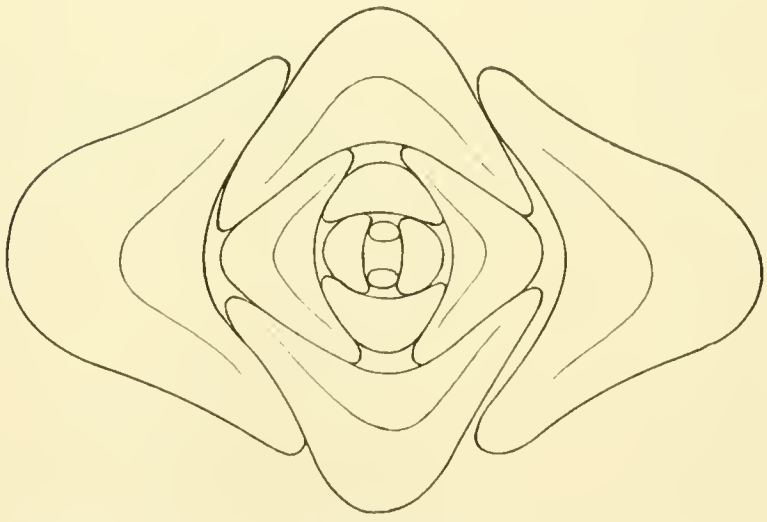
1) Man vergleiche CHURCH, l. c. p. 236 u. f.

überein, was darin seinen Grund findet, daß die höheren Kontakte besonders an flachen Sprossenscheiteln angetroffen werden und also dann die Folioide immer mehr sich einem Kreis nähert. Wir wollen deshalb hier auf diese Abbildungen verweisen und bringen nur noch einen Scheitel mit dem Kontakt 5 und 8 zur Abbildung, nämlich den von dickeren Zweigen von *Taxus baccata* (Fig. 49). Nach dem früher Gesagten wird diese Figur keiner näheren Besprechung bedürfen.

Beispiele für mehrfache Systeme.

§ 12. Die Dekussation. Jede Pflanze mit genau zweigliedrigen Quirlen liefert eine gute Bestätigung der Theorie, und für ihre Stammscheitel ist die Übereinstimmung mit der in Fig. 9 Tafel XII abgebildeten Folioidenkonstruktion eine sehr große. Es gibt aber mehrere Fälle, in denen die Dekussation nicht genau verwirklicht angetroffen wird. BRAUN und HOFMEISTER haben schon auf zwei kennzeichnende Abweichungen der regelmäßigen Stellung hingewiesen, die gewöhnlich bezeichnet werden als die „Dekussation der Caryophylleen“ und die „Dekussation der Fraxineen“. Nun wird aber von diesen eigentümlichen Abweichungen vom normalen Bautypus bei den jüngsten Anlagen nur sehr wenig bemerkt. So zeigt z. B. die Anordnung der Blattpaare von *Syringa vulgaris* (Fig. 50) an dem jüngsten Teil des Scheitels nicht die geringste Unregelmäßigkeit und stimmt ganz mit unserem Schema überein; erst bei den älteren Blättern kommt der Fraxineentypus zum Ausdruck. Meine Wahrnehmungen sind aber noch zu beschränkt, um schon jetzt ein endgültiges Urteil über diese Bauverhältnisse auszusprechen.

Fig. 50.



Querschnitt durch die Laubknospe von *Syringa vulgaris*. Vergr. 45.

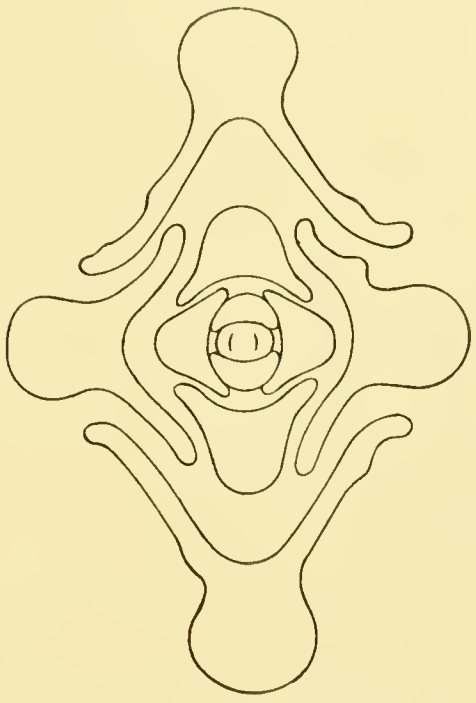
Wie überzeugend die Übereinstimmung mit der Theorie ist für solche Fälle, in welchen die Dekussation genau verwirklicht ist, kann man aus der Fig. 51 sehen, in welcher der Vegetationspunkt von *Lysimachia vulgaris* abgebildet ist. Auch kann hier u. a. noch auf die Darstellung des Scheitels von *Evonymus japonicus* hingewiesen werden, die in Fig. 31 des Bonner Lehrbuchs zu finden ist.

Dabei bemerken wir noch, daß die beiden jüngsten Anlagen öfters eine mehr runde oder elliptische Gestalt zeigen, und erst das darauffolgende Paar den uns bekannten Folioidentypus auf-

weist. Es findet dieser Umstand darin seine Erklärung, daß die jüngsten Anlagen aus einem ziemlich stumpfen Teil des Scheitels hervorsprossen, und wie bereits öfters bemerkt, muß ihre Gestalt sich dann der Kreisform nähern.

Schließlich ist es noch von Interesse, darauf hinzuweisen, daß die Seitenränder der beiden Anlagen bei den jüngsten Blättern einander nicht berühren. Es wird dieser Umstand an allen Scheiteln mit dieser Blattstellung wiedergefunden und er führt zu der Schlußfolgerung, daß wirklich der in Fig. 9 Tafel XII abgebildete zweizählige Quirl ein gutes Schema für die Dekussation ist. Die Theorie, wie wir sie hier entwickelt haben, läßt nämlich Folioidensysteme mit schiefem Schnitt der Kontaktspiralen als gleichberechtigt neben solchen mit rechtwinkligem Schnitt erscheinen; daß letztere also von der Pflanze bevorzugt werden, muß einen hier noch nicht berücksichtigten Grund haben.

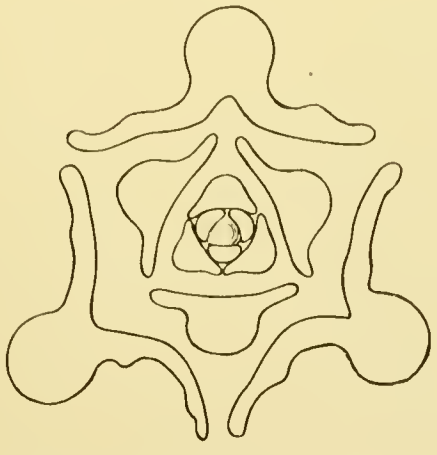
Fig. 51.



Querschnitt durch den Scheitel eines dekussierten vegetativen Sprosses von *Lysimachia vulgaris*. Vergr. 30.

§ 13. Dreizählige Quirle. Neben den zweizähligen Quirlen kommen auch die dreizähligen allgemein in der Natur vor, sowohl in den vegetativen als auch in den Blütenregionen. Wir haben als Beispiel für diese Blattstellung dieselbe Art gewählt, bei welcher wir Dekussation nachgewiesen haben. Fig. 52 gibt den Scheitel von *Lysimachia vulgaris* wieder. Von Interesse ist es, wieder hervorzuheben, daß die Seitenränder der jüngsten Anlagen einander nicht berühren, aber einen bedeutenden Teil der freien Stammoberfläche frei lassen. Daraus folgt dann, daß auch hier eine Stellung bevorzugt wird, welche derjenigen mit rechtwinkligem Schnitt der Kontaktspiralen nahekommt. Die Figur läßt auch wieder einen Vergleich zu mit dem theoretischen Schema, das wir in Fig. 10 Tafel XII abgebildet haben.

Fig. 52.



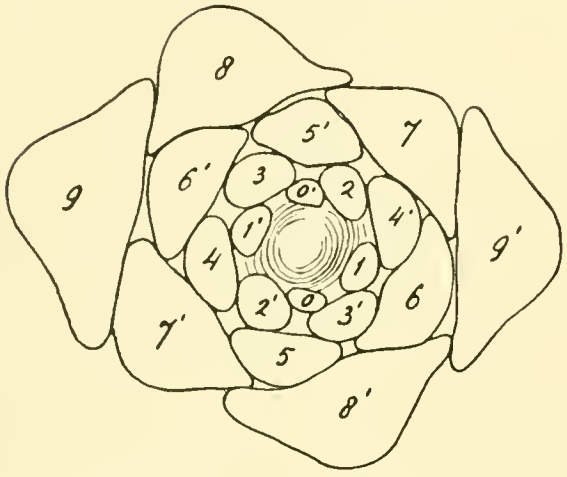
Querschnitt durch den Scheitel eines dreizähligen vegetativen Sprosses von *Lysimachia vulgaris*. Vergr. 30.

§ 14. Gedrehte Quirle. Ein einziges Beispiel für diese Art Stellungsverhältnisse möge hier folgen. Fig. 53 gibt den Stammscheitel von *Cephalotaxus drupacea*, worin man zwischen den jüngsten Anlagen ein zweifaches System verwirklicht findet,

das zum Grundsystem ein einfaches mit dem Kontakt 2 und 3 hat.

Nun nehmen aber in unserer Figur die älteren Blätter relativ einen viel größeren Teil des Stengelumfangs ein als die jüngsten Anlagen und diesem Umstand zufolge zeigen sie dann auch nicht mehr dasselbe Kontaktsystem, sondern bilden ein solches, das sich mit dem theoretischen Schema Fig. 12 Tafel XII vergleichen läßt, also ein zweifaches, welchem ein einfaches mit dem Kontakt 1 und 2 zu grunde liegt. Es ist dieser Umstand darum von Interesse, weil daraus hervorgeht, daß wir hier wenigstens zwischen diesen höheren Teilen der älteren Blätter Kontaktwechsel wahrnehmen. Dieses Verhalten trifft man bei den Knospen sehr oft an und es wird später bei der Besprechung der Änderungen, welche die Blattstellung nach der Anlegung erleidet, noch näher zur Sprache kommen.

Fig. 53.



Scheitelansicht einer Endknospe von *Cephalotaxus drupacea*. Vergr. 45.

Kapitel II. Anlegung neuer Organe im Anschluß an vorhandene bei konstanter Blattstellung.

§ 1. Beobachtungstatsachen. Es ist bereits früher erwähnt worden, daß die neuen Anlagen, wenn sie als Erhebungen über der Oberfläche des nackten Scheitels wahrnehmbar werden, nicht immer sofort mit den bereits angelegten Bildungen in Kontakt stehen. Die Vorwölbung fängt öfters an bestimmten Stellen der Scheiteloberfläche an, die sich in einiger Entfernung von vorhandenen Höckern befinden, um sich von dort aus schneller oder langsamer über diese Oberfläche auszubreiten bis der Anschluß an ältere Organe erreicht ist. Je nachdem der Zeitraum, in dem diese Ausbreitung vor sich geht, länger oder kürzer ist, wird es wahrscheinlicher sein, daß Zwischenstadien sichtbar sind. In den meisten Fällen ist das nicht der Fall; aber es gibt auch solche, bei denen sie wohl wahrnehmbar sind; dann weisen aber die „Entwicklungsfelder", wie es schon von SCHWENDENER [1]) betont wurde, den richtigen Kontakt auf. Für unsere Betrachtungen ist der Zustand, wie er am Ende der ersten Entwicklungsphase beobachtet wird, von größerem Interesse als diese Entwicklung selbst. Für diesen Zustand läßt sich nun ganz allgemein folgende Regel aufstellen:

1) Die jüngsten Entwicklungsstadien seitlicher Organe und ihr Anschluß an bereits vorhandene. Sitz.-Ber. Berl. Akad. 1895, S. 645—663.

Die Anlegung neuer Organe bei konstanter Blattstellung geschieht in der Weise, daß nach Beendigung der ersten Entwicklungsphase die neuen Anlagen sich in das ähnliche System einfügen, welches durch die älteren Sprossungen gebildet wird.

Wenn nun auch dieser Ausspruch die Beobachtungen allgemein zusammenfaßt, so ist es doch von großem Interesse, nachzuweisen, daß die Fortsetzung des vorhandenen Systems als eine Folge bestimmter anderer Beobachtungstatsachen aufgefaßt werden kann. Denn es muß auch darauf hingewiesen werden, daß nicht jede Annahme über die Art der Anlegung neuer Organe, welche eine solche Fortsetzung des Systems zur Folge haben sollte, auch durch die Beobachtung bestätigt wird. Besonders hat das in dem wichtigen Umstand seinen Grund, daß der Aufbau des Systems in vielen Fällen nicht genau akropetal geschieht und es also vorkommen kann, daß die eine Seite des Systems viel weiter in der Entwicklung fortgeschritten ist als die andere, was jedoch nicht verhindert, daß sich dann die neu angelegten Organe doch in das alte System einfügen und die oben aufgestellte Regel ihre Richtigkeit behält.

Es würde z. B. verfehlt sein, wenn wir aus der gegebenen Regel den Schluß ziehen wollten, daß bei konstanter Blattstellung und einfachem System die neuen Anlagen unter Einhaltung einer konstanten Divergenz auftreten, und diese Konstanz als Beobachtungstatsache hinstellen wollten, aus welcher die Fortsetzung des Systems folgt. Denn, obwohl in dem System, das schließlich erhalten wird, eine konstante Divergenz wahrnehmbar ist, so wird das Auftreten neuer Sprossungen nicht danach geregelt. Ebenso wenig könnten wir das Einhalten eines bestimmten „Hauptverhältnisses“ (a) als eine Tatsache festhalten, welche das Endresultat herbeiführen kann, denn auch diese Annahme würde nur Sinn haben, wenn die Entwickelung der neuen Bildungen in der Hauptspirale statt fand.

Doch gibt es zwei andere Haupteigenschaften der „ähnlichen Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche“, von denen die Beobachtung lehrt, daß sie wohl immer bei der Anlegung neuer seitlicher Sprossungen inne gehalten werden, nämlich, daß die Ansatzstellen neuer Organe nach Beendigung der ersten Entwickelungsphase denselben Wert von b besitzen wie die älteren, und daß jede derselben mit mindestens zwei älteren in Kontakt steht. Dennoch kann die Fortsetzung des vorhandenen Systems nicht als eine Folge dieser zwei Beobachtungstatsachen allein aufgefaßt werden. Es wird dies am besten an einem bestimmten Beispiel erläutert. Zur Vereinfachung der Betrachtung wählen wir ein regelmäßiges System tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche, es wird dann nach unseren mathematischen Ableitungen nicht schwer sein, das Gesagte auf Folioidensysteme zu übertragen. Denken wir nun, es sei das System mit dem rechtwinkligen Kontakt 3 und 5, wie es in Fig. 8 Tafel I dargestellt ist, auf dem Vegetationspunkt vorhanden, und es sollte durch Anlegung neuer Kreise fortgesetzt werden. Es wird dann einleuchten, daß die beiden Tatsachen: „die neu angelegten Kreise müssen denselben Wert von b wie die vorhandenen, d. h. denselben Durch-

messer besitzen, und sie sollen mit mindestens zwei solchen in Kontakt stehen", nicht genügen, um eine Fortsetzung dieses Systems absolut notwendig zu machen. Es könnte ja z. B. ein neuer Kreis ebensogut die Kreise 22 und 25 tangieren wie diejenigen 22 und 24, und nur die letzte Annahme sollte eine Weiterführung des vorhandenen Systems bedeuten. Es ist nun leicht eine dritte Beobachtungstatsache anzugeben, welche sich ebenfalls immer bewährt, und durch welche die Fortsetzung des Systems notwendig wird; sie sagt aus, daß die neuen Bildungen immer auftreten in den größeren Lücken, welche sich zwischen den bereits angelegten seitlichen Sprossungen befinden.

Wir betonen noch, daß diese letzte Beobachtung nicht identisch ist mit der Anschauung HOFMEISTERs, daß die neue Anlage immer in der größten aller vorhandenen Lücken auftreten muß. Hier ist nur gemeint, daß es zwischen den älteren Organen kleinere und größere Lücken gibt, und daß es die letzteren sind, in denen die neuen Bildungen hervortreten.

Fassen wir also nochmals kurz die drei Beobachtungstatsachen zusammen, welchen sowohl bei einfachen als bei mehrfachen Systemen, beim Innenhalten wirklich akropetaler Entstehungsfolge der Organe wie auch bei nichtakropetaler Entwickelung des Scheitels immer genügt wird und welche die Fortsetzung des vorhandenen Systems als Notwendigkeit zur Folge haben:

1. Für die neuen Anlagen ist der relative Durchmesser der Ansatzstelle (der Faktor b) derselbe wie für die bereits vorhandenen jungen seitlichen Sprossungen.

2. Diese Anlagen befinden sich in Kontakt mit mindestens zwei älteren.

3. Sie sind angelegt in den größeren Lücken, welche sich zwischen den älteren Bildungen befinden.

§ 2. Aufhebung geringer Unregelmäßigkeiten. Die Fortsetzung des Systems geschieht nicht immer mit großer Genauigkeit, öfters sind dabei Unregelmäßigkeiten merkbar. So kann es vorkommen, daß neue Anlagen größer oder kleiner ausfallen als die Theorie es erfordert, oder daß keine konstante Divergenz angelegt wird. Sind diese Abweichungen bedeutend, dann wird die konstante Blattstellung nicht beibehalten, sondern geht in eine andere über; die Besprechung dieses Falles gehört also unter die Behandlung der veränderlichen Blattstellung. Sind die Unregelmäßigkeiten aber von geringer Bedeutung, dann werden sie meistens bei der weiteren Entwickelung wieder aufgehoben oder durch nachträgliche Änderungen bei dem weiteren Aufbau des Systems kompensiert. Diese Aufhebung geringer Unregelmäßigkeiten muß also als vierte Beobachtungstatsache den drei angegebenen hinzugefügt werden.

Man könnte sich nun fragen, warum wir diese vier Tatsachen an die Stelle der früher aufgestellten Regel setzen und nicht lieber diese als Ausgangspunkt der Theorie für die konstante Blattstellung wählen. Es hat dies zwei wichtige Gründe: erstens geben diese vier Tatsachen eine genauere Beschreibung der beobachteten Vorgänge am Scheitel, wie das aus dem Gesagten unmittelbar einleuchten wird, zweitens werden wir später nachweisen, daß die Beobachtungen, welche den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen

über „veränderliche Blattstellung“ bilden, sich ausgezeichnet an diese vier Tatsachen anschließen.

Man wird bemerkt haben, daß die obenstehenden Auseinandersetzungen große Übereinstimmung mit den Betrachtungen SCHWENDENERS in seiner „Theorie der Blattstellungen“ zeigen (man siehe S. 45—57). Daß wir sie dennoch hier ausführlich gegeben haben, findet einerseits seine Erklärung darin, daß unsere Auffassung doch in einigen Punkten von der SCHWENDENERschen abweicht, anderseits auch in der Überlegung, daß die Theorie dieses Autors manchmal mißverstanden worden ist, und es also notwendig ist, die Fundamente, auf denen weiter aufgebaut wird, ganz klarzustellen.

Kapitel III. Die Blattstellung an dem ausgewachsenen Stengel.

§ 1. Die Blattstellung am Stengel und das ursprünglich angelegte Kontaktsystem. Nachdem wir in den vorigen Kapiteln die Anlegung und Stellung junger Anlagen am Scheitel kennen gelernt haben, wollen wir jetzt untersuchen, welche Stellung die seitlichen Sprossungen in ausgewachsenem Zustand an dem Stengel einnehmen, und die Änderungen besprechen, welche bei dem Übergang des embryonalen in den fertigen Zustand auftreten. Es führt uns dies unmittelbar zu der wichtigen Streitfrage der Verschiebungen seitlicher Organe durch ihren gegenseitigen Druck bei ihrer Entwickelung aus dem Knospenzustand zu ausgewachsenen Sprossungen. Bevor wir aber einige Worte über diese Frage sagen, wollen wir zuerst nachsehen, ob bei der Annahme, es fänden gar keine Verschiebungen der Organe bei ihrer Entwickelung statt, sich aus der Stellung derselben am Stengel ein Schluß ziehen läßt auf die Kontaktverhältnisse, welche am Scheitel herrschen.

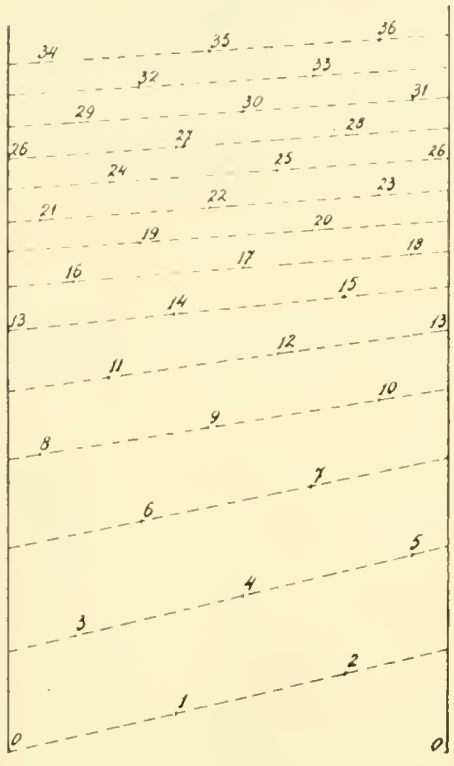
Wir haben früher hervorgehoben, wie sich an dem Stengel die Blätter auf Spiralscharen ordnen, welche besonders ins Auge fallen, und daß die Koordinatzahlen dieser Spiralscharen in den meisten Fällen durch zwei oder drei aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe ausgedrückt werden. Man könnte nun meinen, daß diese auffallenden Spiralscharen dieselben sind wie die Scharen der Kontaktspiralen, welche man am Scheitel beobachtet. Damit wäre dann ein sehr einfaches Mittel aufgefunden, sich unmittelbar über die am Scheitel vorherrschenden Kontakte orientieren zu können.

Wenn die Entwickelung des Stengels und der seitlichen Sprossungen eine sehr gleichmäßige ist, sodaß der fertige Zustand annähernd eine Vergrößerung des angelegten darstellt, wie z. B. bei den Kompositenköpfen, dann wird auch dieses einfache Verhalten angetroffen.

In den meisten Fällen aber kann man in dem fertigen Zustand den ursprünglichen nicht erkennen und können auch die auffallendsten Spiralen ganz andere sein als die ursprünglichen Kontaktspiralen. Eine Betrachtung der Fig. 54 wird dies deutlich machen. Die darin angegebenen Punkte mögen Ansatzstellen von Blättern am ausgewachsenen zylindrisch gedachten Stengel dar-

stellen. Sie sind derart gezeichnet, daß sie eine konstante Divergenz $\left(\frac{5}{13} \cdot 360^0\right)$ aufweisen, am oberen Teil fallen die 5- und 3-zeiligen Spiralen am meisten ins Auge, am unteren Teil gagegen die 3- und 2-zeiligen. Dennoch kann diese Stellung sehr gut realisiert sein an einem Stengel, der am Scheitel konstant ein- und dasselbe Kontaktsystem aufweist. Die Stellung am unteren Teil kann ja einfach dadurch zu stande gekommen sein, daß dieser Stengelteil beträchtlicher in die Länge gewachsen ist als der obere.

Fig. 54.



Schematische Darstellung für die Änderung der meist ins Auge fallenden Spiralen bei ungleichem Längenwachstum.

Dieses Verhalten kann noch komplizierter werden, wenn der Stengel nicht zylindrisch ist. Wir wollen aber nicht weiter darauf eingehen und nur besonders hervorheben, daß man aus den ins Auge fallenden Spiralscharen am Stengel keinen Schluß ziehen kann auf die Kontaktverhältnisse am Scheitel, und nicht einmal aus einer Änderung der Zahl dieser auffallenden Spiralscharen eine Änderung der Kontakte am Scheitel folgern kann.

Ein gutes Beispiel, worauf mich Prof. BEIJERINCK aufmerksam machte, gibt *Campanula Medium*. Bei der Verwesung der Stengel dieser Pflanze bleibt nämlich der Holzkörper zurück und zeigt in sehr schöner Weise die Stellung der Blätter an den Löchern, welche durch die Verwesung des Verbindungsgewebes zwischen dem Mark des Stammes und der Blattstiele entstanden sind. Am unteren Teil dieses Körpers sind daran die 5- und 8-zeiligen Spiralen die am meisten ins Auge fallenden, am oberen Teil dagegen die 3- und 5-zeiligen, und doch weist der Stammscheitel konstant den Kontakt 2 und 3 auf.

Die obenstehende Betrachtung hat aber noch eine größere Bedeutung.

Aus Figur 54 ist, wie gesagt, zu entnehmen, daß durch Änderung des Verhältnisses zwischen Längen- und Breitenwachstum auch die Koordinatzahlen der am meisten ins Auge fallenden Spiralscharen sich ändern, in unserem Beispiel von 5 und 3 in 3 und 2. Hätten wir den unteren Teil der Zylinderfläche noch stärker verlängert dargestellt, so würden auf diesem Teil die 1- und 2-zeiligen Spiralen oder sogar die 1- und 1-zeiligen die am meisten ins Auge fallenden gewesen sein. Wenn wir dagegen das Längenwachstum im oberen Teil unserer Figur geringer vorausgesetzt hätten, so würden darin die 8- und 5-zeiligen, die 13- und 8-zeiligen oder die 21- und 13-zeiligen die auffallendsten geworden sein. Damit sind bei der Voraussetzung einer Divergenz $= {}^5/_{13}$ die Möglichkeiten erschöpft. Hätte man jedoch ein Punktsystem mit einer Divergenz gleich der Limit-

divergenz der Hauptreihe $\left(\frac{1}{1+\chi} \cdot 360^0 = 137^0\ 30'\ 28''\right)$ vorausgesetzt, so könnten je nach dem Werte des Verhältnisses zwischen Längen- und Breitenwachstum die Koordinatzahlen der auffallendsten Spiralscharen durch je zwei aufeinander folgende Glieder dieser Reihe ausgedrückt werden.

Diese Regel läßt sich noch folgendermaßen erweitern:

Wird ein Punktsystem auf einer Kreiszylinderfläche dargestellt mit einer Divergenz $= \frac{1}{z+\chi} \cdot 360^0$, so werden die Koordinatzahlen der am meisten ins Auge fallenden Spiralscharen ausgedrückt durch zwei (oder drei) aufeinander folgende Glieder der Reihe 1, z.

Beweis. Bemerken wir zuerst, daß die am meisten ins Auge fallenden Spiralen diejenigen sind, auf denen die Punkte die geringste Entfernung von einander aufweisen.

Nehmen wir nun an, es würden die Koordinatzahlen der auffallendsten Spiralen ausgedrückt durch zwei Zahlen p, q, welche keine Glieder der Reihe 1, z sind. Es liegt dann die Zahl p zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern m und n dieser Reihe, sodaß $m < p < n$. Man sieht ein, daß in diesem Fall $\Delta_m < \Delta_p < \Delta_n$ sein muß.

Betrachten wir dann die drei Brüche: $\frac{\Delta_m}{m}$, $\frac{\Delta_p}{p}$, $\frac{\Delta_n}{n}$. Der erste und dritte stellen Annäherungsbrüche für den Limitwert: $\frac{1}{z+\chi}$ dar, der zweite kann als ein dazwischen eingeschobener Bruch betrachtet werden. Nun wird nach einer Eigenschaft der Kettenbrüche ein solcher Bruch (wenn $m < p < n$, $\Delta_m < \Delta_p < \Delta_n$ ist) eine geringere Annäherung an den Limitwert zeigen als die beiden Näherungsbrüche. Es muß also:

$$\text{Limitdivergenz } (\alpha) - \frac{\Delta_p}{p} \cdot 360^0 > \text{Limitdivergenz } (\alpha) - \frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0$$

sein. Es ist nun weiter nach Formel 1:

$$\delta_p = p\,\alpha - \Delta_p \cdot 360^0 \text{ und } \delta_m = m\,\alpha - \Delta_m \cdot 360^0$$

also:

$$\alpha - \frac{\Delta_p}{p} \cdot 360^0 = \frac{\delta_p}{p} \text{ und } \alpha - \frac{\Delta_m}{m} \cdot 360^0 = \frac{\delta_m}{m}$$

dann muß also:

$$\frac{\delta_p}{p} > \frac{\delta_m}{m}$$

sein, und da $m < p$ ist, muß

$$\delta_p > \delta_m$$

sein.

Nun kann die Entfernung l_p des Punktes o von einem Punkt p dargestellt werden durch:

$$l_p = \sqrt{\left(\frac{\delta_p}{360^0}\right)^2 + p^2 y^2}$$

wenn der Zylinderumfang gleich 1 und die Entfernung von Punkt 1 oberhalb der Linie $o - o$ gleich y gesetzt wird. Ebenso wird die Entfernung des Punktes o vom Punkt m:

$$l_m = \sqrt{\left(\frac{\delta_m}{360^0}\right)^2 + m^2 y^2}$$

Dann muß aber nach dem, was wir soeben gefunden haben:

$$l_p > l_m$$

sein. Es liegt also Punkt m dichter bei Punkt o als Punkt p, und es muß also die m-zeilige Spirale stärker ins Auge fallen als die p-zeilige.

Auf einfache Weise beweist man dann weiter, daß nach den m-zeiligen die n-zeiligen und dann die $(m+n)$-zeiligen Spiralen die auffallendsten sein müssen.

Aus dem Gesagten geht also hervor:

1. Die Reihe, aus welcher die Koordinatzahlen der am meisten ins Auge fallenden Spiralscharen zwei oder drei aufeinander folgende Glieder sind, wird bestimmt durch die Divergenz, welche die Ansatzstellen der Blätter aufweisen.

2. Diese Zahlen ändern sich bei Zu- oder Abnahme des Verhältnisses zwischen Längen- und Breitenwachstum.

Es stellen sich also die Beobachtungstatsachen, welche wir auf S. 195 unter 5 und 6 beschrieben haben, als die Folge jener heraus, welche wir dort unter 7 angaben. Wenn wir also letztere erklären können, so ist damit auch die Erklärung für die erstgenannten gegeben.

§ 2. Die Verschiebungen der Organe durch ihren gegenseitigen Druck. Bei der Frage nach Verschiebungen der seitlichen Organe durch ihren gegenseitigen Druck wollen wir hier kurz sein. Bekanntlich ist hierüber ein heftiger Streit zwischen SCHWENDENER[1]) und LEISERING[2]) einerseits und DE CANDOLLE[3]), SCHUMANN[4]), JOST[5]) anderseits geführt worden. Wie schon öfter gesagt, liegt für uns die Hauptfrage der Blattstellungslehre in der Anlegung neuer Organe am Scheitel und sind die nachträglichen Änderungen in der Blattstellung von geringer Bedeutung. Dennoch will ich nicht unterlassen, im Folgenden die Stellung, welche ich der genannten Streitfrage gegenüber einnehme, kurz anzugeben.

---

1) Über die Verschiebungen seitlicher Organe durch ihren gegenseitigen Druck. Basel 1875. — Mechanische Theorie der Blattstellungen 1878. — Zur Theorie der Blattstellungen. Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1883, S. 741—773. — Die SCHUMANNschen Einwände gegen meine Theorie der Blattstellungen. Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1899, S. 895—919. — Die Divergenzänderungen an den Blütenköpfen der Sonnenblume im Verlaufe ihrer Entwicklung. Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1900, S. 1042—1060. — Die neuesten Einwände JOSTS gegen meine Blattstellungstheorie. Berichte d. deutschen botan. Gesellsch. 1902, Bd. XX, S. 249—267.

2) Die Verschiebungen an Helianthusköpfen im Verlaufe ihrer Entwickelung vom Aufblühen bis zur Reife. Flora, Jahrg. 1902, Bd. 90, S. 378—432. — Zur Frage nach den Verschiebungen an Helianthusköpfen. Berichte d. deutschen botan. Gesellsch. 1902, Bd. XX, S. 613—624.

3) Considérations sur la phyllotaxie. Arch. des sciences phys. et nat. 1881, T. V (und Genève 1881.) — Nouvelles considérations sur la phyllotaxie. Arch. des sc. phys. et nat. 1895, T. 33, S. 122—147.

4) Morphologische Studien. I. Die Blattstellungen in gewundenen Zeilen. 1892, Heft I, S. 1—104. — VI. Die Verschiebungen der Organe an wachsenden Sprossen. 1899, Heft II, S. 238—313.

5) Die Theorie der Verschiebung seitlicher Organe durch ihren gegenseitigen Druck. Botanische Zeitung, 1899, Jahrg. 57, Abt. I, S. 193. — Die Theorie der Verschiebung etc. 2. Abhandlung. Botanische Zeitung, 1902, Jahrg. 60, Abt. I, S. 21—43. — Zu SCHWENDENERS Antwort auf meine Einwände gegen die mechanische Blattstellungstheorie. Botanische Zeitung, 1902, Jahrg. 60, Abt. II, S. 225—228. — Man siehe auch JOSTS Referat über LEISERING: Die Verschiebungen an Helianthusköpfen etc. Botanische Zeitung, 1902, Jahrg. 60, Abt. II, S. 228—231.

Betrachtet man verschiedene „korrespondierende Querschnittsformen" in aufeinander folgenden Stadien ihrer Entwicklung, so wird man in vielen Fällen ohne Zweifel Kontaktwechsel wahrnehmen. Wir haben z. B. an dem Scheitel von *Cephalotaxis drupacea* nachgewiesen (vgl. S. 218), daß die oberen Teile der älteren Blätter andere Kontakte aufweisen als die jungen Anlagen, obwohl sie ursprünglich mit denselben angelegt wurden. Und diese Erscheinung ist in der Knospe eine sehr allgemeine. Wir werden später aber den Beweis erbringen, daß auch die Ansatzstellen der seitlichen Sprossungen im ausgewachsenen Zustand andere Kontakte aufweisen können als bei ihrer Anlegung.

Muß man nun aber diese beiden Arten Kontaktwechsel auch notwendig aus „Verschiebung der Organe durch ihren gegenseitigen Druck" erklären? Bei den freien Enden der seitlichen Sprossungen kann diese Erklärungsweise sicherlich Anwendung finden, denn da sind alle Bedingungen erfüllt, welche Verschiebungen im Sinne der SCHWENDENERschen Theorie möglich machen [1]). Für die Annahme von Verschiebungen der „Ansatzstellen" durch ihren gegenseitigen Druck aber liegen nach meiner Meinung keine Gründe vor. Soweit die ausgewachsenen Organe eine andere „Divergenz" zeigen als die jungen Anlagen, läßt sich das aus anderen Umständen erklären, welche in diesem Kapitel noch näher besprochen werden. Die Änderungen der „Kontakte" zwischen den Ansatzstellen findet ebenfalls ihre Erklärung ohne die Annahme solcher Verschiebungen, wie im folgenden Kapitel klargelegt wird. Hier sei schon bemerkt, daß dieselben dadurch bedingt werden, daß die ausgewachsenen Organe einen relativ breiteren oder schmäleren Teil des Stengelumfanges einnehmen als die jungen Anlagen, also durch ungleiches Wachstum von Blattbasis und Stengel. Nun ist das zwar gewiß ein Umstand, welcher zu Verschiebungen im Sinne SCHWENDENERS Veranlassung geben könnte, allein für die Verwirklichung solcher Verschiebungen ist es nötig, daß noch einer anderen Bedingung genügt wird: Die Ansatzstellen der seitlichen Organe müssen eine gewisse Festigkeit besitzen, so daß sie aufeinander einen bestimmten Druck ausüben können, und sie müssen durch einen solchen Druck aktiv verschiebbar sein. Diese Bedingung nun ist für die Ansatzstellen nicht erfüllt.

§ 3. Die Rectipetalität. Schon NÄGELI [2]) hat darauf hingewiesen, daß die Blattstellung am Scheitel von derjenigen am ausgewachsenen Stengel verschieden sein kann. Er unterscheidet nämlich drei verschiedene Arten (oder Stadien) der Blattstellung: „Die erste kommt an dem entwickelten Stengel vor, die zweite in der Knospe, sobald die Blätter sichtbar werden; die dritte berücksichtigt die Punkte, welche diese bei der allerersten, der Beobachtung unzugänglichen Anlegung eingehalten haben mögen." Übrigens hat NÄGELI die Differenz, welche zwischen diesen Stellungen besteht, nicht genau angegeben.

Ausführlich behandelt HOFMEISTER [3]) diese Frage und bemerkt, daß in vielen Fällen, in welchen die Blätter am Scheitel eine

1) Ich kann mich dann auch nicht mit JOST einverstanden erklären, wenn dieser Forscher die Meinung ausspricht, daß man für die Erklärung der Verschiebungen der freien Enden seitlicher Organe keiner Theorie bedürfe.

2) Beiträge zur wissensch. Botanik I, p. 40.

3) Allgemeine Morphologie der Gewächse. Leipzig 1868, p. 454 u. f.

deutlich spiralige Stellung aufweisen und eine Divergenz besitzen, welche am besten durch einen irrationalen Grenzwert ausgedrückt wird, an den zugehörigen ausgewachsenen Stengeln solche Stellungen vorherrschen, die ziemlich genau vertikale Reihen zeigen und die sich durch einfache Bruchteile ausdrücken lassen. Dieser Botaniker meint aber, daß die angegebene Differenz nur scheinbar ist und daß dieser Schein dadurch hervorgerufen wird, daß durch die Streckung der Internodien eine geringe Krümmung der Schraubenlinien viel weniger ins Auge fällt als an dem Scheitel, wo die Organe dicht aneinander gedrängt stehen.

Sicherlich ist diese Erklärung von HOFMEISTER in vielen Fällen ganz richtig, aber das mindert nicht, daß manchmal die Differenz in der Stellung am Scheitel und am Stengel so deutlich wahrnehmbar ist, daß sie nicht mehr als scheinbar bezeichnet werden kann und unmöglich einer weniger genauen Wahrnehmung zuzuschreiben ist. Wenn z. B. am Scheitel von *Ribes sanguineum* eine Divergenz gefunden wird, welche dem Grenzwert 137°30'28" sehr nahe kommt, so daß auch die 5-zeilige Spirale deutlich gewunden erscheint, und man nimmt am Stengel mit ziemlich großer Genauigkeit eine Divergenz von 144° wahr, so daß in mehreren aufeinander folgenden Cyclen die Blätter in 5 Orthostichen zu ordnen sind, dann läßt sich hier an einer Divergenzänderung nicht mehr zweifeln. Dasselbe gilt auch z. B. für *Lupinus arboreus* und *Alnus glutinosa*, welche beide am Scheitel eine Divergenz anlegen, welche 137°,5 nahekommt und am Strengel öfters ziemlich genau die Stellung $^1/_3$ verwirklichen.

In vielen Fällen nimmt man auch an dem unteren Teil der Stengel eine Stellung wahr, die sich durch eine einfachere Divergenz ausdrücken läßt als die Stellung am oberen Teil. So zeigen *Aster brumalis* und *Aster niveus* unten am Stengel ziemlich genau die Stellung $^2/_5$, während sie höher eine Blattstellung aufweisen, die besser durch $^3/_8$ oder $^5/_{13}$ ausgedrückt werden kann.

Solche Beispiele sind von großem Interesse, erstens weil sie uns lehren, daß man die einfachen Blattstellungen nicht aufzufassen hat als wären sie bloß besondere Fälle der unendlichen Reihe verschiedener Möglichkeiten, zweitens weil daraus hervorgeht, daß diesen Stellungen eine besondere Ursache zu grunde liegt.

Ferner geben sie die Erklärung der Tatsache, daß SCHIMPER und BRAUN, sowie NAUMANN[1]) die einfachen Divergenzen als Ausgangspunkt ihrer Betrachtungen wählten. Diese Forscher haben nämlich ihre Wahrnehmungen besonders an ausgewachsenen Pflanzen gemacht.

Fragen wir uns nun, welches die Erklärung für die angegebene Erscheinung sein kann. Zuerst wollen wir mitteilen, welche Ursache DELPINO als eine der wichtigsten angibt, warum die seitlichen Organe, welche nach seiner Theorie mit der Divergenz der Kugelsäule, d. i. 131°48'37" angelegt werden, an dem ausgewachsenen Stengel einfache Stellungen aufweisen können[2]).

„Una di queste e la più generale è il senso della assilità, che non può essere logicamente negato alle piante superiori. Per che

1) Über den Quincunx als Grundgesetz der Blattstellung vieler Pflanzen. Dresden und Leipzig, 1845.

2) Teoria generale della Fillotassi, Genova, 1883, p. 134.

modo l'abete si construisce un fusto lungo 50 metri tanto mirabilmente rettilineo? Si dice che la forza di gravitazione n'è la causa. Baie! I rami laterali sono rettilinei non meno del prinzipale, salvo une lievissima curvatura alle base valevole a conferire maggior solidità. È al senso dell' assilità che è dovuta la rettilineità dei fusti, dei rami, dei vimini, delle canne, il distendimento longitudinale rettilineo dei fasci fribroso-vascolari, delle coste, delle strie, delle ale nei cauli costati, striati, alati.

È chiaro che quando si sviluppano nell' interno degli assi le corde fibroso-vascolari e all' esterno le decorrenze, tra una data foglia di un dato ciclo fillotassico e la foglia omologa del sottostante ciclo, queste corde e queste decorrenze, se la fillotassi è curviseriata, non possono correre parallele all' asse. È giuocoforza che siano a bella prima curvilinee. Di qui ha origine una lotta tra esse e il tessuto parenchimatico fondamentale; lotta tendente a rettiseriare, cioé a rendere paralleli all' asse, i fasci fibroso-vascolari, le decorrenze fogliari, e conseguentemente a rettiseriare le foglie omologhe dei cicli fillotassici. Questa lotta che può sviluppare tensione fortissime dura fin che è in vigore il processo incrementale estinguendosi affato col cessare dell' incremento medesimo."

Nun werden wir später die Gründe angeben, warum wir uns nicht mit der Theorie von DELPINO einverstanden erklären können, aber dennoch muß zugegeben werden, daß in der oben zitierten Betrachtung richtige Ideen entwickelt sind, welche die Änderung der Blattstellung bei der Entwicklung der seitlichen Organe erklären können. Von anderer Seite haben diese Annahmen eine wichtige Stütze erhalten.

Bei der Widerlegung der Einwände, welche C. DE CANDOLLE gegen seine Theorie gemacht hat, spricht SCHWENDENER[1]) in demselben Jahre, in dem die Theorie von DELPINO erschien, Folgendes aus:

„Es erübrigt jetzt noch den Einwand zu berücksichtigen, warum denn die Divergenzen $^1/_3$, $^2/_5$, $^3/_8$, die nach meiner Darlegung nur unter bestimmten einschränkenden Bedingungen möglich sind, in der Natur so häufig vorkommen. Hierauf ist zunächst zu erwidern, daß Blattstellungen, welche mit ausgeprägter Kantenbildung am Stengel verknüpft sind (*Cyperaceen,* drei- oder mehrkantige Cacteen u. dgl. m.), einen besonderen Fall bilden, in welchem die Kantenbildung einen unverkennbaren Einfluß ausübt." Und weiter: „Bezüglich der Stellungen $^2/_5$ und $^3/_8$, welche ohne Kantenbildung zu stande kommen, darf nicht übersehen werden, daß sich die aufgeführten Beispiele größtenteils auf Laubsprosse beziehen, an denen voraussichtlich die Grundspirale und die Zweierzeile die vor der Streckung wirksam gewesenen Kontaktlinien darstellen. Unter diese Voraussetzung fallen beiden Stellungen in den obersten Verschiebungsbogen unsere Zickzacklinien und sind daher theoretisch möglich. Daß aber die gegebenen Divergenzen wirklich genau $^2/_5$ oder $^3/_8$ betragen, läßt sich in den wenigsten Fällen beweisen. Streng genommen kann nur von einer Annäherung an diese einfachen Brüche durch nachträgliche Drehung die Rede sein; eine

1) Zur Theorie der Blattstellungen. Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akad. der Wissensch. zu Berlin, 1883, S. 741.

solche findet allerdings unzweifelhaft statt, da die Endknospe bekanntlich stets höhere Divergenzen aufweist; mir ist aber nicht bekannt, in welches Stadium der Entwicklung sie fällt. Es wäre ja denkbar, daß dergleichen Drehungen erst ziemlich spät durch die widerstandsfähigen Elemente der Blattspuren und der begleitenden Kollenchymstränge bewirkt würden, indem die in der Längsrichtung zusammenhängenden Strangsympodien sich infolge der Zugspannung, der sie jedenfalls ausgesetzt sind, möglichst longitudinal stellten, in ähnlicher Weise also, wie ich es oben für die vorspringenden Rippen angedeutet habe."

Für uns sind hier die Betrachtungen über die Blattstellung der *Cacteen* und *Cyperaceen* weniger von Bedeutung; die Besprechung dieser abweichenden Fälle muß einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Desto mehr interessiert uns hier die Meinung SCHWENDENERS über die Blattstellungen $^2/_5$, $^3/_8$, welche an Stengeln ohne starke Kantenbildung verwirklicht werden. Man sieht daraus, daß auch dieser Forscher für diese Fälle über die Änderung der Blattstellung Ideen ausspricht, welche mit denjenigen von DELPINO große Übereinstimmung zeigen.

PAUL TEITZ[1]) hat darauf für einige wichtige Fälle nachgewiesen, daß „die Gedanken und Vermutungen SCHWENDENERS bezüglich der nachträglichen Entstehung einiger niederer Blattdivergenzen durchaus mit dem natürlichen Tatbestand übereinstimmen". Ausgangspunkt für seine Untersuchungen bildet die Wahrnehmung von NÄGELI[2]), daß in jungen Stengelteilen, welche noch keine Streckung durch Längenwachstum aufweisen, die Gefäßbündelstränge tangential schief verlaufen und zwar so, daß in den aufeinander folgenden Knoten die Abweichung von der Vertikalen in derselben Richtung stattfindet, sodaß ein spiraliger Verlauf entsteht.

Bedenkt man nun, daß in den verschiedenen Gewebepartien, durch welche die Stränge hindurch gehen, eine Differenz der Festigkeit bestehen muß, indem der untere Teil älter und fester, der obere Teil jung und weich ist, so muß notwendigerweise bei der Längsstreckung in den Strängen ein Zug auftreten und weil dieser tangential schief gerichtet ist, muß er zerlegbar sein in eine horizontale und eine vertikale Komponente. Weil dann in allen Strängen eine solche horizontale Kraft wirkt, so muß der Stengel eine Tortion erleiden, welche so lange anhalten wird, bis die Stränge vertikal gestellt sind. Zu gleicher Zeit müssen dann aber die Blätter, welche durch die Blattspuren mit den Strängen verbunden sind, ihre Stellung ein wenig geändert haben und solche, welche mit demselben Strang verbunden sind, müssen vertikal übereinander gestellt werden.

Bei *Ribes nigrum, Ribes Grossularia* und *Salix pentandra* fand TEITZ an dem Sproßscheitel eine Divergenz, welche dem Grenzwert der Hauptreihe sehr nahe kam, während er in einiger Entfernung des Vegetationspunktes eine Annäherung an die Stellung $^2/_5$ beobachtete, eine Stellung, die an noch niederen Teilen des Stengels

1) Über definitive Fixierung der Blattstellung durch die Torsionswirkung der Leitstränge. Flora, 71. Jahrgang, 1888, S. 419—439.

2) Beiträge zur wiss. Bot. I, S. 43.

vollkommen verwirklicht wird. Bei *Linum usitassimum* und *Euphorbia pilosa*, welche ebenfalls am Scheitel ziemlich genau den Grenzwert zeigten, fand er nach Entfaltung der Knospe die Blattstellung $^3/_8$. Nun hat TEITZ nachgewiesen, daß sich diese Änderungen wirklich durch die soeben beschriebenen Umstände erklären ließen. Bei den erstgenannten Arten waren die medianen Blattspuren zu 5 Fibrovasalsträngen vereinigt, sodaß dadurch eine Verbindung bestand zwischen den Blättern 0, 5, 10, 15 usw., 1, 6, 11, 16 usw. Bei den beiden anderen Arten dagegen zeigte der Stengel 8 Stränge. Dadurch waren also die Blätter auf den 8-reihigen Spiralen mit einander verbunden. Durch Anfertigung eines Markierschnittes konnte nun TEITZ den Beweis erbringen, daß die ursprünglich tangential schief verlaufenden Stränge in demselben Moment ihre vertikale Lage annahmen, als die Divergenz die einfachen Stellungen $^2/_5$ oder $^3/_8$ erreicht hatte.

Daß die gleiche Erklärungsweise auch bei dem Auftreten der einfachen Stellungen $^2/_7$ und $^2/_9$ gilt, konnte dieser Forscher bei *Sedum reflexum* beweisen, welche Art am Scheitel Kontakte aus der Nebenreihe 1, 3, 4, 7 usw. oder aus der Nebenreihe 1, 4, 5 usw. aufweist, während dabei die Divergenz eine große Annäherung an die Limitwerte dieser Reihen zeigt, d. h. an $99^0 30' 5''$ oder $77^0 57' 19''$.

Daß die hierbei wahrgenommenen Divergenzänderungen nicht durch „Dachstuhlverschiebungen" im Sinne SCHWENDENERs erklärbar sind, betrachtet TEITZ deshalb als feststehend, weil an der Stelle, an der die Änderungen der Divergenz merkbar werden, kein Kontakt zwischen den Blättern mehr wahrnehmbar war. Nun werden wir im folgenden Kapitel nachweisen, daß z. B. bei *Ribes nigrum* der Kontakt zwischen den (ursprünglichen) „Ansatzstellen" sicher bestehen bleibt, aber dieser Umstand hat, wie wir bereits oben bemerkt haben, auf die Divergenzänderung keinen Einfluß; für die letzte Erscheinung gibt TEITZ ohne Zweifel die richtige Erklärung.

Es will mir scheinen, daß die TEITZschen Beobachtungen mehr Beachtung verdienen, als ihnen meistens geschenkt wird, denn nach meiner Erfahrung sind die nachträglichen Änderungen der Divergenz eine sehr allgemeine Erscheinung. Eine umfassendere Arbeit über diesen Gegenstand wäre deshalb sehr wünschenswert, besonders auch darum, weil TEITZ die Blattstellung $^1/_3$ nicht berücksichtigt hat, soweit diese Stellung an Stengeln auftritt, welche am Scheitel die Limitdivergenz zeigen *(Alnus glutinosa, Lupinus arboreus)*.

Weil wir nun in der Kraft, welche das Wachstum in der Längsrichtung hervorruft, die Ursache kennen gelernt haben, welche den Übergang der komplizierten Stellungen in die einfachen bedingt, so werden wir diese Divergenzänderungen weiter als solche bezeichnen, die durch die Rectipetalität hervorgerufen werden[1]).

---

1) Der Ausdruck „Rectipetalität" stammt von VÖCHTING (Bewegungen der Blüten und Früchte, 1881), von PFEFFER (Lehrbuch der Pflanzenphysiologie, 2. Aufl., 1904, Bd. II, S. 595) ist dafür auch der Name Autoorthotropismus vorgeschlagen worden.

Kapitel IV. Zeichnung und Form des reifen Stengels.

§ 1. Die Sproßgliedlehre. Wie wir im vorigen Kapitel einer Frage begegnet sind, über die ein heftiger Kampf geführt worden ist, so sollen auch hier zuerst einige Fragen behandelt werden, über welche die Meinungen sehr geteilt sind. Als erste möge die sogenannte „Sproßgliedlehre" kurz erläutert werden.

Nach der Auffassung von DELPINO gibt das Experiment des Aufbaus seiner Kugelsäule nicht nur die Antwort auf die Frage, wie die Anlegung neuer Blätter geschieht, aber es beweist auch, daß man den Stengel nicht als selbständiges Organ auffassen darf, sondern als aus Blatteilen aufgebaut. Sehr scharf drückt er diese Meinung auf S. 174 seiner Teoria Generale mit diesen Worten aus: „La conseguenza di maggior momento la quale deriva dalla teoria meccanica fondata sull' esperimento della pila sferotassica, consiste nell' affermazione che le foglie, ben lungi di essere organi laterali ed appendicolari rispetto all' asse foglifero, sono organi centrali ed apicali, coaliti nella loro regione basale in un pseudoasse o fillopodio. Il considetto sistema assile o caulino non è altro che un aggregato di fillopodii."

Obwohl allerdings die Theorie, welche DELPINO zu diesen Schlußfolgerungen führte, originell genannt werden muß, so sind doch andere Forscher vor ihm zu demselben Resultat gelangt, das DELPINO auch mit diesen Worten ausdrückt: „picciuolo e lembo e relativa decorrenza assile siano regioni diverse d'uno stesso organo". DELPINO selbst verweist schon auf GAUDICHAUD, welcher bereits im Jahre 1841 diese Meinung vertreten hat; auch andere Namen könnten hinzugefügt werden, aber die Beweisführung seiner Vorgänger ist von viel geringerer Bedeutung und wir können uns deshalb mit der Besprechung der DELPINOschen Auffassung begnügen.

Auch in einer später erschienenen Arbeit[1]) hat dieser Forscher seine Theorie näher begründet und für das selbständige Organ, das sich in „Phyllomen" und „Phyllopodium" differenzieren kann, den Namen „Meritallium" eingeführt. Wir wollen uns hier nicht in seine weiteren Betrachtungen vertiefen und nur noch darauf hinweisen, daß von HUGO DE VRIES[2]) einige interessante Tatsachen angeführt worden sind, welche für die Selbständigkeit der Meritallien sprechen.

In neuerer Zeit ist diese Auffassung besonders durch CELAKOVSKY[3]) verteidigt worden, welcher für den Ausdruck „Meritallium" den Namen „Sproßglied" einführte und die Einheit von Blatt und Stengelteil auch unabhängig von der Blattstellungstheorie von DELPINO darzulegen versuchte.

Ohne Zweifel kann man die Frage nach der Selbständigkeit des Stengels unabhängig von der nach der Anlegung neuer Blätter stellen, aber sobald man zu erklären versucht, wie sich neue Sproß-

---

1) Pensieri sulla metamorfosi e sulla idiomorfosi presso le piante vascolaire. Memorie della R. Academia della scienze dell' Instituto di Bologna. Serie V, Tom III, 1892.

2) Over verdubbeling van Phyllopodien. (Avec un résumé en langue française). Botanisch Jaarboek uitgegeven door het Kruidk. genootschap „Dodonaea" te Gent. 5e Jaarg., 1893, blz. 108—129.

3) Die Gliederung der Kaulome. Bot. Zeit., I. Abteilung, 59. Jahrg., 1901, S. 79—114.

glieder zu den alten hinzufügen, wird man doch notwendigerweise auf das Blattstellungsproblem zurückgeführt. Bei DELPINO geschieht die Anlegung der neuen Meritallien durch Teilung des höchstgelegenen, eine Auffassung, die durch die Teilungsvorgänge in der Scheitelzelle bei den Blattmoosen gestützt wird. CELAKOVSKY spricht sich über diese Frage nicht klar aus, und in dieser Hinsicht sind seine Betrachtungen gar nicht befriedigend.

Wir haben bereits bei unseren mathematischen Betrachtungen klargelegt, daß die Theorie von DELPINO bereits darum keinen richtigen Ausdruck für die Anlegung der Blätter geben kann, weil dieser Forscher von der falschen Annahme ausgegangen ist, daß seine Säule die einzige stabile, zylindrische sei, welche sich in regelmäßiger Weise mit Kugeln aufbauen lasse. Es hat sich herausgestellt, daß sie nur eine der vielen möglichen ist. Man könnte sich nun die Frage vorlegen, ob es dann nicht möglich ist, die Theorie von DELPINO insofern umzuarbeiten, daß zwar der Gedanke: der Stamm sei aus kugelförmigen Organen aufgebaut, beibehalten wird, daß aber für verschiedene Pflanzen auch ein Aufbau nach verschiedenen Kugelsäulen als möglich angenommen wird. Dabei würde man dann am Scheitel eine Anordnung wie in den kegelförmigen Kugelsäulen annehmen müssen, und könnte so die Blattstellungstheorie ganz in Übereinstimmung mit der Sproßgliedlehre bringen.

Dennoch würde nach meiner Meinung eine Durchführung dieser Auffassung große Schwierigkeiten bereiten. So haben wir schon darauf aufmerksam gemacht, daß die Kugelsäule von DELPINO eine Hohlachse von geringem Durchmesser besitzt, deren Vorhandensein sich dieser Forscher nicht bewußt war. Bei den höheren Kugelsäulen hat diese einen größeren Durchmesser. Wie aber läßt sich die Ausfüllung derselben mit der Sproßgliedlehre in Zusammenhang bringen? Auch abgesehen von dieser Schwierigkeit, lassen sich noch andere Gründe angeben, welche gegen eine solche Theorie sprechen. Will man nämlich die Stellungsverhältnisse am Scheitel mit zylindrischen oder kegelförmigen Kugelsäulen vergleichen, so muß man die Anwesenheit von Körpern voraussetzen, welche eine kugelförmige Gestalt besitzen. Nun sind die jungen Anlagen sicher nicht mit solchen Körpern zu vergleichen, und man muß letztere also als hypothetische annehmen. Doch wird man zugeben, daß eine solche, nicht durch die Wahrnehmung kontrollierbare Annahme, möglichst zu vermeiden ist und daß sicherlich eine Theorie, die Beobachtungstatsachen als Ausgangspunkt nimmt, den Vorzug verdient.

Sind nun aber die Argumente, welche die Anhänger der „Sproßgliedlehre“ anführen, so überzeugend, daß man dadurch zu der Annahme einer absoluten Selbständigkeit von Meritallien gezwungen wird? Meines Erachtens ist das gar nicht der Fall, man wird durch ihre Beweisgründe nur von einem gewissen „Zusammenhang“ zwischen Blatt und Stengelzone überzeugt. Dagegen ist auch bei der Annahme der oben entwickelten Theorie der Blattstellung nichts einzuwenden. Man kann sich nämlich vorstellen, daß die regelmäßige Anordnung der jungen Anlagen mit einer regelmäßigen Verteilung der Saftströmung zusammenhängt. Bleibt eine solche Differenzierung dieser Strömung auch noch bei den älteren Stengeln vorhanden, so würde das schon

eine Beziehung zwischen Blättern und gewissen Stengelteilen herstellen.

§ 2. Verschiedene Anschauungen über die Berindung des Stengels durch die Blattbasen und die Zeichnung desselben. In enger Beziehung zu der Frage nach dem Aufbau des Stengels aus Sproßgliedern steht die nach der Berindung desselben durch die Blattbasen. Auch hierüber sind die Meinungen geteilt.

Nach HOFMEISTER[1]) breitet sich das Blatt kurz nach der Anlegung in allen Richtungen schneller aus als die Stengelzone, auf die es eingepflanzt ist. „Das Dickenwachstum des Blattgrundes ist meist so beträchtlich, daß es an seiner, der Stengelspitze abgewendeten Rückenfläche dem Achsenumfang immer neue Gewebschichten auflagert und so den Stengel berindet." Speziell bei *Chara* sollte diese „Berindung" sehr überzeugend zu stande kommen, aber auch sonst sollte sie eine ganz allgemeine Erscheinung sein.

Unabhängig von HOFMEISTER ist auch H. POTONIÉ[2]) zu der Auffassung einer Berindung gekommen und er stützte sich dabei besonders auf paläontologische Wahrnehmungen. Der Stamm, das „Urkaulom", sollte nach seiner Meinung bei der phylogenetischen Entwicklung durch die Blattbasen überdeckt worden sein.

Verschiedene Forscher haben sich ganz oder in bestimmten Fällen dieser Auffassung angeschlossen, wir nennen nur LEITGEB, GOEBEL, VAN TIEGHEM, JOST und CELAKOVSKY.

Besonders der letztgenannte Forscher[3]) hat die Berindungshypothese warm verteidigt und er hat sich dabei auf denselben Standpunkt wie HOFMEISTER gestellt. Auch er weist darauf hin, daß die Blätter in ausgewachsenem Zustand öfters einen viel beträchtlicheren Teil des Stengels umfassen als bei ihrer Anlegung, was besonders bei den Blättern mit Scheidenbildung sehr deutlich wahrnehmbar ist. Wenn nun die schnellere Ausbreitung nach der Richtung der Breite hin besteht, so ist es nach CELAKOVSKY auch wahrscheinlich, daß sie ebenfalls in der Längsrichtung stattfindet, und daß dadurch bald gar keine freie Stammoberfläche mehr vorhanden sein kann. Er nimmt dabei an, daß diese Ausbreitung nicht in einer „Überschichtung" besteht, sondern daß das Gewebe, das erst die Stengeloberfläche bildete, nachher in Blattgewebe übergehen kann. Obwohl nun CELAKOVSKY diese Berindung als die normale Erscheinung betrachtet, so nimmt er doch bei den *Abietineen* einen gemischten Ursprung der Stammoberfläche an, indem er die oberen Teile der „Blattkissen" als „Blattbasen", die unteren dagegen als freie Stammoberfläche betrachtet. Auch hält er die Möglichkeit nicht für ausgeschlossen, daß bei gewissen Pflanzen (z. B. den Kakteen) gar keine Berindung zustande kommt.

Der beschriebenen Auffassungsweise steht die gegenüber, bei welcher man annimmt, daß die freie Oberfläche des Stammes in den Internodien ausschließlich von der Stammoberfläche herrührt, welche sich am Scheitel zwischen den jungen Anlagen befindet.

1) Allgemeine Morphologie, 1868, § 13, Blattentwicklung, S. 520.

2) Die Metamorphose der Pflanzen im Lichte paläontologischer Tatsachen, 1898. — Lehrbuch der Pflanzenpaläontologie 1899, S. 245.

3) Berichte d. deutsch. botan. Gesellsch. 1900. — Die Gliederung der Kaulome, Bot. Zeit 1901, I. Abt., 59. Jahrg., S. 79—114. — Die Berindung des Stengels durch die Blattbasen, Flora, 90. Band, Jahrg. 1902, S. 433—465.

Dabei wird also angenommen, daß die am Scheitel vorhandenen Kontakte durch das Wachstum des Stammgewebes aufgehoben werden, und daß die Ansatzstellen der Blattstiele mit denen der jungen Anlagen übereinstimmen. Diese Auffassung ist besonders von FR. TOBLER[1]) verteidigt worden. Nach meiner Meinung sind die Beweisführungen dieses Forschers nicht überzeugend und zum Teil auch durch CELAKOVSKY in der zuletzt zitierten Abhandlung widerlegt.

Von Interesse in den Darlegungen von TOBLER scheinen mir besonders seine Wahrnehmungen über die Anlegung der Stammflügel, zu Lappen gewordenen Anhängen am Internodium, zu sein, welche bei den sogenannten „folia decurrentia" angetroffen werden. In der sogenannten „Zeichnung des Stengels" liegt nämlich ein kräftiges Argument für die Berindungshypothese, und das ist besonders der Fall, wenn die Blätter, wie bei den „folia decurrentia", scheinbar mit dem Stengel verwachsen sind. Nun hat TOBLER nachgewiesen, daß bei *Cirsium palustre* die Anlegung der Flügel erst in den Internodien zwischen bereits ziemlich alten Blättern stattfindet und dabei nicht etwa von den Rändern abwärts, sondern daß sie mit einer selbständigen Hervorwölbung auf der Epidermis des Internodiums beginnt. Die Flügel schließen sich erst nachher an die Blattränder an, während in anderen Fällen (z. B. *Genista sagittalis*) dieser Anschluß nicht erreicht wird, obwohl auch dabei die Blattränder die Verlängerung der Flügel bilden. TOBLER meint darum, daß die Anlegung der Flügel einen Vorgang darstellt, der unabhängig von dem Wachstum des Blattes am Internodium verläuft, und glaubt die Stellung dieser Flügel mit dem Leitbündelverlauf in Zusammenhang bringen zu müssen.

Nun sind diese Wahrnehmungen von TOBLER sicherlich von Bedeutung, weil daraus folgt, daß man die Stammflügel nicht als vollkommen identisch mit den Blatträndern auffassen darf, aber wir werden bald sehen, daß wir dennoch die Zeichnung der Stengeloberfläche als einen wichtigen Hinweis auf die Berindung auffassen können. Bevor wir aber dazu übergehen, unsere eigenen Anschauungen über diese Frage zu erläutern, möge hier noch auf einige ältere Arbeiten hingewiesen werden, in welchen die Zeichnung und Form des Stammes auch abgesehen von der Berindungsfrage behandelt wird.

Schon im Jahre 1848 hat CAGNAT[2]) auf die Beziehungen aufmerksam gemacht, welche zwischen der Blattstellung und der Form des Stengels bestehen. Viel bedeutender sind aber die Arbeiten, welche WIESNER[3]) über diesen Gegenstand veröffentlicht hat; sie enthalten zahlreiche wichtige Beobachtungen. Dennoch

---

1) Der Ursprung des peripherischen Stammgewebes. PRINGSHEIMS Jahrbücher für wissensch. Botanik, 37. Band, 1902, S. 99—136.

2) Des Rapports qui existent entre la disposition des feuilles, la forme des axes végétaux et celle de la moelle. Ann. d. Sc. nat. 3ième Série, Botanique, T. IX, 1848, p. 362—382.

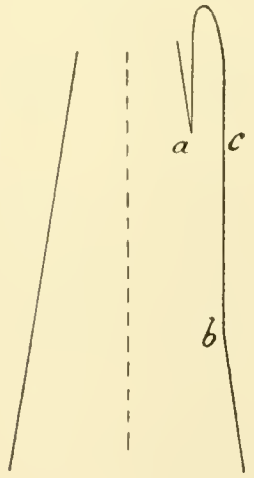
3) Untersuchungen über die Lage der charakteristischen Riefen an den Axenorganen der Pflanzen. Sitzungsber. d. Wiener Akad., Bd. 37, 1859, S. 704. — Die Gesetze der Riefenteilung an den Pflanzenaxen. Ebenda, Bd. 38, 1860, S. 31. — Beobachtungen über Stellungsverhältnisse der Nebenblätter. Ebenda, Bd. 42, 1861, S. 417. — Die Blattbögen und ihre Berechnung. Ebenda, II. Abt., Bd. 43, 1861, S. 457. — Vorläufige Mitteilung über die Lage der Blattbasen. Ebenda, II. Abt., Bd. 45, 1862, S. 23.

würde es uns zu weit führen, hier klarzulegen, in welcher Hinsicht diese Wahrnehmungen nach meiner Meinung für unsere Betrachtungen wichtig sind, nur einzelne Punkte werden wir im Folgenden noch näher zu besprechen haben.

Interessant ist auch die Meinung, welche DELPINO bezüglich der Zeichnung und Form der Achsenorgane vertritt[1]), denn daraus geht hervor, daß dieser Forscher sich einer Unvollkommenheit seiner Theorie bewußt gewesen zu sein scheint. Er fängt nämlich an, darauf hinzuweisen, daß bei solchen Blattstellungen, welche unmittelbar aus seiner Kugelsäule hervorgehen können (z. B. $^1/_3$ und $^2/_5$), das Gewebe, welches die Zeichnung bildet, betrachtet werden kann als „parte integrante della foglia". Aber dann fährt er mit diesen Worten fort: „la tesi non è applicabile tutta volta che il numero delle parastiche verticali o subverticali supera la cifra 5 (oppure le cifre 6, 7, nei casi di sdoppiamento di righe)". Diese Überlegung führt ihn zu der Schlußfolgerung: „Andunque conviene considerare le decorrenze come una formazione indipendente dalle foglie con cui sono in corrispondenza", d. h. also zu einer Auffassung, welche später von TOBLER aus ganz anderen Gründen vertreten wurde. Hätte DELPINO die Möglichkeit von anderen Kugelsäulen als die seinige vermutet, dann würde ohne Zweifel seine Ansicht über die Zeichnung eine andere gewesen sein.

§ 3. Theoretische Betrachtungen über die Berindung und die Zeichnung des Stengels. Die Meinung CELAKOVSKYS, es würden sich die Blattbasen in der Regel schneller ausbreiten als die Stammoberfläche, gibt nicht die richtigen Verhältnisse wieder. Öfters nämlich ist die relative Breite der Blattbasen im ausgewachsenen Zustand dieselbe wie bei der Anlegung; in anderen Fällen ist sie sogar bedeutend geringer als am Scheitel. Bei unseren theoretischen Betrachtungen wollen wir deshalb den Fall voraussetzen, bei dem die Breite dieselbe bleibt, um erst später die Fälle näher ins Auge zu fassen, bei welchen sich diese Breite im Laufe der Entwicklung ändert.

Fig. 55.

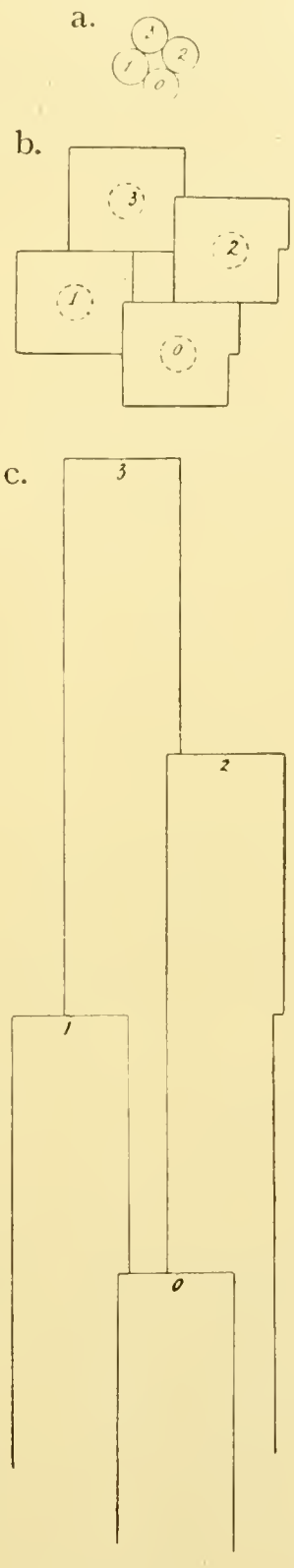


Betrachten wir zuerst den Vegetationspunkt im Längsschnitt. Fig. 55 mag dafür schematisch das Hervorwachsen einer Blattanlage mit der Ansatzstelle *a b* auf einem Teil des Scheitels darstellen, der bereits ziemlich spitz ist. Man sieht nun, daß im Punkt *a* die Anlage einen sehr scharfen Winkel mit der Scheiteloberfläche bildet, während in dem Punkt *b* dieser Winkel stumpf ist. In den Punkten der Ansatzlinie, die zwischen *a* und *b* liegen, müssen Winkel angetroffen werden, die zwischen die genannten scharfen und stumpfen fallen. Daraus geht hervor, daß sich das Blatt an der oberen Seite der Ansatzstelle sehr scharf aus der Stammoberfläche hervorzuheben scheint, während dagegen an der untern Seite ein mehr gleichmäßiger Übergang zwischen Blatt und Stammoberfläche angetroffen wird.

1) Teoria Generale, Cap. XIV, Della decorrenze fogliari, p. 167—170.

Beim Steilerwerden der Kegelfläche muß dieses Verhalten noch ausgeprägter werden. Wenn also die Anlagen bei ihrer weiteren Entwicklung auf einen sehr steilen Teil des Scheitels zu liegen kommen und noch immer an der Basis vertikal emporwachsen, so wird man die untere Begrenzung der Ansatzlinie nicht mehr wahrnehmen. Dadurch muß dann aber der Eindruck hervorgerufen werden, es wäre nicht *a b* die Ansatzstelle, sondern *a c*.

Fig. 56.



Nun gibt unser Schema den natürlichen Zustand durchaus nicht genau wieder. Das Blatt wächst niemals so genau vertikal empor wie wir hier annahmen, aber auch anderseits treten sekundäre Änderungen ein, die die Wahrnehmung der richtigen Blattbasen erschweren. Denkt man sich nämlich, daß an der Stelle *a c* die Bildung eines Stiels anfängt, so wird man sicherlich bei oberflächlicher Beobachtung hier auch die Ansatzstelle der seitlichen Anlage vermuten.

Fassen wir nun zweitens eine Seitenansicht des Scheitels ins Auge. Nach unserer Theorie waren die Ansatzstellen der jungen Anlage Kreise auf einer Kreiskegelfläche. Nun wird sich ein solcher Kreis in der Zeichnung der Ansicht als Ovoid darstellen, also einigermaßen eiförmig sein. Je steiler die Kegelfläche und je kleiner die Ansatzstelle, um so mehr nähert sich dieses Ovoid einem Kreis. Wir wollen nun, um unsere Betrachtungen zu vereinfachen, die Kreisform der Ansatzstellen in der Zeichnung voraussetzen. In Fig. 56a mögen dann vier junge Anlagen wiedergegeben sein, wie sie am Scheitel mit einander in Kontakt angelegt wurden.

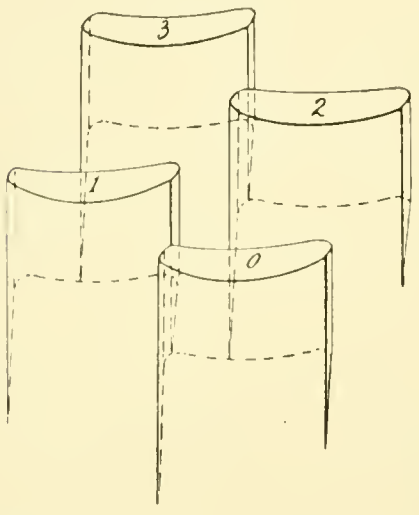
Im ersten Stadium des Wachstums wird der Scheitel sich annähernd gleich schnell in die Höhe wie in die Breite vergrößern. Denken wir uns nun einen Augenblick, daß die jungen Anlagen selber nicht wachsen und nur passiv durch das Wachstum des übrigen Gewebes von einander entfernt werden, so würden sie am Ende dieser Periode gleichmäßigen Wachstums etwa die Stellung einnehmen, welche in Fig. 56b den punktierten Kreisen zukommt. Nun müssen aber die Blattbasen ebenfalls ein Wachstum erfahren haben, denn wir nahmen ja an, daß sie im ausgewachsenen Zustand noch dieselbe relative Breite besitzen. Dabei brauchen sie jedoch ihre kreisförmige Gestalt nicht beibehalten zu haben, im Gegenteil, das Studium der Zeichnung der Stengel hat uns zu der Überzeugung geführt, daß die Gestalt der Blattbasen in dem jetzt betrachteten Stadium annähernd dar-

gestellt werden kann durch das Schema, das in Fig. 56b abgebildet wurde.

Man gebe nun besonders darauf acht, daß diese Formänderung ohne Annahme einer Überschichtung der Stammoberfläche zu erhalten ist. Man braucht ja nur anzunehmen, daß sich bei dem Übergang des Zustandes, wie er in Fig. 56a abgebildet ist, in denjenigen, wie ihn Fig. 56b wiedergibt, die kreisförmigen Ansatzstellen sich zu den hier abgebildeten ausgebreitet haben, während sich die freie Stammoberfläche aus Fig. 56a zu der viereckigen aus Fig. 56b ausbildete.

Bedenkt man, was wir oben über die Gestalt des Längsschnittes gesagt haben, so wird es deutlich sein, daß die untersten Begrenzungslinien der Blattbasen sehr undeutlich sein müssen, weil in dem hier betrachteten Stadium die Anlagen bereits auf einem steilen Teil des Scheitels stehen. Perspektivisch kann also dann die Stellung annähernd durch das Schema der Fig. 57 dargestellt werden.

Fig. 57.



Wenn nun das Wachstum in der Längsrichtung vorherrscht, so würden die Blattbasen stark verlängert, wie das in Fig. 56c angegeben ist, und dabei wird die wahre Natur dieser Ansatzstellen immer undeutlicher, sodaß es schließlich den Schein hat, als ob nur die höchsten Stellen dieser Figuren als solche anzusprechen seien. Daß aber die Grenzlinien der Ansatzstellen noch von anderer Beschaffenheit sind als das übrige Gewebe, geht daraus hervor, daß an diesen Stellen die „Zeichnung" der Stengel sichtbar wird, entweder als charakteristische Riefen, Collenchymlagen, scharfe Kanten oder als Stammflügel.

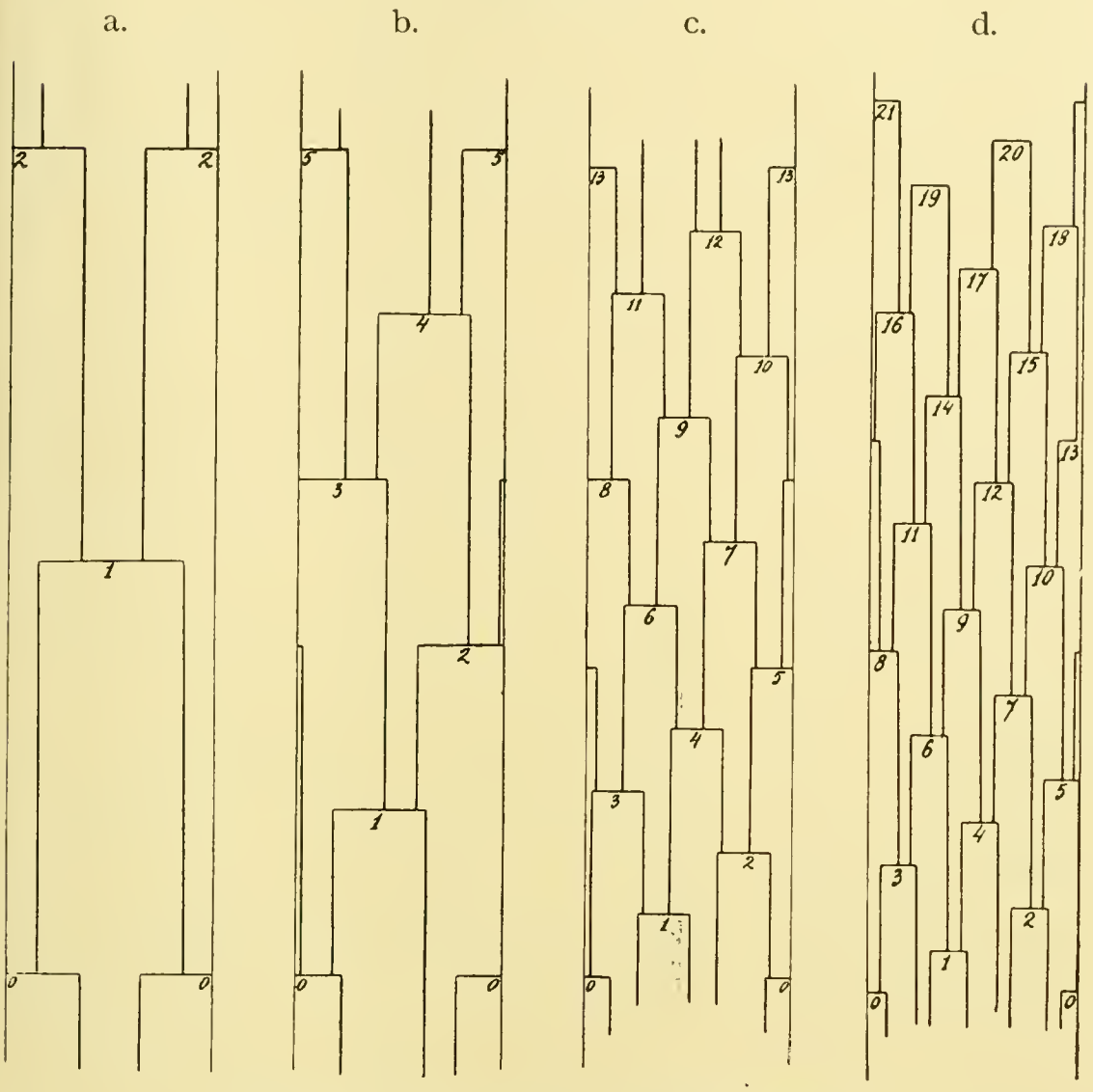
Nach dieser Auffassung besteht also für den Fall, daß die Blattbasen am Stengel die gleiche relative Breite besitzen wie am Scheitel, die Stengeloberfläche größtenteils aus Blattbasen, zum kleineren Teil aus freier Stammoberfläche.

Wir haben nun in der Fig. 58a, b, c und d einige Schemas der Stengelzeichnung abgebildet, wie sie nach unseren theoretischen Betrachtungen ausfallen muß, wenn die Blattbasen bei ihrer Entwickelung ihre ursprüngliche Breite beibehalten. Fig. 58a hat Beziehung auf die Zeichnung, welche unter dieser Voraussetzung auftreten muß, wenn am Scheitel der rechtwinklige Kontakt 1 und 1 angelegt wird, Fig. 58b, wenn darin der Kontakt 1 und 2 verwirklicht ist, und zwar wurde dabei angenommen, daß die Divergenz $^2/_5$ beträgt, während Fig. 58c diese Zeichnung wiedergibt für den Kontakt 2 und 3 am Scheitel und eine Divergenz gleich $^5/_{13}$ und Fig. 58d für den Kontakt 3 und 5 mit der Divergenz $^{13}/_{34}$ gilt. Man wird sich nun ohne Mühe die Zeichnung, welche bei höheren Kontakten zu erwarten ist, vorstellen können.

Bemerken wir noch, daß die Anfertigung in der Weise geschah, daß zuerst Punkte angegeben wurden, welche auf einer Spirale mit

konstanter Divergenz lagen; dann wurden durch diese Punkte horizontale Linien gezogen, die durch die Punkte halbiert wurden und diejenige Breite besaßen, die von der Theorie gefordert wird, also

Fig. 58.



Theoretische Schemas für die Berindungszeichnung.
Fig. a, $b = 0{,}707$; Fig. b, $b = 0{,}447$; Fig. c, $b = 0{,}277$; Fig. d, $b = 0{,}171$.

aus der graphischen Darstellung II Tafel II abzulesen ist. Von den Endpunkten dieser horizontalen Linien wurden dann Vertikalen so weit nach unten gezogen, bis sie eine darunterliegende horizontale Linie trafen. Man hat in diesen Schemas natürlich die horizontalen Linien als die Ansatzstellen der Blattstiele zu betrachten.

Sieht man nun von dem Schema für die zweireihige Stellung ab, so wird man in allen Schemas für rechtwinklige Kontakte aus der Hauptreihe eine übereinstimmende Form finden, für die „äußeren Blattspuren", das sind die Teile der Stengeloberfläche, welche seitwärts von den Linien der Zeichnung und oben und unten von den Anheftungsstellen der Blätter (in unseren Figuren von den horizontalen Linien) begrenzt werden. Diese theoretischen Blattspuren zeigen nämlich alle drei Zonen: die oberste ist die breiteste und hat in unserem Schema denselben relativen Durchmesser wie die ursprünglichen Anlagen, dann folgt die mittlere, welche nur wenig schmäler

ist, indem die anfängliche Breite an der einen Seite durch eine andere Blattspur vermindert wird. Endlich folgt dann die dritte Zone, welche viel schmäler ist als die beiden vorigen. Wir werden an den der Natur entnommenen Beispielen diese drei Zonen wieder finden und weisen noch darauf hin, daß nach unserer Theorie die oberen Zonen an beiden Seiten durch Linien begrenzt werden, die zu demselben Blatt gehören, die mittleren Zonen dagegen an der einen Seite von einer Linie, die noch zu diesem Blatt gehört, an der anderen von einer solchen, welche zu der Ansatzstelle eines anderen Blattes zu rechnen ist. Die begrenzenden Linien der unteren Zonen sind beide zu anderen Blättern zu rechnen.

Für die zweireihige Blattstellung und wie wir sehen werden auch für die Dekussation wird diese Form der Blattspuren eine andere, hier sind nur zwei Zonen wahrnehmbar.

Die Betrachtung derjenigen Fälle, bei welchen die Blattbasen in dem ausgewachsenen Zustand eine größere oder kleinere relative Breite besitzen als bei der Anlegung, geschieht am besten bei der Besprechung der einzelnen Beispiele. Dennoch wollen wir bereits hier bemerken, daß die resultierende Zeichnung dabei öfters gar nicht zu unterscheiden ist von einer solchen, welche man erhält, wenn dieser relative Durchmesser konstant bleibt. Dagegen muß für diese Fälle angenommen werden, daß alle freie Stammoberfläche verschwindet, daß also wirklich das ursprünglich als Oberfläche vorhandene Gewebe nachträglich in Blattoberfläche umgewandelt worden ist.

Bei geringerem Wachstum der Blattbasen wird man eine Vergrößerung der freien Stammoberfläche zu erwarten haben. Wir werden später noch ein Schema für diesen Fall kennen lernen, bemerken aber schon jetzt, daß auch dieses nicht von denjenigen zu unterscheiden ist, welche wir oben besprochen haben.

Schließlich möge noch auf eine interessante Eigenschaft unserer Schemas aufmerksam gemacht werden. Denkt man sich die Schemas für gleichmäßiges Wachstum der Blattbasen durch eine horizontale Linie durchschnitten, so schneidet diese Linie eine Anzahl Begrenzungslinien der Blattbasen und zwar ist diese Anzahl gleich $m+n$, wenn am Scheitel der rechtwinklige Kontakt m und n angetroffen wird. Wachsen die Blattbasen schneller als der Stamm, so kann, wie wir sehen werden, diese Zahl auf n herabsinken, wachsen sie langsamer, dann kann sie auf $(m+2n)$ steigen. Jedenfalls aber findet man, wenn am Scheitel Kontakte aus der Hauptreihe vorhanden sind, auf einem Querschnitt eine Anzahl charakteristischer Linien, welche durch ein Glied dieser Reihe ausgedrückt wird.

Bedenkt man nun noch, daß öfters diese Linien so stark hervortreten, daß dadurch die ganze Form des Stengels bedingt wird, dann ist damit die auf S. 196 unter 11 genannte Beobachtungstatsache, daß die Stengel in vielen Fällen auf einem Querschnitt eine Anzahl charakteristischer Riefen, Kanten, Linien usw. aufweisen, welche durch eine Zahl aus der Hauptreihe ausgedrückt wird, erklärt aus dem häufigen Vorkommen von Kontakten aus der Hauptreihe am Scheitel.

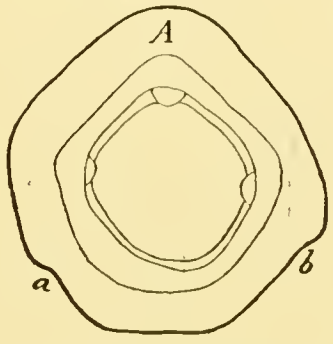
§ 4. Die Zeichnung des Stengels bei der zweireihigen Blattstellung. Das Schema, das wir in Fig. 58a für die Zeichnung der zweireihigen Blattstellung aufgestellt haben, wird, so weit mir bekannt ist, in der Natur niemals verwirklicht angetroffen

Daraus geht hervor, daß hier das Breitenwachstum der Blattbasen so vorherrschend ist, daß bereits, bevor das Längenwachstum eingetreten ist, die Blattbasen den ganzen Umfang des Stengels einnehmen. Hier findet man also niemals freie Stammoberfläche. Es ist dieser Fall für uns also von geringer Bedeutung.

§ 5. Die Zeichnung des Stengels beim Kontakt 1 und 2 am Scheitel. Das Schema aus Figur 58 b findet man ganz genau verwirklicht am Stengel von *Arabis alpina*. Jedoch zeigt diese Art am Vegetationspunkt den Kontakt 2 und 3 und die Besprechung dieses Falls gehört also in den folgenden Paragraphen. Es ist mir auch hier kein Fall bekannt, bei welchem das genannte Schema beim Kontakt 1 und 2 am Scheitel auftritt, obwohl ich es für wahrscheinlich halte, daß ein solcher Fall existiert.

Wie sieht dann aber die Zeichnung aus, welche der Stengel bei dem genannten Kontakt am Scheitel aufweist? Wir wollen diese Frage an demselben Beispiel erläutern, das uns früher zum Nachweis des Kontaktes 1 und 2 gedient hat, und zwar an *Ribes sanguineum*. Die Zeichnung der alten Stengel dieser Art ist zwar nicht sehr deutlich, aber an den jungen Internodien ist sie dennoch sehr schön wahrnehmbar. Fig. 59 stellt einen Querschnitt durch einen Zweig dar dicht unterhalb der Achselknospe eines Blattes *A*. Man bemerkt in unserer Figur den Querschnitt der drei Gefäßbündel, welche aus dem Blatt in den Stengel treten und die mit den Buchstaben *a* und *b* bezeichneten Rippen, welche die äußere Blattspur des Blattes begrenzen.

Fig. 59.



Querschnitt durch einen sehr jungen Stengel von *Ribes sanguineum* kurz unterhalb der Ansatzstelle eines Blattes. (Die Mittellinie dieser Ansatzstelle ist oberhalb *A* gelegen.) Vergr. 9.

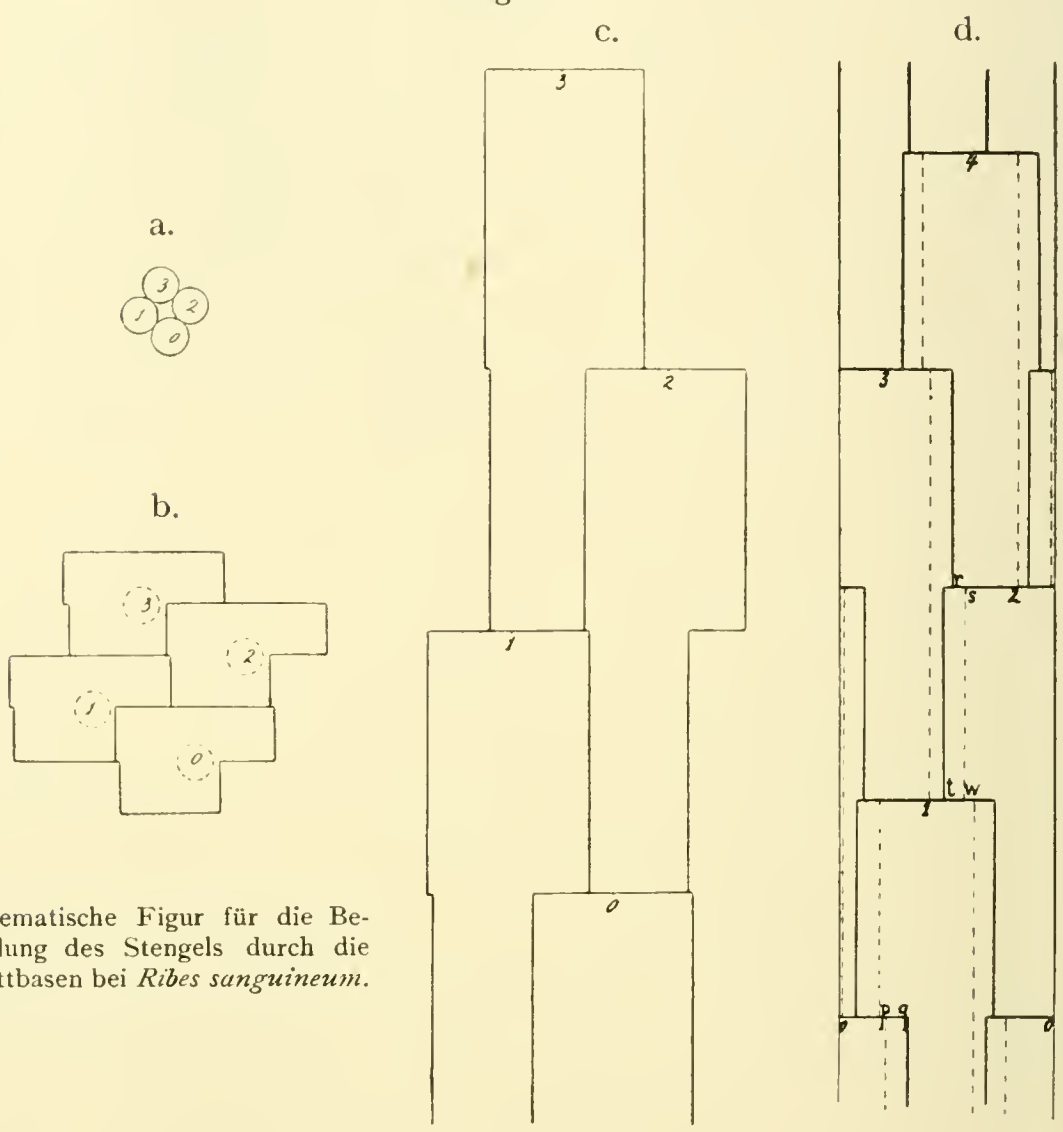
Es muß sogleich auffallen, daß die Breite der Blattbasis in diesem Querschnitt bedeutend größer ist als die Hälfte des Stengelumfangs. Dennoch haben wir gesehen, daß bei der Anlegung am Scheitel (vergl. S. 209) diese Breite merkbar kleiner war. Hieraus folgt also, daß eine bedeutende Breitezunahme stattgefunden hat, wobei noch von Interesse ist, daß diese keine nennenswerte Divergenzänderung verursacht hat, sodaß also Dachstuhlverschiebungen im Sinne SCHWENDENERS nicht in Betracht kommen.

Welche Änderungen hat nun dieses schnellere Wachstum der Blattbasen in der Zeichnung des Stengels verursacht? Denkt man sich im Schema der Fig. 58 b die Blattbasen verbreitert, sodaß schließlich die freie Stammoberfläche verschwindet, dann geht dieses Schema in ein solches über, das in Fig. 60 c und d abgebildet ist. Die Figuren 60 a und 60 b geben dabei näher an, wie man sich die Ausbildung dieses Schemas im Laufe der Entwicklung vorzustellen hat.

Wirklich entspricht diese theoretische Figur genau der Wahrnehmung. Die Blattspuren bei *Ribes sanguineum* sind dadurch gekennzeichnet, daß sie nur zwei Zonen zeigen und daß die von Blatt 3 ablaufende Blattspur nicht, wie man erwarten sollte, bis 0 durchläuft, sondern nur bis 1.

Hier begegnen wir also einem Beispiel, bei dem keine freie Stammoberfläche besteht und die Berindung durch die Blattbasen vollkommen ist.

Fig. 60.



Schematische Figur für die Berindung des Stengels durch die Blattbasen bei *Ribes sanguineum*.

§ 6. Die Zeichnung des Stengels beim Kontakt 2 und 3 am Scheitel. Hier treffen wir zum ersten male ein Beispiel einer Zeichnung für einen Fall, bei welchem die Blattbasen am Stengel noch dieselbe relative Breite besitzen wie am Scheitel. Die Zeichnung derjenigen Zweige von *Jasminum fruticans*, welche auf einem Querschnitt fünf Rippen zeigen (und das sind die meisten), stimmt nämlich vollkommen mit dem Schema überein, das wir in Fig. 58 c abgebildet haben, und wir haben gesehen, daß diese Art am Scheitel den Kontakt 2 und 3 aufweist (siehe S. 212). Fig. 61 a gibt eine Ansichtszeichnung eines solchen Zweiges, von dem die Blätter am Stiel abgeschnitten sind. Die Fig. 61 b und 61 c stellen zwei verschiedene Querschnitte des Zweiges dar.

Man verfolge nun vom Blatt 5 abwärts die Blattspur. Die von diesem Blatt ausgehende begrenzende Rippe an der rechten Seite endet in der Achsel von Blatt 3, die an der linken Seite in der Achsel von Blatt 2. Die Blattspur, welche von Blatt 3 niedersteigt, nimmt einen sehr schmalen Streifen der Blattspur von 5

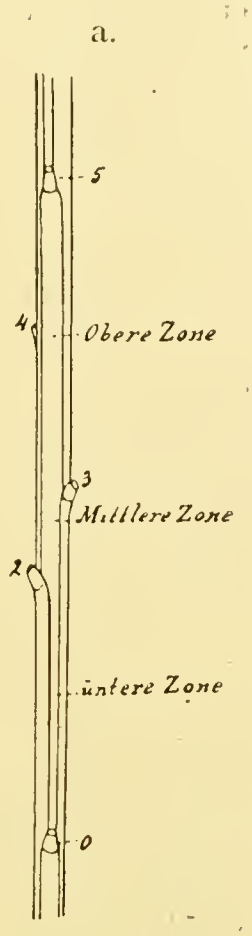
weg, dagegen wird diese durch die Blattspur von Blatt 2 bedeutend verschmälert. So kommen die drei früher beschriebenen Zonenzustände und ihre Gestalt erinnert ganz an die, welcher wir in den theoretischen Schemas begegneten.

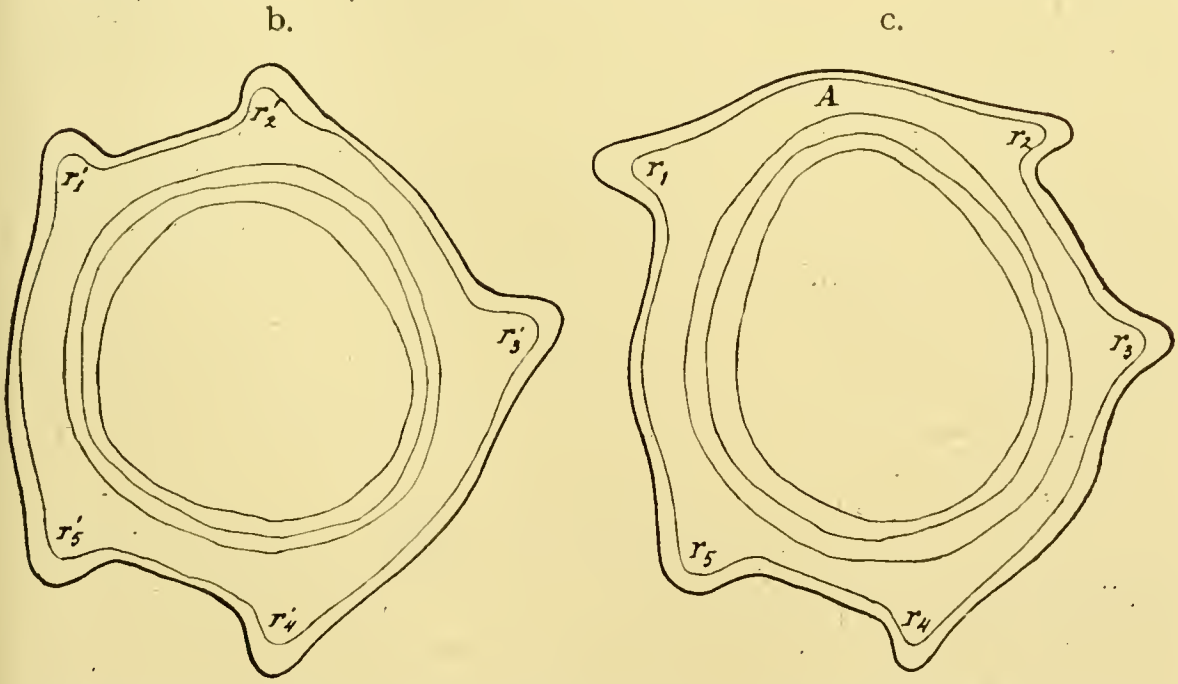
Fig. 61.

Wir wollen jetzt die Existenz dieser drei Zonen in den Querschnitten nachweisen. Der Querschnitt Fig. 61 c ist unmittelbar unterhalb der Achselknospe eines Blattes *A* geführt, für das man sich Blatt 5 denken kann. Die von diesem Blatt abwärtslaufende Spur wurde mit einem Markierschnitt versehen und konnte dadurch sofort in dem Querschnitt wieder gefunden werden. Es war dies nicht einmal notwendig gewesen, weil die Abbiegung des Gefäßbündelrings unmittelbar zu erkennen gibt, daß wir hier in der Nähe eines Blattes sind.

Es befindet sich unterhalb des Blattes sicherlich eine „obere Zone"; in unserer Figur wird diese also von den Rippen r_1 und r_2 begrenzt. Wir weisen darauf hin, daß diese Rippen so gelegen sind, daß sie die Verlängerung von einander bilden. Man überzeugt sich leicht von der Tatsache, daß diese Lage bei allen obersten Zonen wieder gefunden wird.

Fig. 61 b stellt einen Querschnitt dar, der dicht oberhalb des Blattes *A* hindurchgelegt ist. Er ist so gestellt, daß, wenn er durch eine





Die Stengelzeichnung von *Jasminum fruticans*. Fig. a. Ansichtszeichnung des Stengels. Fig. b. und c. Querschnitte oberhalb und unterhalb der Ansatzstelle eines Blattes (*A*). Vergr. der beiden letzten Figuren: 35.

parallele Verschiebung über die Fig. 61 b gebracht wird, er auch die nämliche Lage gegenüber diesem Querschnitt einnimmt wie

in der Natur. Man wird einsehen, daß, wenn man sich diese Deckbewegung ausgeführt denkt, die Rippen r'_3, r'_4 und r'_5 ziemlich genau über die Rippen r_3, r_4 und r_5 zu liegen kommen, während die Rippen r'_1 und r'_2 gar nicht oberhalb r_1 und r_2 liegen; r'_1 ist eine kleine Strecke gegen r_1 verschoben, r'_2 aber eine größere gegen r_2. Daraus ersieht man sehr überzeugend, daß die Rippen r'_1 und r'_2 in der Achsel von Blatt A aufhören und nicht etwa in r_1 und r_2 übergehen. Nun ist der Teil einer Blattspur, der unmittelbar oberhalb eines Blattes liegt, sicherlich eine „untere Zone"; die Rippen r'_1 und r'_2 werden also sicherlich eine solche begrenzen. Diese beiden Rippen laufen nun annähernd parallel und diese Lage ist für die unteren Zonen charakteristisch.

Es erübrigt sich jetzt noch die „mittlere Zone" nachzuweisen. Sondert man in den beiden Querschnitten diejenigen aus, bei welchen die begrenzenden Rippen parallel laufen oder die Verlängerung voneinander bilden, so bleiben noch solche übrig, bei denen die begrenzenden Rippen annähernd rechtwinklig aufeinander stehen. Das ist der Fall bei den Zonen, welche in Fig. 61c durch die Rippen r_3 und r_4 und durch die Rippen r_5 und r_1 begrenzt werden, während das in Fig. 61b für die Rippen r'_2 und r'_3 gilt.

An den natürlichen Objekten wird man die hier beschriebene Lage auch ohne Anfertigung von Querschnitten wahrnehmen, und man kann daran auch beobachten, daß die rechtsgelegene Rippe noch unverändert durchläuft, wenn die äußere Blattspur, welche wie gesagt in der oberen Zone durch Rippen begrenzt wird, die die Verlängerung von einander bilden, an der linken Seite verschmälert wird durch die Blattspur von Blatt 3. Die links auftretende Rippe steht aber jetzt senkrecht auf der rechtsgelegenen. Wird an einer tiefergelegenen Stelle die Blattspur durch Blatt 2 an der linken Seite verschmälert, dann läuft wieder die rechts gelegene unverändert durch, aber die neu auftretende links kommt nun parallel zu dieser zu stehen.

Bedenkt man nun, daß, wenn die Rippen die Verlängerung von einander bilden, ihre Lage ganz dieselbe ist wie wenn man das Blatt mit dem Stengel verwachsen denkt, so wird es klar sein, daß die hier beschriebene merkwürdige Lage der Rippen in den einzelnen Zonen unmittelbar ihre Erklärung findet in der oben angegebenen Auffassung über den Berindungsprozeß. Nach dieser Auffassung gehören ja in der oberen Zone die beiden Rippen morphologisch zu demselben Blatt, in der mittleren gehört nur die eine noch dazu und in der unteren sind die beiden zu anderen Blättern zu rechnen.

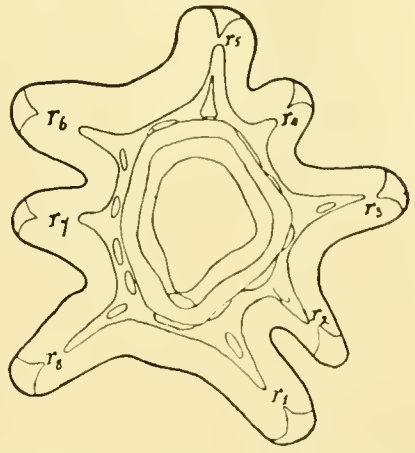
Läßt sich also die charakteristische Lage der Rippen bei der Annahme einer Berindungshypothese ganz ungezwungen erklären, so müßte man andererseits, wenn man mit TOBLER die Bildung der Rippen mit dem Leitbündelsystem in Beziehung bringen wollte und sie unabhängig von der Blattanlage zu deuten versuchte, zu besonderen Hilfshypothesen seine Zuflucht nehmen. Von einer Beziehung mit dem Leitbündelsystem ist auch bei direkter Beobachtung nichts zu bemerken; nur in der Epidermis, dem darunter gelegenen Collenchym und in den ersten Schichten der grünen primären Rinde ist die Ausbildung der Rippen wahrzunehmen, die inneren Schichten der primären Rinde, das Phloem und das Xylem zeigen

gar keine Abweichungen an den Stellen, wo diese Rippen hervortreten.

Alles was wir oben über die Zeichnung von *Jasminum fruticans* gesagt haben, läßt sich unverändert auf die der fünfkantigen Zweige von *Sarothamnus vulgaris* übertragen.

Beide Arten können nun aber noch eine andere Zeichnung an den Zweigen besitzen: man findet darunter nämlich auch achtkantige. So gibt Fig. 62 den Querschnitt eines solchen Stengels für die letztgenannte Art wieder, bei dem man ebenfalls eine eigentümliche Lage der Rippen, welche verschiedene Zonen begrenzen, wahrnehmen kann.

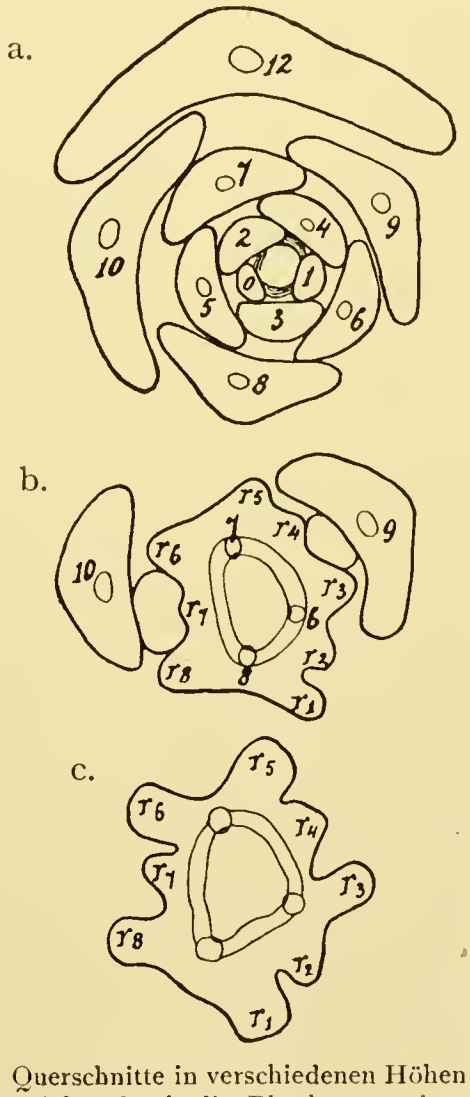
Fig. 62.



Querschnitt eines achtkantigen Stengels von *Sarothamnus vulgaris*. Vergr. 30.

Als mir die Beziehung zwischen Zeichnung und Berindung noch nicht klar war, vermutete ich, daß diese Stengel auch Scheitel mit dem Kontakt 3 und 5 besitzen würden; aber keine der zahlreichen Scheitel, die ich bei den beiden Arten untersuchte, zeigte jemals einen anderen Kontakt als 2 und 3. Die Zweifel, die dennoch bestehen konnten, daß dieser Wahrnehmung nur ein Zufall zu Grunde lag, indem die Periode, bei der der Kontakt 3 und 5 auftrat, vorüber war, wurden ganz beseitigt durch die Beobachtung, daß die achtkantigen Stengel bereits unmittelbar unterhalb der Scheitel mit Kontakt 2 und 3 auftraten. So gibt die Fig. 63 a, b und c einige Schnitte vom Scheitel von *Sarothamnus vulgaris*, die sehr dicht aufeinander folgen und zwar sind diese wieder in solcher Lage abgebildet, daß sie durch parallele Verschiebung in die Stellung kommen, welche sie auch an der Pflanze in Bezug aufeinander einnahmen.

Fig. 63.

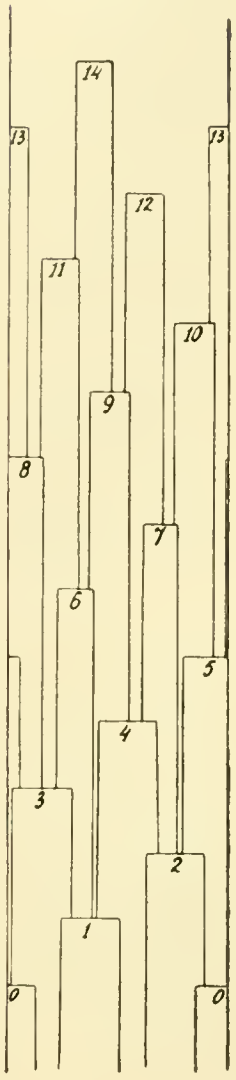


Querschnitte in verschiedenen Höhen geführt durch die Blattknospe eines achtkantigen Stengels von *Sarothamnus vulgaris*. Vergr. 45.

Hier haben wir also ein Beispiel von dem Fall, in dem die Blattbasen am Stengel eine relativ kleinere Breite einnehmen als am Scheitel. Daß dieses Verhalten erklärt werden kann, auch ohne Verschiebungen der Blattbasen anzunehmen, kann man wieder in der Weise begreiflich machen, daß man in dem Schema der Fig. 58 c die Blattbasen schmaler werden läßt. Es ist das in dem oberen Teil der Fig. 64 geschehen und das Resultat ist ein Schema, das sich nicht von einem solchen unter-

scheiden läßt, das bei dem Kontakt 3 und 5 am Scheitel und beim Gleichbleiben der relativen Blattbasenbreite auftreten würde (man vergleiche Fig. 58 d). Im unteren Teil der Figur haben wir das andere Schema beibehalten und wir haben angenommen, daß die Verschmälerung der Blattbasen von einem bestimmten Blatt (1) ab eintritt. Man sieht, daß bei dieser Annahme in der Achsel von drei aufeinander folgenden Blättern (1, 2 und 3) nicht, wie bei den regelmäßigen Schemas, zwei, sondern drei Rippen enden. Von dem Blatt 3 ab ist dann der Zustand wieder ein regelmäßiger.

Fig. 64.



Schema für den Übergang einer Stengelzeichnung in eine andere.

Wirklich beobachtet man nun auch diese Übergangsfiguren ganz genau so bei solchen Zweigen von *Jasminum fruticans* und *Sarothamnus vulgaris*, welche zum Teil fünfkantig, zum Teil achtkantig sind.

Es wird nicht schwer fallen einzusehen, wie sich diese Schemas für andere Kontaktfälle verhalten werden und es läßt sich dann diese Regel aufstellen:

Beim Kontakt m und n am Scheitel und bei gleichbleibender relativer Breite der Blattbasen, zeigt der Stengel $(m+n)$ Kanten, Rippen usw. auf einem Querschnitt. Wird diese relative Breite im Laufe der Entwickelung kleiner, dann kann diese Zahl übergehen in $(m+2n)$. Ist die Breite anfänglich konstant und wird sie für höhere Stengelteile kleiner, dann geht der $(m+n)$-kantige Stengel in der Weise in einen $(m+2n)$-kantigen über, daß in den Achseln von n aufeinander folgenden Blättern drei statt zwei Rippen endigen.

Die letztgenannte Eigentümlichkeit des Übergangs ist schon durch WIESNER durch direkte Beobachtung gefunden worden[1]), sie findet also in der Theorie der Berindung eine befriedigende Erklärung.

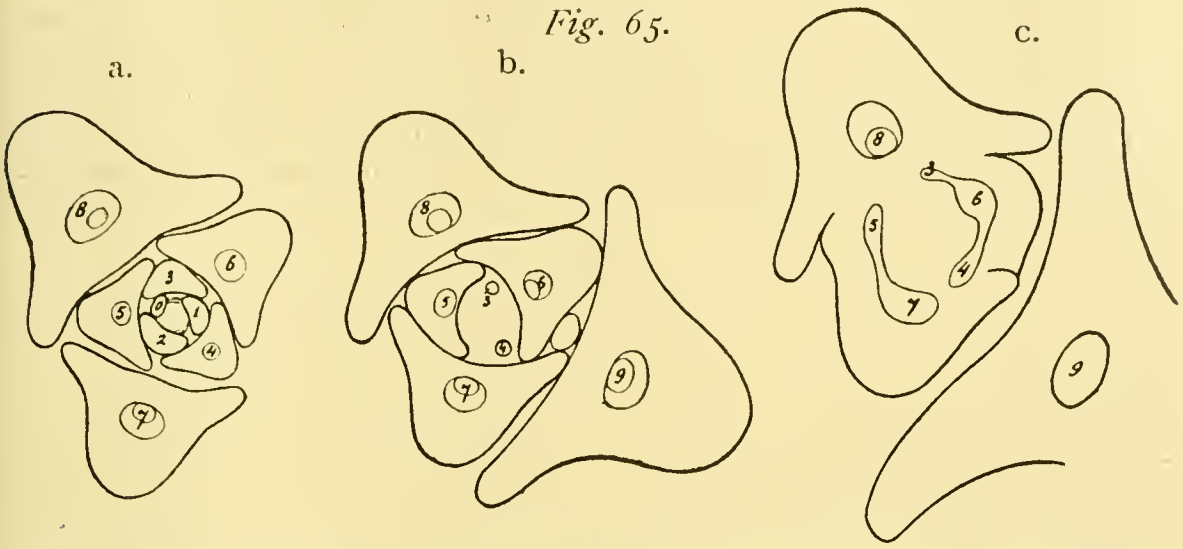
Hauptsache für uns war, nachzuweisen, daß die Zeichnung am Stengel keinen Aufschluß gibt über die Blattstellung am Scheitel, und daß sogar bei Änderung dieser Zeichnung dennoch die Kontaktverhältnisse am Scheitel dieselben geblieben sein können.

Schließlich wollen wir noch einen Fall behandeln, in welchem die relative Breite der Blattbasen im Laufe der Entwickelung zunimmt. Wir haben schon früher darauf hingewiesen, daß *Arabis alpina* an dem Stengel eine Zeichnung besitzt, welche in Fig. 58 b abgebildet ist, und dennoch am Vegetationspunkt den Kontakt 2 und 3 zeigt. Fig. 65 gibt die Erklärung für dieses Verhalten, denn daraus geht hervor, daß schon in geringem Abstand unterhalb des Scheitels die Blattbasen eine solche Breite besitzen, daß man denken

1) Die Gesetze der Riefenteilung an den Pflanzenachsen. Sitz.-Ber. Wiener Akad., 38. Bd., 1860, S. 831.

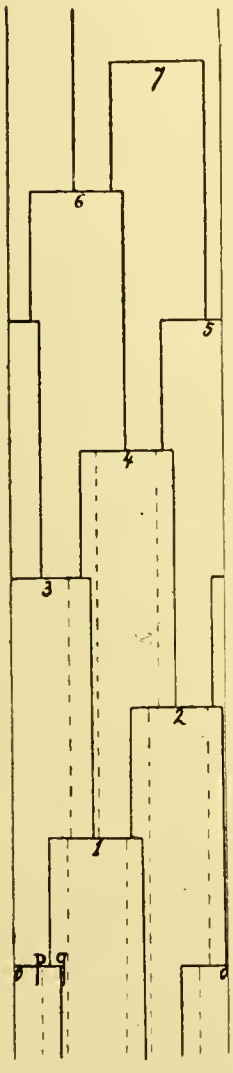
könnte, hier würde der Kontakt 1 und 2 angelegt. Daß diese Zunahme der Breite ohne Divergenzänderung eintreten kann, braucht

Fig. 65.



Querschnitte in verschiedenen Höhen geführt durch die Blattknospe von *Arabis alpina*. Vergr. 28.

Fig. 66.

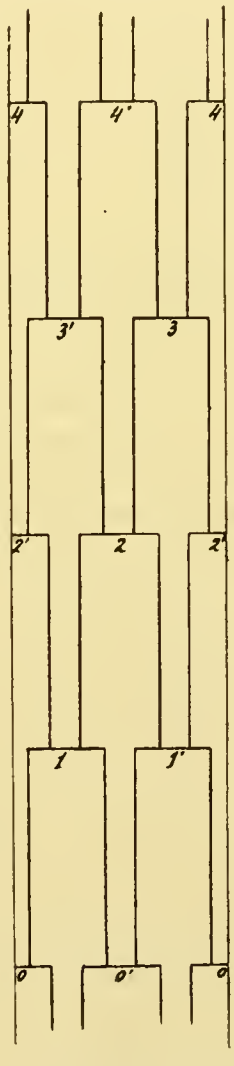


Schematische Figur für die Zeichnung des Stengels von *Arabis alpina*.

nach dem, was wir bei *Ribes sanguineum* gesagt haben, nicht näher erläutert zu werden. Wie man sich die Zeichnung am Stamm hier von derjenigen aus Fig. 58 c abgeleitet denken kann, geht aus dem Schema in Fig. 66 hervor, wobei wieder durch eine einfache Verbreiterung der Blattbasen ein Schema entstanden ist, das ganz demjenigen von Fig. 58 b entspricht, weil die kleine Differenz in der Divergenz nicht ins Auge fällt.

§ 7. Die Zeichnung des Stengels bei dekussierter Blattstellung. Sehr übersichtlich gestaltet sich die Stengelzeichnung bei der Dekussation. Fig. 68 a gibt die charakteristische Zeichnung von *Syringa vulgaris*, perspektivisch gezeichnet, wieder, während in Fig. 68 b und c zwei Querschnitte abgebildet wurden, und zwar ist der erste oberhalb, der zweite unterhalb der Ansatzstelle eines Blatt-

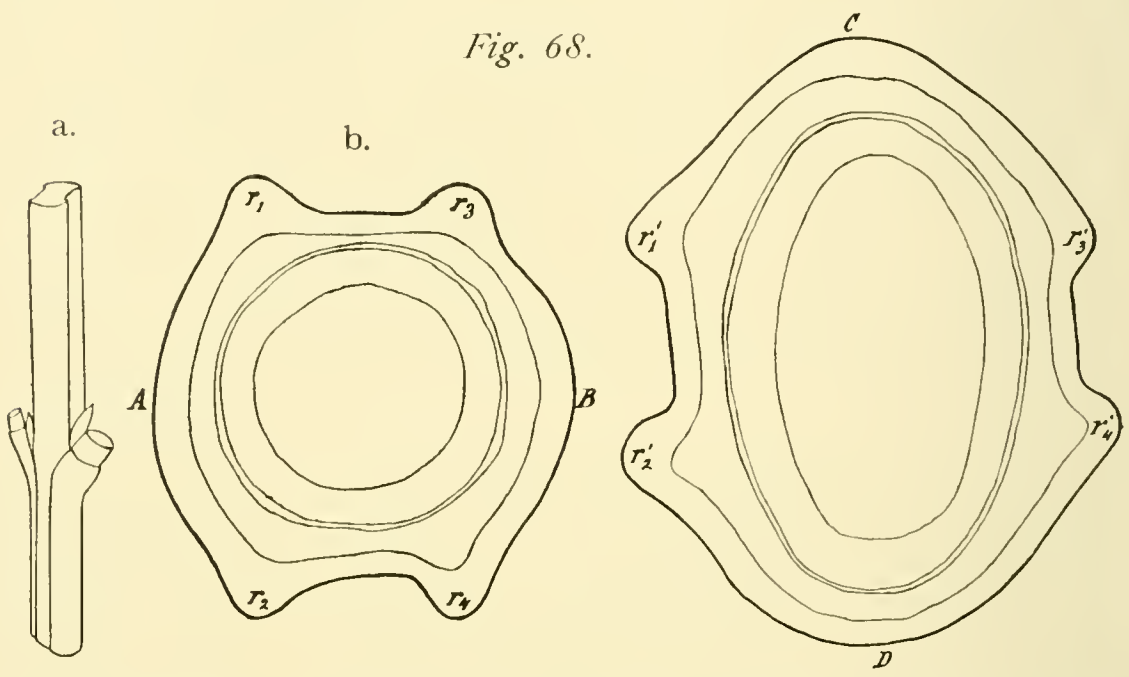
Fig. 67.



Schema für die Stengelzeichnung bei dekussierter Blattstellung.

paares angefertigt. Sie sind in einer solchen Lage abgebildet, daß sie wieder durch eine parallele Verschiebung in dieselbe Stellung zu bringen sind, die sie am Stengel in Bezug aufeinander einnahmen. Denkt man sich eine solche Verschiebung ausgeführt, dann sieht man ein, daß die Rippen r_1, r_2, r_3 und r_4 gar nicht die Verlängerung von den Rippen r_1', r_2', r_3' und r_4' bilden. Alle Rippen enden also in den Achseln der Blattpaare und unter den Knoten treten nur Rippen auf, welche zu anderen Blattbasen gerechnet werden müssen.

Fig. 68.



Die Zeichnung der jungen Zweige von *Syringa vulgaris*. Fig. a. Ansichtszeichnung des Zweiges, die Blätter sind abgeschnitten. Fig. b. und c. Querschnitte oberhalb und unterhalb eines Knotens. Die Blätter sind über *C* und *D* zu denken. Vergr. der beiden letzten Figuren 35.

Die Rippen r_1 und r_2 gehören beide zu der Blattbase von Blatt *A*, wie auch daraus hervorgeht, daß sie die gleiche Richtungslage aufweisen, r_3 und r_4 gehören zu Blatt *B*. So hinterlassen diese Querschnitte wieder unmittelbar den Eindruck, als ob die Blätter noch nach unten mit dem Stengel verwachsen wären.

Das Schema der Stengelzeichnung entspricht hier also ganz der Figur 67 und es ist deutlich, daß hier die Teile zwischen den Rippen r_1 und r_3, r_2 und r_4, r_1' und r_3', r_2' und r_4' als freie Stammoberfläche anzusprechen sind.

Die hier angetroffene Zeichnung findet man bei sehr vielen Arten mit dekussierter Blattstellung wieder, so bei *Fraxinus excelsior, Ligustrum vulgare, Buxus sempervirens.*

Dennoch kann auch hier der Fall vorkommen, daß die Blattbasen sich im Laufe der Entwickelung stärker ausbreiten als die Stammoberfläche, ja diese ganz überwölben. Dieses Verhalten trifft man u. a. an bei *Deutzia scabra, Sambucus nigra.*

Fassen wir also kurz zusammen, was uns die Betrachtung der Stengelzeichnung gelehrt hat, so müssen wir sagen, daß diese zwar in enger Beziehung zu der angelegten Blattstellung steht, aber daß sich umgekehrt aus dieser Zeichnung nicht mit Gewißheit auf den herrschenden Kontakt am Scheitel schließen läßt.

Kapitel V. Die Divergenz, angelegt am Scheitel.

§ 1. Die durch die Beobachtung gegebene Divergenz. Die Theorie, wie sie oben entwickelt wurde, beschäftigte sich zuerst mit der Frage, wie ein einmal vorhandenes Kontaktsystem bei dem weiteren Aufbau beibehalten wird, ohne zu fragen, warum das ursprünglich vorhandene aufgetreten war. Dennoch haben wir schon öfters darauf hingewiesen, daß unter den vorhandenen Systemen nicht alle möglichen Folioidensysteme angetroffen werden. Bei dem Kontakt 1 und 1 war dies nicht ganz überzeugend, weil hier die Divergenz aller Systeme 180° beträgt, aber besonders in den Fällen, in denen am Scheitel der Kontakt 1 und 2 besteht, kam dieser Umstand deutlich zum Ausdruck. Während die Theorie bei diesem Kontakt alle Divergenzen zwischen 180° und 128°,5 als möglich erscheinen läßt, findet man am Scheitel nur Divergenzen, welche zwischen 137° und 142° liegen, also eine große Annäherung an die Limitdivergenz der Hauptreihe. Auch bei anderen Kontakten dieser Reihe haben wir eine solche Annäherung wahrgenommen, nur kam sie dort weniger deutlich zum Ausdruck, weil die theoretisch möglichen Divergenzen für diese Fälle zwischen engeren Grenzen liegen.

In diesem Kapitel wollen wir nun die Frage zu beantworten versuchen, warum die Pflanze diesen Stellungen den Vorzug gibt, wenn eine konstante Blattstellung am Scheitel besteht.

Zuerst wollen wir aber noch darauf hinweisen, daß man sich diese Annäherung an die Limitdivergenz nicht als eine mathematisch genau beobachtete Tatsache zu denken hat. Die Divergenzbestimmung am Scheitel ist nämlich mit mehreren Schwierigkeiten verbunden. In vielen Fällen liegen die jüngsten Anlagen so dicht am Gipfel des Scheitels, daß eine einigermaßen genaue Ablesung ausgeschlossen ist. Die „Methode der Bestimmung von Orthostichen“ bringt oft Schwierigkeiten mit sich, weil die Querschnitte des Vegetationspunktes in vielen Fällen nur wenig Blätter enthalten, und sie ist, wenn sie angewendet werden kann, nicht absolut sicher, da die älteren Anlagen der Rektipetalität zu Folge bereits kleine Änderungen in ihrer Lage erlitten haben. Diese Umstände sind besonders bei den niederen Kontakten von Bedeutung, weil diese meistens auf steilem Stammscheitel angelegt werden, bei den höheren kann die Bestimmung der Divergenz genauer geschehen, aber hier liegen, wie gesagt, die theoretischen Grenzen viel enger bei einander. Andererseits aber können wir in der Anlegung zweizähliger Kontakte, die bedeutend von den dreizähligen abweichen, einen wichtigen Hinweis darauf haben, daß die Divergenz sich dem Limitwert nähert. Damit sind wir nun zu einer Betrachtung gelangt, die für die Erklärung dieser Annäherung von großer Bedeutung ist.

Aus unseren mathematischen Betrachtungen geht hervor, daß der Kontaktfall mit rechtwinkligem Schnitt der Kontaktspiralen als eine mittlere Lage zwischen zwei Kontaktfällen mit dreizähligen Kontakten zu betrachten ist. Jedoch hat es sich herausgestellt, daß der rechtwinklige Schnitt für Kegelflächen mit verschiedenen Scheitelwinkeln auch bei verschiedener Divergenz auftreten muß. So entspricht auf der Kreiszylinderfläche der rechtwinklige Schnitt

beim Kontakt 1 und 2 einer Divergenz von 144°, auf der Ebene dagegen einer solchen von 132° 46' 47", während auf einer Kegelfläche, für welche $\psi = \pm 100°$ ist, diese Divergenz sehr nahe an 137°,5 kommt (man vergl. S 175). Dem rechtwinkligen Kontakt 2 und 3 entspricht auf der Zylinderfläche eine Divergenz von $\frac{5}{13} \cdot 360° = 138° 28'$, auf der Ebene eine von 139° 37' 25". Für den rechtwinkligen Kontakt 3 und 5 sind diese Divergenzen $\frac{34}{89} \cdot 360° = 137° 39'$ und 137° 26'. Für höhere rechtwinklige Kontakte aus der Hauptreihe wird auf allen möglichen Kegelflächen eine noch größere Annäherung an die Limitdivergenz 137° 30' 28" erreicht.

Jedenfalls zeigen also solche rechtwinkligen Kontakte Divergenzen, die mehr oder weniger der Limitdivergenz nahekommen.

Dies hat uns zu der Annahme geführt, daß es die Kontaktfälle mit rechtwinkligem Schnitt der Kontaktspiralen sind, welche die Pflanze bei der Anlegung der Organe bei konstanter Blattstellung zu realisieren sucht.

Daraus würde dann für die zweireihige Blattstellung folgen, daß darin die jüngsten Anlagen nicht den ganzen Umfang des Scheitels einnehmen, obwohl natürlich die Divergenz 180° sein müßte. Wirklich findet man dann auch in den meisten Fällen dieses Verhalten am Scheitel von Zweigen mit dieser Blattstellung wieder. Da sich jedoch hier die Blattbasen im Laufe ihrer Entwickelung immer soweit ausbreiten, daß sie den ganzen Stengel umfassen (vergl. S. 238), so trifft man öfters bei noch sehr jungen seitlichen Organen eine vollkommene Umfassung des Stengels an.

Beim Kontakt 1 und 2 konnte nach dieser Auffassung die Divergenz zwischen 132° 46' 47" und 144° liegen. Jedoch werden Divergenzen zwischen 132° und 137°,5 in Wirklichkeit nicht beobachtet. Es findet dies unmittelbar darin seine Erklärung, daß die niederen Kontakte fast ausschließlich an sehr steilen Vegetationspunkten angelegt werden, ein Umstand, welcher später noch näher zur Sprache kommen wird.

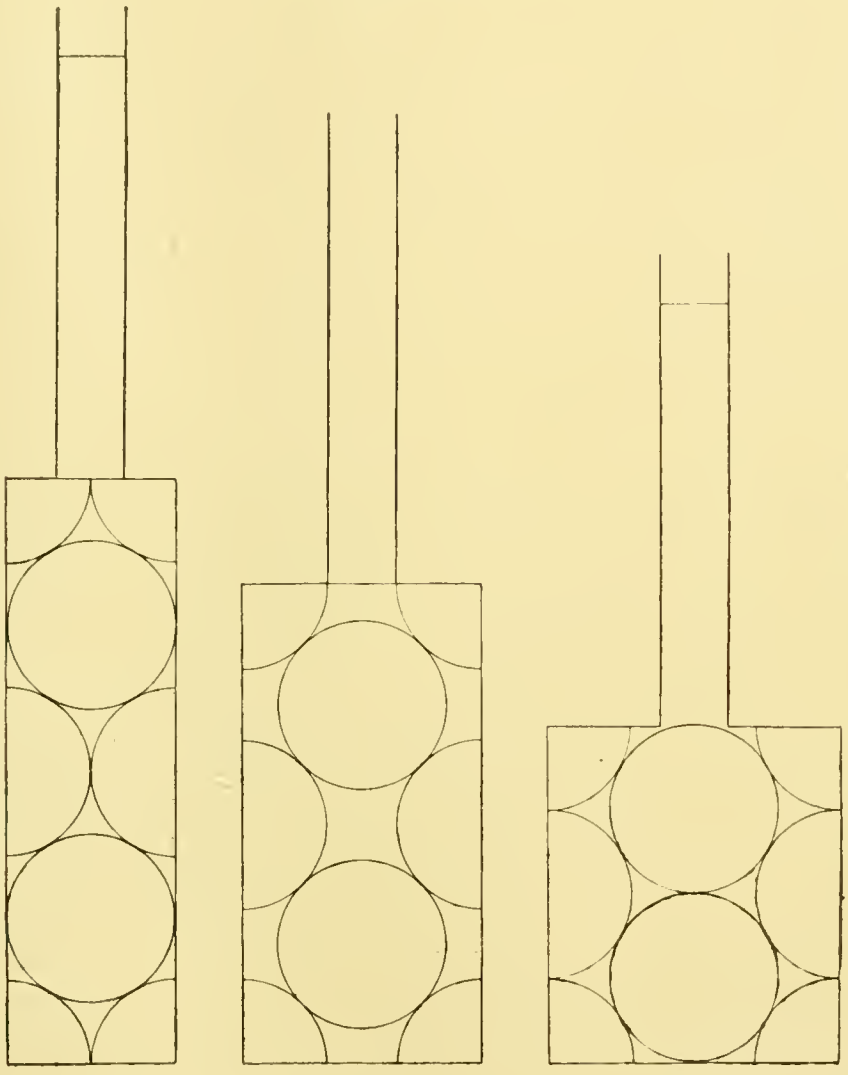
Beim Kontakt 2 und 3 konnte dann eine Divergenz zwischen 138° 28' und 139° 37' erwartet werden, was mit der Beobachtung genügend übereinstimmt. Auch bei den höheren Kontakten aus der Hauptreihe wird die Voraussetzung genügend bestätigt.

Der Kontakt 1 und 3 müßte nach dieser Auffassung mit einer Divergenz zwischen 108° und 104° 45' angelegt werden. In wie weit dies mit der Wirklichkeit übereinstimmt, kann ich noch nicht angeben, weil mir bis heute ein gutes Beispiel für diesen Kontaktfall unbekannt blieb. Hier liegt jedenfalls eine Möglichkeit vor, unsere Auffassung näher zu kontrollieren.

§ 2. Eine mechanische Erklärung. Wir wollen nun versuchen, eine mechanische Erklärung der Bevorzugung rechtwinkliger Kontakte bei der Anlegung zu geben. Obwohl diese Erklärung in einzelnen Punkten noch einer näheren Ausarbeitung bedarf, so geht aus ihr doch hervor, daß wir auch für diesen Fall nicht notwendig an unverständliche innere Kräfte zu denken brauchen.

Betrachten wir nun zuerst wieder die regelmäßigen Kreiskonstruktionen auf einer Zylinderfläche. Denkt man sich dann eine Reihe Kreiskonstruktionen mit ein und demselben Kontakt und mit dem gleichen Kreisradius auf Zylinderflächen von veränderlichem Durchmesser beschrieben, dann lehrt die Berechnung, daß die freie Oberfläche zwischen den Kreisen für den rechtwinkligen Kontakt einen maximalen Wert erreicht. Es möge dies an der Hand eines idealen mechanischen Modells näher erläutert werden.

Fig. 69.



a. b. c.

In Figur 69a ist ein Teil eines Kreissystems mit dem Kontakt 0, 1 und 1 auf einer abgerollten Kreiszylinderfläche dargestellt. Dieser Teil ist so gewählt, daß zwischen den beiden horizontalen begrenzenden Linien die Summe der Kreisinhalte gleich dem Inhalt von vier Kreisen gefunden wird.

Denkt man sich nun, daß der Zylinderumfang zunimmt, daß aber die Kreise dabei mit einander in Kontakt bleiben, dann werden eine Reihe Systeme mit dem Kontakt 1 und 1 durchlaufen und nach einiger Zeit resultiert dasjenige mit rechtwinkligem Kontakt 1 und 1. Die Kreise nehmen alsdann die Stellung ein, welche in Fig. 69b abgebildet wurde. Läßt man den Zylinderumfang noch

mehr zunehmen, dann wird schließlich der Kontakt 1, 1 und 2 erreicht, die Kreise nehmen alsdann die Stellung in Fig. 69c ein.

Obwohl wir nun in unserer Figur nur einen Teil der unendlichen Systeme abgebildet haben, so wird es doch einleuchten, daß für diesen Teil das Verhältnis zwischen freier Zylinderoberfläche und Gesamtkreisoberfläche dasselbe ist wie für das unendliche System. Wenn wir also nachweisen, daß in einer dieser Figuren die freie Zylinderoberfläche eine maximale Größe erreicht, so ist das bei diesem Kontaktfall auch für das unendliche System der Fall.

Man stelle sich nun vor, daß die Kreise unserer Figur die Umrißlinien von materiellen Scheiben darstellen und nehme an, daß diese zwischen zwei Seitenwänden gelegen sind, welche man sich also oben und unten von der Zeichnungsebene zu denken hat. Auch die vertikalen und horizontalen Begrenzungslinien unserer Figur hat man sich als Durchschnitte von Wänden vorzustellen und zwar als dehnbare, welche sich immer an die Kreise anschließen. Nehmen wir nun noch an, daß der Raum, welcher durch die genannten Wände begrenzt wird, in Verbindung steht mit einer Röhre, wie das in unserer Figur angegeben ist, welche die gleiche Dicke besitzt wie die materiellen Scheiben, so können wir uns den Raum zwischen den Kreisen mit einer Flüssigkeit gefüllt denken.

Steht nun diese Flüssigkeit in Fig. 69a bis oben in der Steigröhre, wie das in unserer Darstellung angegeben wurde, dann wird sie, wenn die Stellung aus Fig. 69b erreicht ist, bis an den tiefsten Punkt dieser Röhre gesunken sein, um bei der Stellung in Fig. 69c wieder bis zu der Höhe wie in Fig. 69a zu steigen.

Eine einfache Berechnung lehrt nun, daß in Fig. 69b auch wirklich die tiefste Stellung der Flüssigkeit erreicht wird, man wird dies ohne weiteres einsehen.

Das mechanische Modell kann also sehr gut zur Demonstrierung des oben Gesagten dienen, es lehrt aber noch mehr. Man bedenke, daß die Flüssigkeit durch ihr eigenes Gewicht immer die tiefste Stelle einzunehmen sucht, dann wird es einleuchten, daß die Stellung in Fig. 69b den Zustand stabilen Gleichgewichts darstellt, wenn man annimmt, daß die Scheiben immer mit einander in Kontakt bleiben müssen, während aber der Zylinderumfang sich willkürlich vergrößern kann. Existiert zwischen den Scheiben keine Reibung, so wird diese Stellung unmittelbar eingenommen; gibt es eine solche Reibung, dann kann die Stellungsänderung dadurch zwar gehindert werden, aber wirklich stabiles Gleichgewicht besteht auch dann nur bei der Stellung Fig. 69b.

Daß wir für unsere Darlegungen einen Teil eines Systems mit dem Kontakt 1 und 1 wählten, hatte darin seinen Grund, daß hierfür sich die Figur am einfachsten gestaltet. Man kann aber dieselbe Betrachtung ebensogut mit jedem anderen Kontakt anstellen und wird immer zu dem Resultat kommen, daß bei der beschriebenen Versuchsanordnung der rechtwinklige Kontakt einen stabilen Gleichgewichtszustand darstellt.

Man kann nun weiter die hier beschriebene Einrichtung in folgender Weise erweitern: Man denke sich das Modell in der Form einer Zylinderfläche ausgeführt und nehme an, daß die (jetzt gebogenen) Scheiben an der Innen- und Außenseite von dehnbaren Wänden begrenzt werden. Die vertikalen Begrenzungswände unserer

Figur fallen dadurch weg. Wenn man sich dann noch das Kreissystem bis ins Unendliche fortgesetzt denkt, so können auch die horizontalen Wände wegfallen.

Werden dann die Scheiben, z. B. durch eine anziehende Kraft, immer mit einander in Kontakt gehalten, herrscht aber in dem freien Zwischenraum ein Druck, so werden auch hier die Systeme mit rechtwinkligem Kontakt im stabilen Gleichgewicht sich befinden. Die Größe des Druckes ist dabei ohne Bedeutung, er kann also auch unendlich klein sein.

Versucht man nun die hier für Systeme auf der Zylinderfläche gegebenen Betrachtungen auch auf solche in der Ebene und auf der Kreiskegelfläche zu übertragen, so stößt man dabei auf zahlreiche Schwierigkeiten. Es konnte mir bis heute nicht gelingen, mit Sicherheit zu entscheiden, ob auch bei solchen Systemen die rechtwinkligen Kontaktfälle diejenigen sind, bei welchen die freie Oberfläche eine maximale Größe erreicht[1]). Wohl deuten annähernde Berechnungen darauf hin, daß diese Eigenschaft auch für die beiden Systemarten gilt, aber sie konnten keine absolute Gewißheit bringen.

Wenn nun aber die Kegelflächen steil werden, so zeigen die Kreissysteme auf solchen Flächen so viel Übereinstimmung mit denjenigen auf Zylinderflächen, daß für solche Systeme sicherlich die genannte Eigenschaft als richtig angenommen werden kann. Andererseits wird es einleuchten, daß, wenn die Kreise sehr klein werden, auch bei stumpfen Kegelflächen die freie Oberfläche bei rechtwinkligem Kontakt ein Maximum erreicht. Nun sind, wie das aus dem früher Gesagten folgt, gerade diese beiden Systemarten für uns von Bedeutung. Wir haben ja gesehen, daß die niederen Kontakte besonders auf steilen Kegelflächen, die höheren auf stumpfen angetroffen werden. Wir können also die Resultate, zu welchen wir durch die Betrachtung unseres mechanischen Modells gelangt waren, auch auf diese Kreissysteme übertragen.

Denkt man sich alsdann das Modell in der Form einer Kegelfläche konstruiert, sodaß die materiellen Scheiben zwischen zwei dehnbaren Kegelflächen gelegen sind[2]) und nimmt man wieder an, daß die Scheiben mit einander in Kontakt bleiben müssen, daß aber in dem freien Zwischenraum ein gewisser Druck herrscht, so wird es einleuchten, daß erst dann stabiles Gleichgewicht bestehen kann, wenn der Scheitelwinkel einen solchen Wert hat, daß die Scheiben ein rechtwinkliges Kontaktsystem bilden.

Es wird nun deutlich sein, daß diese Erwägungen uns zu der Annahme geführt haben, daß am Sproßscheitel ähnliche Verhältnisse vorliegen, wie in dem beschriebenen mechanischen Modell. Der Druck im Raum zwischen den jungen kreisförmigen Anlagen wird hier durch das aktive Wachstum der freien Stammoberfläche verursacht. Daß es eine Kraft gibt, welche den Kontakt der Anlagen

1) Die Schwierigkeiten, welche einer Beantwortung dieser Frage sich entgegenstellen, liegen in der Lösung folgender Aufgabe: Es sind 4 Kreise gegeben mit verschiedenen Radien, Kreis 1 tangiert Kreis 2, dieser letzte tangiert Kreis 3, dieser wieder Kreis 4 und endlich tangiert dieser Kreis wieder Kreis 1. Man fragt, bei welcher Stellung der Kreise der Zwischenraum, welchen sie einschließen, ein Maximum wird. Theoretisch stehen der Lösung dieser Frage mittels Differentialrechnung keine Schwierigkeiten im Wege, praktisch aber sind die Gleichungen, zu welchen man gelangt, nicht lösbar.

2) Darunter wollen wir hier solche verstehen, deren Scheitelwinkel nach Belieben größer oder kleiner werden kann.

nach ihrer ersten Entwicklungsphase aufrecht erhält, folgt aus der Beobachtung, daß von diesem Moment ab der Kontakt zwischen den jungen Anlagen meistens lückenlos besteht. Welcher Art diese Kraft ist, darüber läßt sich bis jetzt wenig aussagen, vielleicht hat man hier an die Spannkraft der Cuticula der Scheitelkuppe zu denken. Es bleibt dann aber noch die Frage, wie wir uns vorzustellen haben, daß die Pflanze den Scheitelwinkel der Kegelfläche ändern kann, wenn das auftretende System kein solches mit rechtwinkligen Kontakten ist. Daß dabei die Steigung des Scheitels aktiv geändert werden sollte, wie wir das bei dem mechanischen Modell annahmen, ist sehr unwahrscheinlich. Die Pflanze besitzt jedoch noch ein anderes Mittel, um diesen Zweck zu erreichen: die Anlegung der neuen Organe auf einem anderen Teil des Scheitels mit größerer oder geringerer Neigung. Hiermit aber sind wir an Betrachtungen angelangt, welche zu der Besprechung veränderlicher Blattstellung gehören, worauf die folgenden Kapitel Bezug haben.

Mag nun auch die hier angestellte Betrachtung in einigen Punkten einer Ergänzung bedürfen, so eröffnet sie dennoch die Aussicht, auch die Divergenzen, welche am Scheitel angelegt werden, mit rein mechanischen Gründen zu erklären.

Schließlich wollen wir noch bemerken, daß das in diesem Kapitel besprochene ideale mechanische Modell eine gewisse Übereinstimmung zeigt mit der Versuchsanordnung, welche OSBORNE REYNOLDS [1]) bei seinen interessanten Betrachtungen über die Ursache der Schwerkraft beschrieben hat.

---

1) On the Dilatancy of Media composed of Rigid Particles in Contact. Philosoph. Magazine. Vol. XX, 5th series, 1885, p. 469—481. — Papers on Mechanical and Physical subjects. Vol. II, 1901, p. 203—227. Vol. III, 1903, The Sub-Mechanics of the Universe. Cambridge. — On an Inversion of Ideas as to the Structure of the Universe (The Rede Lecture, June 10, 1902) Cambridge 1903.

Zweiter Abschnitt.

Veränderliche Blattstellung.

Kapitel I. Anlegung neuer Organe im Anschluß an vorhandene bei veränderlicher Blattstellung.

§ 1. Beobachtungstatsachen. Nachdem wir in Kap. II S. 218 die stets auftretenden Tatsachen besprochen haben, als deren Folge die Fortsetzung einer konstanten Blattstellung betrachtet werden kann, so wollen wir jetzt diejenigen zusammenstellen, welche sich beim Studium veränderlicher Stellungen am Scheitel regelmäßig finden, und darauf den Nachweis zu erbringen versuchen, daß die eigentümlichen Übergangsfiguren, welche bei der Änderung einer Blattstellung auftreten, notwendig aus diesen Tatsachen hervorgehen müssen. Es sind diese Beobachtungen die folgenden:

1. Jede Änderung der Blattstellung ist begleitet von einer Zu- oder Abnahme des relativen Organdurchmessers (d. h. des Faktors *b*).

2. Die Anlegung neuer Organe findet immer in den größeren Lücken zwischen den älteren statt.

3. Die neuen Anlagen sind, nach Beendigung ihrer ersten Entwicklungsphase, mit mindestens zwei älteren in unmittelbarem Kontakt.

4. Die Änderung der Blattstellung geschieht meistens sprungweise, d. h. nachdem eine beschränkte Zahl Blätter angelegt ist, welche untereinander keine regelmäßige Stellung besitzen, kommt wieder eine konstante Blattstellung zum Vorschein.

Die unter 2 und 3 angegebenen Beobachtungen stimmen ganz und gar mit zwei von denjenigen überein, welche wir auf S. 220 bei der Betrachtung konstanter Blattstellung angaben. Die unter 1 genannte dagegen bildet einen wichtigen Unterschied zwischen konstanter und veränderlicher Blattstellung. Was endlich die unter 4 genannte anbelangt, so zeigt diese wieder große Übereinstimmung mit derjenigen, welche wir in § 2 auf S. 220 als vierte Beobachtungstatsache für die Erklärung des Auftretens konstanter Blattstellungen angaben. Denn diese letzte Beobachtung lehrte uns, daß die kleinen Unregelmäßigkeiten bei konstanter Blattstellung wieder nachträglich aufgehoben werden. Die jetzt mit 4 bezeichnete dagegen gibt an, daß bei veränderlicher Blattstellung die Änderung der Stellung zwar bedeutend sein kann, daß aber, wenn sie einmal vorüber

ist, die dann noch bestehenden Unregelmäßigkeiten weiter aufgehoben werden. Man könnte also diese letzte Beobachtungstatsache auch folgendermaßen schreiben: „die Ursache, welche eine nicht konstante Blattstellung bewirkt, ist meistens nur in einer kurzen Zone der Pflanzenachse wirksam".

Wir müssen jedoch das Obenstehende noch in zweierlei Hinsicht vervollständigen. Erstens sei darauf hingewiesen, daß auch bei veränderlicher Blattstellung die Umrißlinien der Ansatzstellen der jüngsten Anlagen als Kreise auf einer Kreiskegelfläche zu betrachten sind. Es geht das wieder aus der Beobachtung hervor, daß dieselben sich bei Obenansicht oder im Querdurchschnitt bei steilen Vegetationsscheiteln als Folioiden, bei flachen als wirkliche Kreise zeigen. Zweitens erinnern wir daran, daß wir es im vorigen Abschnitt wahrscheinlich gemacht haben, daß die Pflanze die rechtwinkligen Kontaktfälle bei konstanter Blattstellung bevorzugt, und wir müssen also auch jetzt annehmen, daß, sobald die Unregelmäßigkeit in der Stellung vorüber ist, wieder ein neues rechtwinkliges Kontaktsystem auftritt. Auch diese Annahme wird durch die Beobachtung bestätigt. Wir brauchen sie aber hier nicht als eine neue einzuführen, weil sie aus unseren Betrachtungen über konstante Blattstellung unmittelbar hervorgeht; dennoch wird diese Beobachtungstatsache sich für unsere weiteren Ableitungen als von größtem Interesse herausstellen. Geht doch aus ihr unmittelbar hervor, daß nur Übergänge bestimmter rechtwinkliger Kontaktsysteme in andere, in welchen sich die Kontaktspiralen ebenfalls unter rechten Winkeln schneiden, betrachtet werden müssen.

§ 2. Die Ursachen für eine Änderung der Blattstellung. Obwohl die im vorigen Paragraphen angegebenen Beobachtungen für den weiteren Ausbau unserer Theorie vollständig genügen, und die inneren oder äußeren Ursachen, welche diesen Tatsachen zu Grunde liegen, dabei ohne Bedeutung sind, so wollen wir doch in diesem und in den beiden folgenden Paragraphen die Frage zu beantworten suchen, ob sich hierüber keine wahrscheinliche Hypothese aufstellen läßt.

Wir haben soeben gezeigt, daß der Hauptunterschied zwischen den Beobachtungen bei konstanter und nichtkonstanter Blattstellung der war, daß der Wert von b bei der letzten Stellung, statt konstant zu bleiben, zu- oder abnimmt. Auch bemerkten wir, daß diese Änderung eine sprungweise ist. Es läuft also die gestellte Frage darauf hinaus, die Ursache für diese sprungweise Änderung des Faktors b anzugeben.

Nun zeigt schon eine oberflächliche Vergleichung von Vegetationspunkten bei Teilen derselben Pflanzenachse, auf welchen verschiedene Blattstellungen vorkommen, daß die höheren Kontaktfälle, d. h. solche mit kleinen Werten von b, meistens angetroffen werden auf flachem Scheitel, während die niederen Stellungen mit großen Werten von b auf Teilen gefunden werden, die einen steilen Vegetationspunkt besitzen. So trifft man z. B. an dem ziemlich steilen Scheitel der Stengel von *Helianthus annuus* den Kontakt 2 und 3 an, d. h. also den Wert $b = \pm 0{,}28$, hingegen am flachen Scheitel der Blumenköpfe öfters den Kontakt 34 und 55, bei welchem $b = 0{,}015$. Eine solche Abnahme von b wird übrigens ganz allgemein beobachtet beim Übergang in die Blütenregionen, und es

ist eine bekannte Tatsache, wie sich dabei die Vegetationskegel abstumpfen.

Es führten uns diese Erwägungen zur Aufstellung folgender Hypothese:

„Eine der Ursachen für die Änderung einer Blattstellung ist die Ab- oder Zunahme der Steilheit desjenigen Teils des Vegetationsscheitels, auf dem die jüngsten Anlagen hervortreten, und zwar wird eine Abnahme der Steilheit ein höheres[1]), eine Zunahme ein niedrigeres Kontaktsystem hervorrufen."

Ob nun diese Ursache die einzige ist, welche hier in Betracht kommt, möge dahingestellt bleiben, daß sie aber in sehr vielen Fällen eine bedeutende Rolle spielt, erachte ich für sehr wahrscheinlich.

§ 3. Eine Verschiebungshypothese. Auf welche Weise die Änderung der Steilheit des Scheitelteiles, auf welchem die neuen Anlagen hervortreten, als mechanische Notwendigkeit die Ab- oder Zunahme des Faktors *b* mit sich bringt, darüber läßt sich wenig Bestimmtes aussagen. Man kann sogar bei dem Vorgang dieser Änderung der Steilheit selbst zwei Möglichkeiten unterscheiden. Erstens kann man annehmen, daß die Abstumpfung oder Zuspitzung des Vegetationspunktes sich über einen solchen Teil desselben erstreckt, auf dem sich auch ältere, bereits angelegte Organe befinden, welche sich alsdann heben oder senken müssen; zweitens aber kann man annehmen, daß diese Änderung der Steilheit sich nur auf den Teil des Scheitels erstreckt, der oberhalb des Streifens liegt, auf dem die bereits angelegten Organe stehen. Weil man nun am Scheitel nur den fertigen Zustand beobachten kann, nicht aber die Änderungen, welche sich darin im Laufe der Entwicklung vollziehen, so ist es schwer, zwischen diesen Annahmen durch die Beobachtung eine Wahl zu treffen, und vorläufig muß man beide als gleich berechtigt annehmen. Die erste derselben führt nun zu der Aufstellung einer Hypothese, welche die angegebenen Tatsachen in so einfacher Weise erklärt, daß wir dieselbe hier nicht stillschweigend übergehen wollen, obwohl die Konsequenzen, zu denen sie führt, wie sich bald herausstellen wird, nicht durch die Beobachtung bestätigt werden.

Denkt man sich nämlich, daß bereits angelegte, aber noch junge seitliche Sprossungen, sich über die Oberfläche des Scheitels verschieben können, während dabei die Umrißlinien ihrer Ansatzstellen stets kreisförmig bleiben, nimmt man weiter an, daß die älteren Organe nicht mehr beweglich sind, und daß das Hauptverhältnis (*a*) bei der Änderung der Steilheit des Scheitels dasselbe bleibt, führt man dann endlich noch die Annahme ein, daß die Organe immer so verschoben werden, daß sie mit einander in Kontakt bleiben, so wird der betrachtete Vorgang eine Zustandsänderung darstellen, welche ganz und gar übereinstimmt mit derjenigen, welche wir auf S. 158 bei der Betrachtung ähnlicher Kreissysteme auf einer Kreiskegelfläche mit veränderlichem Scheitelwinkel untersucht haben. Unter diesen Voraussetzungen ist es also klar, daß eine Abnahme der Steilheit des Scheitels eine Zunahme des Faktors *b* mit sich bringen muß und umgekehrt. Wenn wir also nun noch

1) Unter einem höheren Kontaktsystem wird hier ein solches mit kleinerem Werte von *b* verstanden.

einen vom Scheitel aus abwärtsgerichteten Druck annehmen, so wird, möge dieser Druck auch unendlich klein sein, die Änderung immer in der Weise geschehen, daß ein neues System aus derselben Kontaktreihe resultieren würde. Hiermit wäre dann sogleich eines der Hauptgesetze der veränderlichen Blattstellung erklärt.

Nun läßt sich gegen die hier entwickelte „Verschiebungshypothese" einwenden, daß daraus hervorgehen würde, daß die Anlagen in der veränderten Blattstellung dasselbe Hauptverhältnis (a) aufweisen müßten, wie im alten, und daß also bei konsequenter Durchführung dieser Annahme dieses Verhältnis bei der ganzen Entwicklung einer Pflanze konstant bleiben müßte. Das Verhältnis der Durchmesser zweier in der Hauptspirale des Scheitels eines Köpfchens der Sonnenblume aufeinander folgender Anlagen sollte also dasselbe sein, wie das Hauptverhältnis, welches bei der Blattstellung am Stengel beobachtet wird. Nun stimmt das gar nicht mit der Beobachtung überein, man kann sogar als allgemeine Regel diese aufstellen, daß bei Abnahme des Faktors b der Faktor a meistens zunimmt. Man konnte nun natürlich als neue Annahme bei der angegebenen Verschiebungshypothese die Voraussetzung einführen, daß gleichzeitig mit der Verschiebung der jungen Anlagen über den Scheitel auch das Verhältnis der Durchmesser eine Änderung erfährt, hierdurch büßt aber die Hypothese nicht nur ihre Einfachheit ein, sondern es läßt sich auch für diese Änderung des Faktors a einstweilen keine mechanische Erklärung geben.

Es gibt aber noch andere Argumente, welche gegen die Verschiebungshypothese anzuführen sind und ihre Unhaltbarkeit klar machen, es möge dies an einem bestimmten Beispiel erläutert werden. Einer der verbreitetsten Fälle veränderlicher Blattstellung ist der Übergang der zweizeiligen Blattstellung in eine solche mit dem Kontakt 1 und 2, und einer Divergenz, welche sich der Limitdivergenz der Hauptreihe nähert. Die Art, auf welche dieser Übergang zu stande kommt, ist schematisch in Fig. 2 Tafel XIV dargestellt, woraus abzulesen ist, daß die Divergenz von 180°, welche zwischen den Anlagen 1 und 2 besteht, sprungweise in eine solche von etwa 155° zwischen 2 und 3 übergeht. Die Verschiebungshypothese wäre nun genötigt anzunehmen, daß die Anlage 3 ursprünglich auch mit der Divergenz 180° angelegt war, und daß sie nachträglich um einen Winkel von etwa 25° verschoben wurde. Nun werden wir später sehen, daß der Übergang von der zweizeiligen Blattstellung in eine solche mit dem Kontakte 1 und 2 in vielen Fällen mit einem ganz bestimmten Blatt anfängt, sodaß wir dann voraussagen können, welches Blatt die Lage der Folioide unserer Konstruktion einnimmt, die wir mit 3 bezeichneten. Nun lehrt in solchen Fällen die direkte Beobachtung, daß dieses Blatt in keiner einzigen Phase seiner Entwicklung eine Divergenz besitzt, die 180° in bezug auf Blatt 2 beträgt, daß es aber vom ersten Moment des Sichtbarwerdens ab bereits annähernd die richtige Lage einnimmt. Wohl kann nachträglich bei der weiteren Entwicklung eine (scheinbare) geringe Änderung der Lage auftreten, indem sich die Anlage nicht nach allen Richtungen gleich schnell ausbreitet, aber eine Verschiebung um 25° wird nicht beobachtet.

Es wäre nun leicht, diesem Beispiel noch andere anzureihen, es wird jedoch schon genügen, um deutlich zu machen, warum wir

eine Verschiebungshypothese, wie sie hier oben entwickelt wurde, nicht für die richtige Erklärung der Verhältnisse halten können.

Schließlich weisen wir noch darauf hin, daß die oben betrachtete Verschiebungshypothese zwar mit derjenigen, welche von SCHWENDENER aufgestellt wurde, in gewisser Hinsicht Übereinstimmung zeigt, aber davon in wichtigen Punkten abweicht. Wie bereits früher bemerkt wurde, wollen wir eine Verschiebung freier Enden seitlicher Organe durch ihren gegenseitigen Druck durchaus nicht in Abrede stellen.

§ 4. Andere Erklärungsmöglichkeit. Aus den oben angeführten Gründen werden wir eine Verschiebung bereits angelegter Organe über die Oberfläche des Scheitels nicht annehmen und voraussetzen, daß auch, wenn die vorhandenen Sprossungen bei der Änderung der Steilheit des Scheitels emporgehoben oder gesenkt werden, dennoch keine Divergenzänderung eintritt. Es braucht dabei selbst das ältere Kontaktsystem gar keine Änderung zu erfahren, wenn nur die Ansatzstellen ihre relative Breite beibehalten, und das ist eine Voraussetzung, die große Wahrscheinlichkeit besitzt, wenn man annimmt, daß die Neigungsänderung durch gleichmäßiges aktives Wachstum in allen bereits angelegten Teilen bewirkt wird. Warum nun aber die neu angelegten Organe ein anderes Kontaktsystem, d. h. einen anderen Wert von b aufweisen, läßt sich folgendermaßen begreiflich machen: Wir haben schon früher darauf hingedeutet, daß man sich das Auftreten der regelmäßigen Stellung der Blätter als die Folge einer inneren gleichmäßigen Verteilung der Nahrungssäfte vorstellen könnte. Es ist nun einzusehen, daß, solange die Form des Scheitels konstant bleibt, auch diese gleichmäßige Verteilung fortgesetzt werden muß, daß aber, sobald der Scheitel seine Gestalt ändert, auch die gleichmäßige Verteilung der Nahrungssäfte unterbrochen wird, sodaß der Ort für das Hervortreten einer neuen Anlage nun nicht mehr in derselben Weise bestimmt ist, wie bei konstanter Blattstellung.

Warum nun eben für die Entwicklungsstelle wieder die größeren Lücken gewählt werden, und warum die Ausbreitung der neuen Anlage soweit fortschreitet, bis Kontakt mit mindestens zwei älteren aufgetreten ist, warum ferner die relativen Durchmesser bei der Abnahme der Steilheit der Kegelfläche zunehmen, und umgekehrt, das alles sind Fragen, worüber sich weiter nichts aussagen läßt.

Bevor wir daran gehen, die Theorie weiter aufzubauen, sei nachdrücklich darauf hingewiesen, daß die hypothetischen Betrachtungen der drei letzten Paragraphen mit unseren weiteren Auseinandersetzungen gar nicht in direkter Beziehung stehen und dieselben niemals als Einwendungen dagegen angeführt werden können. Alle unsere weiteren Ableitungen sind ausschließlich begründet in den Beobachtungstatsachen, welche wir im ersten Paragraphen dieses Kapitels besprochen haben.

§ 5. Fälle, in welchen die neue Blattstellung bestimmt wird durch den Wert des Faktors b. Wir erinnern nochmals daran, daß die Beziehung zwischen b und α für Kontaktsysteme auf verschiedenen Kegelflächen annähernd dargestellt wird durch die graphische Darstellung II Tafel II, daß aber für verschiedene Werte des Scheitelwinkels der Kegelfläche die Kurve für den Kontakt 1 und 2 merkbare Abweichungen zeigt. Die beiden

Fälle, welche am meisten voneinander verschieden sind, wurden in der Darstellung III Tafel III gegeben. Auch die Kurven für den Kontakt 1 und 1 und für den Kontakt 0 und 1 sind für verschiedene Kegelflächen verschieden. Es sei nun aber gleich bemerkt, daß die Beobachtung, wie wir auch bereits früher erwähnten, lehrt, daß die niederen Kontaktfälle fast immer auf steilen Kegelflächen gefunden werden. Wir können also für alle in der Natur verwirklichten Fälle praktisch die graphische Darstellung II Tafel II anwenden, was unsere Betrachtungen bedeutend vereinfacht.

Wenn nun die Anlegung einer neuen Blattstellung in der Weise geschieht, daß die neuen Anlagen einen relativen Durchmesser besitzen, der größer als etwa 0,58 ist, so wird es einleuchten, daß notwendigerweise ein System mit dem Kontakt 1 und 1 und eine Divergenz von 180° auftreten muß. Die erste Anlage, welche mit diesem Durchmesser hervortritt, wird nach unseren Auseinandersetzungen in einer der größeren Lücken zwischen den bereits vorhandenen Organen zu suchen sein und das folgende Organ steht dem ersten diametral gegenüber. In diesem Fall wird also die neue Blattstellung ausschließlich bestimmt durch den Wert von *b* der neu angelegten seitlichen Sprossung.

Man sieht hier einen Weg für das Zustandekommen einer Blattstellung aus der Hauptreihe, welcher sich, wie einfach er auch scheinen mag, als von größter Wichtigkeit für die Erklärung des häufigen Vorkommens dieser Reihe in der Natur herausstellen wird.

Es läßt sich jedoch aus der genannten graphischen Darstellung noch ein zweiter Schluß ziehen. Würden nämlich die neuen Organe mit einem Durchmesser angelegt, welcher zwischen 0,58 und 0,38 liegt, so muß nach dieser Darstellung auch notwendig ein System mit dem Kontakt 1 und 2 resultieren. Zwar können die ersten Anlagen, welche mit dieser Breite angelegt werden, durch ihren Anschluß an ältere eine unregelmäßige Stellung einnehmen, aber sobald die Ursache, welche die Änderung der Blattstellung veranlaßte, aufhört und die regulierende Wirkung eintritt, wird die regelmäßige Stellung der Blätter wieder hergestellt. Es wird sich außerdem noch herausstellen, daß diese nachträglichen Änderungen in vielen Fällen nur sehr gering zu sein brauchen, weil der Anschluß an ältere Anlagen oft derart ist, daß die regelmäßige Stellung bereits von selbst annähernd erreicht wird.

Es ist dies eine zweite nicht weniger bedeutende Möglichkeit, welche zu einer Blattstellung aus der Hauptreihe führen muß, und wir werden bald sehen, daß auch dies in der Natur eine wichtige Rolle spielt.

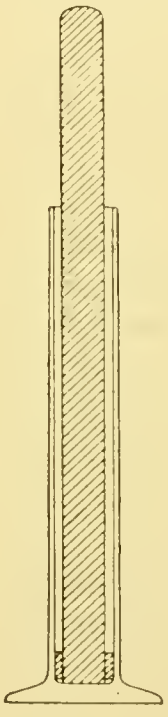
Werden aber die neuen Bildungen mit einem relativen Durchmesser zwischen 0,38 und 0,28 angelegt, dann bestehen nach der graphischen Darstellung zwei Möglichkeiten: es kann eine Blattstellung aus der Hauptreihe, und zwar eine solche mit dem Kontakte 2 und 3 auftreten, aber es kann auch eine solche aus der 1. Nebenreihe und zwar diejenige mit dem Kontakt 1 und 3 resultieren. Welcher von diesen beiden Fällen eintreten wird, hängt davon ab, ob die neuen Organe sich, nachdem die Ursache, welche die Änderung bewirkte, aufgehoben und die regulierende Wirkung eingetreten ist, in einer Stellung befinden, welche mehr in die Nähe

des ersten oder des letztgenannten Systems fällt. Es wird dies also bedingt durch die Form der Figur, welche die bereits angelegten Organe bilden. In diesen Fällen wird die neu auftretende Blattstellung also nicht mehr ausschließlich durch den Wert des Faktors *b* bestimmt.

Eine gleiche Betrachtung läßt sich natürlich auch anstellen, wenn der relative Organdurchmesser noch kleiner wird als 0,28, nur werden die möglichen Kontaktsysteme immer zahlreicher. Nach dem Gesagten wird es nun klar sein, daß wir zuerst die Anschlußfiguren, welche bei der Änderung einer Blattstellung auftreten, zu untersuchen haben, um angeben zu können, welche der verschiedenen möglichen Systeme in der Natur zu erwarten sind.

§ 6. Geometrische Konstruktionen und Modelle für veränderliche Blattstellungen. Für die Untersuchung der Übergangsfiguren bei veränderlicher Blattstellung wollen wir in erster Linie Konstruktionen tangierender Kreise auf der Kreiszylinderfläche verwenden. Es ist bekannt, daß solche Konstruktionen bereits von SCHWENDENER angefertigt wurden, und daß dieser Forscher daraus wichtige Schlüsse auf die Art der Übergänge verschiedener Stellungen in andere gezogen hat. Für einige seiner Resultate, welche größtenteils auf empirischem Wege abgeleitet wurden, wollen wir auch einen näheren Beweis erbringen.

Fig. 70.



Nun läßt sich nicht leugnen, daß diese Konstruktionen ziemlich viel von unserem Vorstellungsvermögen fordern; man kann aber diese Schwierigkeit dadurch teilweise heben, daß man sich auf folgende Weise ein Modell anfertigt, durch welches es möglich wird, die wichtigsten Übergangsfiguren räumlich darzustellen. Man nehme ein genau zylindrisches Standglas und stelle darin einen hölzernen Kern in der Weise auf, daß ein überall gleich breiter Raum zwischen dem Holzkern und der Glaswand freibleibt, was man dadurch erreichen kann, daß man am unteren Ende des Holzkerns einen hölzernen Ring anbringt, welcher genau in das Standglas hineinpaßt (man siehe Fig. 70). Darauf fertige man eine Anzahl Scheiben aus plastischem Material von verschiedenen Durchmessern an, welche eine kleinere Dicke besitzen als die Breite des freien Raums zwischen Holzkern und Glaswand beträgt[1]). Wenn man nun die Scheiben gegen den Teil des Holzkerns andrückt, der aus dem Standglas hervorragt, dann kann man sie so umbiegen,

1) Als plastisches Material wurde von mir eine Pasta benutzt, welche von den Kupferstechern angewendet wird und die man dadurch erhält, daß man $^1/_2$ Kilo Pech mit 1 Kilo Bienenwachs zusammenschmilzt, daranf 50 Gramm venetianischen Terpentins zufügt und diese Masse nach der Abkühlnng mit Schweinefett knetet, bis die gewünschte Plastizität erreicht wird. (Dieses Rezept stammt von DAKE: Bekuopte Handl. v. d. Techniek der Etskunst. Amsterdam; ich verdanke es dem Amenuensis des Mikrobiologischen Laboratoriums der Technischen Hochschule, Herrn L. J. KOKEE.) Nach der Anfertigung werden die Scheiben mit Mehl bestreut, wodurch verhindert wird, daß sie aneinander, an der Glaswand und am Holzkern kleben. Das Material behält selbst nach Jahren die gleiche Beschaffenheit und die alten Scheiben können sogleich wieder zur Anfertigung neuer benutzt werden. Besonders dieser Umstand ließ mich diese Pasta vor anderen Substanzen bevorzugen.

daß sie in den freien Zwischenraum nach unten gleiten können. Läßt man die Durchmesser der Scheiben nun in bestimmter Weise variieren, so kann man alle später zu beschreibenden Übergangsfiguren verwirklichen.

Die Konstruktionen auf der Kreiszylinderfläche können aber doch niemals ein Bild geben, das die Übergangsfiguren, welche in der Natur beobachtet werden, genau darstellt. Es kommen ja diese letzten Übergangsfiguren auf einer Kreiskegelfläche zustande, und wir sind also, um Konstruktionen zu erlangen, die besser den natürlichen Zuständen entsprechen, auf Folioidenkonstruktionen mit veränderlichem Wert von *b* angewiesen. Wir haben deshalb auch für die wichtigsten Übergangsfälle solche Konstruktionen angefertigt; die ausführliche Besprechung wird später erfolgen und es wird sich dabei herausstellen, daß sie wirklich in ausgezeichneter Weise zur Darstellung fast naturgetreuer Figuren verwendet werden können. Dennoch muß bemerkt werden, daß die Anfertigung solcher Konstruktionen ziemlich zeitraubend ist und sich nicht in so einfacher Weise ausführen läßt, wie diejenigen von Systemen auf einer Kreiszylinderfläche. Darum haben wir in bestimmten Fällen nur die letzteren für die Erklärung unserer Betrachtungen angewendet. Wenn man sich nun aber Rechenschaft von der Tatsache gibt, daß alles, was sich von Systemen auf der Zylinderfläche sagen läßt, auf Folioidensysteme übertragbar ist, so hat eine solche Behandlungsweise nur den Nachteil, daß sie ein wenig mehr von unserem Vorstellungsvermögen fordert.

§ 7. Haupteigenschaften der geometrischen Konstruktionen. Bevor wir an die Besprechung bestimmter Übergangsfälle herantreten, wollen wir noch einige wichtige allgemeine Bemerkungen über die geometrischen Konstruktionen vorausschicken.

Schon öfters wurde darauf hingewiesen, daß die Änderung des Faktors *b* meistens eine sprungweise ist, und daß, nachdem einige wenige Blätter mit Zwischenwerten von *b* angelegt sind, bald wieder eine bestimmte regelmäßige Blattstellung zustande kommt. Es muß dies also auch in den geometrischen Konstruktionen zum Ausdruck kommen. Mehrere der von SCHWENDENER dargestellten Schemas zeigen dieses Verhalten ganz richtig, dagegen muß bemerkt werden, daß die von CORRENS angefertigte Konstruktion, welche von SCHWENDENER[1]) im Jahre 1895 veröffentlicht wurde und auch von WEISSE in GOEBELS „Organographie"[2]) zur Darstellung gebracht worden ist, nicht die allgemein vorkommenden Übergangsverhältnisse wiedergeben kann, weil die Abnahme des Faktors *b* in dieser Figur viel langsamer geschieht als meistens in der Natur beobachtet wird.

Wir haben im vorigen Abschnitt nachgewiesen, daß bei konstanter Blattstellung die Kontaktsysteme mit rechtwinkligen Kontakten von den Pflanzen bevorzugt werden, und es läuft also der Übergang eines Stellungsverhältnisses in ein anderes darauf hinaus, daß sich ein rechtwinkliges Kontaktsystem in ein anderes, ebenfalls rechtwinkliges ändert. Nun fanden wir auf S. 72, daß das Verhält-

---

1) Die jüngsten Entwicklungsstadien seitlicher Organe und ihr Anschluß an bereits vorhandene. Sitz.-Ber. Berliner Akademie, 1895, S. 645—663.

2) Organographie der Pflanzen usw. Jena, 1898—1901, S. 66.

nis b_1, der Werte von b für zwei in einer bestimmten Kontaktreihe aufeinander folgende rechtwinklige Kontaktsysteme sich dem Wert $\chi = 0{,}61803$ nähert, wenn immer höhere Kontakte betrachtet werden, während auch für niedrigere Kontakte dieses Verhältnis b_1, nur sehr wenig von dem Wert χ verschieden ist. Wenn wir also den Übergang eines Kontaktfalles nach dem nächstniedrigeren in derselben Kontaktreihe darstellen wollen, so müssen wir annehmen, daß der Wert von b in der vorhandenen Stellung mit einzelnen Sprüngen in einen solchen, der χ-mal so klein ist, übergeht. Will ein Kontaktsystem in das zweite in der Kontaktreihe folgende übergehen, dann muß in gleicher Weise der Wert von b sprungweise abnehmen bis er $\chi^2 = 0{,}38197$ mal so klein geworden ist, als im ursprünglichen System.

Es lag also auf der Hand, zuerst die Fälle einer näheren Untersuchung zu unterwerfen, bei welchen vorausgesetzt wurde, daß der Wert von b sich sprungweise ändert in einem Verhältnis, das dargestellt wird durch einen der Werte χ, χ^2, χ^3, χ^4, usw. Sind diese Fälle behandelt worden, dann wird es sehr leicht sein auch für solche, bei welchen der Wert von b um einen anderen Betrag ab- oder zunimmt, anzugeben, welcher Art die neu auftretende Blattstellung sein muß.

Endlich muß nochmals hervorgehoben werden, daß, wenn wir nach den Beobachtungstatsachen von § 1 dieses Kapitels Übergangsschemata entwerfen, es sich in vielen Fällen herausstellen wird, daß die nach einigen Sprüngen auftretende neue Stellung zwar sehr stark sich einem konstanten System nähert, aber davon doch bisweilen ziemlich bedeutende Abweichungen zeigt. Es ist dieser Umstand jedoch kein wichtiger Einwand gegen die Theorie, denn wir haben schon in demselben Paragraphen darauf hingewiesen, daß solche Abweichungen, wenn sie nicht allzu eingreifend sind, nachträglich wieder aufgehoben werden. Für unseren Zweck wird es dann auch genügen, den Nachweis zu erbringen, daß die angegebenen Beobachtungstatsachen dazu führen, daß nach einigen Sprüngen ein System zustande kommt, das sich sehr stark einem bestimmten Kontaktfall nähert.

§ 8. Konstruktionen für den Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 1 und 1 in den rechtwinkligen 1 und 2. Fangen wir mit der Besprechung des Systems auf der Kreiszylinderfläche an. In Fig. 1 Tafel XIII bilden die Kreise 0 und 1 einen Teil eines regelmäßigen Kontaktsystems mit dem rechtwinkligen Kontakt 1 und 1 (man vergleiche Fig. 2 Tafel I); es hat also der Faktor b für diese Kreise den Wert $\pm 0{,}7$ [1]) (man siehe Tabelle I S. 37). Wir haben nun in unserer Konstruktion vorausgesetzt, daß dieser Wert übergeht in denjenigen 0,45, d. h. also 0,64 mal kleiner wird. Dabei wurde ein einziger Zwischenwert von b gleich 0,54 angenommen (für den Kreis 2). Es sind darauf unter Berücksichtigung der Beobachtungstatsachen aus § 1 die Kreise 2, 3 und 4 im Anschluß an die Kreise 1 und 2 konstruiert worden. Ein Vergleich des Systems, das durch die Kreise 2, 3 und 4 gebildet wird, mit dem in Fig. 4 Tafel I dargestellten, wird nun gleich ergeben,

1) In unserer Figur ist dieser Wert ein wenig kleiner ausgefallen, was jedoch gar nichts an der weiteren Betrachtung ändert.

daß wir ein Kontaktsystem bekommen haben, das ganz dicht bei demjenigen mit dem rechtwinkligen Kontakt 1 und 2 steht. Nun wird bei Fortsetzung der Konstruktion mit Kreisen gleicher Durchmesser wohl nicht mit mathematischer Genauigkeit dieses Kontaktsystem hervortreten, aber es brauchen sich nur ganz geringe nachträgliche Änderungen einzustellen, um das System genau zu realisieren.

Wir heben noch besonders hervor, daß in unserer Figur die linksgewundene einzeilige Kontaktspirale des Kontaktsystems 1 und 1 ununterbrochen als Kontaktspirale in das neue System übergeht und nur ein wenig ihre Steigung ändert. Die rechtsgewundene einzeilige Spirale des ursprünglichen Systems dagegen erfährt im Kreise 1 eine Verzweigung, indem der eine Zweig den Kreisen 1, 2, 4 usw. folgt, der andere den Kreisen 1, 3, 5 usw. Diese beiden Zweige sind die beiden zweizeiligen Kontaktspiralen des neuen Systems, sie laufen bedeutend steiler als die einzeilige des ursprünglichen.

Es besteht in unserem Schema noch eine gewisse Willkür, indem man, nachdem der Kreis 2 eingezeichnet ist, den Kreis 3 mit dem gleichen Rechte rechts wie links tangierend an Kreis 2 konstruieren kann. Hätte man den Kreis 3 denjenigen 2 an der rechten Seite berühren lassen, so würde das nur die Änderung in dem neuen System gebracht haben, daß die Hauptspirale darin anstatt links, rechts verlaufen wäre.

Betrachten wir jetzt an zweiter Stelle das Schema auf der Kreiskegelfläche. Wir wählten für unsere Konstruktion wieder dieselbe Kegelfläche wie früher, d. h. eine solche, für die der Scheitelwinkel $\psi = 28^0\,57'\,18''$ ist, und welche abgerollt auf einer Ebene einem rechten Winkel $\zeta = 90^0$ entspricht. Auf dieser abgerollten Fläche wird nun die Übergangsfigur wieder durch eine Kreiskonstruktion dargestellt und zwar ist dieselbe ganz analog der soeben besprochenen auf der Kreiszylinderfläche. Man findet diese Konstruktion in Fig. 1 Tafel XIV wiedergegeben. Die Kreise 0 und 1 bilden wieder einen Teil eines Kreissystems (jetzt auf einer abgerollten Kreiskegelfläche) mit dem rechtwinkligen Kontakte 1 und 1 und einer Divergenz von 180^0. Diese beiden Kreise zeigen einen Wert von $b = \pm 0{,}7$, während $a = \pm 0{,}46$ ist (man siehe Tabelle XVII). Auch jetzt haben wir angenommen, daß der Wert von b mit einem einzigen Zwischenwert $b = 0{,}54$ (für Kreis 2) übergeht in einen solchen 0,45, d. h. also abnimmt im Verhältnis 0,64. Wenn man sich von diesen Änderungen Rechenschaft geben will, so ist man gezwungen, vom Kegelscheitel aus die Tangenten an die Kreise zu ziehen und die Winkel zu messen, unter denen die Kreise von diesem Scheitel aus gesehen werden. Es fallen dann auch diese Änderungen des Wertes b hier viel weniger auf, als das bei der Konstruktion auf der Zylinderfläche der Fall war. Wohl kann man aus unserer Figur den eigentümlichen Lauf des Faktors a ablesen, aber davon wird erst später die Rede sein.

Die Kreise 2, 3 und 4 sind auch hier wieder nach den Beobachtungstatsachen aus § 1 im Anschluß an die Kreise 0 und 1 angelegt und man wird sich sehr leicht von der großen Übereinstimmung des Endresultats mit der Konstruktion auf der Kreiszylinderfläche überzeugen können. Dennoch wird es schwer fallen, aus dieser abgerollten Figur eine Einsicht in die Art des neu auf-

getretenen Systems zu gewinnen. Dies wird jedoch ganz anders, wenn man die horizontale Projektion der aufgerollten Kegelfläche, d. h. also die entsprechende Folioidenkonstruktion, welche in Fig. 2 Tafel XIV dargestellt wurde, in Betracht zieht. Auch diese Figur muß notwendigerweise dieselben Änderungen des Faktors b aufweisen, wie die Figur 1, und wie die Konstruktion auf der Kreiszylinderfläche, sie zeigt aber die Divergenz- und Kontaktänderungen in viel übersichtlicherer Weise als diese beiden Figuren. Daß die Folioiden 0 und 1 ein System mit der Divergenz 180° und dem Kontakt 1 und 1 bilden, und also ganz vergleichbar sind mit zwei aufeinander folgenden Folioiden der Figur 1 auf Tafel X leuchtet ein, und es wird jetzt auch auffallen, daß die Folioide 2 noch dieselbe Divergenz und denselben Kontakt zeigt. Die Folioide 3 dagegen besitzt in Bezug auf 2 bereits eine bedeutend geringere Divergenz und weist auch einen anderen Kontakt auf. Vergleicht man die durch die Folioiden 2, 3 und 4 gebildete Figur mit derjenigen, welche in Fig. 3 Tafel X die Folioiden 3, 4 und 5 darstellen, so wird die frappante Übereinstimmung sofort sichtbar sein, und man wird einsehen, daß nur ganz geringe nachträgliche Änderungen aufzutreten brauchen, um das Kontaktsystem mit dem Kontakte 1 und 2 weiter regelmäßig fortsetzen zu können.

In diesem Schema ist nun sehr deutlich wahrnehmbar, daß die rechtsgewundene einzeilige Spirale des ursprünglichen Systems auch als Kontaktspirale in dem neuen fortläuft, während die andere einzeilige Kontaktspirale des ursprünglichen Systems sich in der Folioide 1 verzweigt in zwei zweizeilige: eine enthält die Folioiden 1, 2, 4 usw., die andere die Folioiden 1, 3, 5 usw. Hätten wir Kreis 3 demjenigen 2 an der andern Seite tangieren lassen, so würde die linksgewundene einzeilige Spirale beibehalten sein, wie in Fig. 1 Tafel XIII.

Wir bemerken schließlich noch, daß das Resultat, zu dem wir in diesem Paragraphen gekommen sind, daß nämlich bei Abnahme des Wertes b im Verhältnis $\pm 0{,}62$ (unter Annahme eines Zwischengliedes), das Kontaktsystem 1 und 1 übergehen muß in ein solches, das ganz dicht bei einem Kontaktsystem 1 und 2 steht, nur eine Erweiterung der Schlußfolgerung darstellt, zu der wir bereits in § 5 dieses Kapitels kamen. Wir haben ja dort hervorgehoben, daß, wenn der Wert von b in dem neuen System zwischen 0,58 und 0,38 liegt, dieses System ein solches mit dem Kontakte 1 und 2 darstellen muß, sobald durch nachträgliche Änderungen die Unregelmäßigkeiten wieder aufgehoben sind. Hier ist nun gezeigt, daß diese Änderungen, wenn die ursprüngliche Blattstellung eine solche mit dem Kontakt 1 und 1 ist, nur sehr gering zu sein brauchen.

§ 9. Konstruktionen für den Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 1 und 2 in den rechtwinkligen 2 und 3. Wenden wir uns zuerst wieder zum Studium der Übergangsfigur auf der Kreiszylinderfläche, welche in Fig. 2 Tafel XIII dargestellt ist. Als Ausgangsblattstellung wurde darin das Kontaktsystem mit dem rechtwinkligen Kontakt 1 und 2 gewählt (dargestellt durch die Kreise 0, 1 und 2), wofür $b = 0{,}447$ ist, und es wurde angenommen, daß dieser Wert von b sich ändert in einen solchen 0,277, d. h. also, daß er im Verhältnis 0,62 abnimmt. Hier wurden zwei Kreise mit Zwischenwerten von b eingefügt, und zwar einer (Kreis 3) mit $b = 0{,}36$ und einer (Kreis 4) mit $b = 0{,}31$. Übrigens

sind auch hier die neuen Kreise in Übereinstimmung mit den Beobachtungstatsachen aus § 1 angelegt. Es wird nun deutlich sein, daß die Kreise 3, 4, 5, 6 und 7 ein System bilden, das einem regelmäßigen mit dem rechtwinkligen Kontakt 2 und 3 sehr nahe steht. Man braucht die von diesen Kreisen gebildete Figur nur mit Fig. 6 Tafel I zu vergleichen, um sich hiervon zu überzeugen.

Wir weisen wieder darauf hin, daß die zwei zweizeiligen Kontaktspiralen des ursprünglichen Systems als solche ununterbrochen in das neue System übergehen. Die einzeilige Kontaktspirale des ursprünglichen Systems aber endigt in dem Kreis 4 und man findet sie in dem neuen System durch drei dreizeilige Spiralen ersetzt. Man kann dies auch in der Weise auffassen, daß sich die ursprüngliche einzeilige Spirale zweimal verzweigt, und zwar das erste Mal im Mittelpunkt des Kreises 2 in die beiden Zweige: 2, 5, 8, 11 usw. und 2, 3, das zweite Mal im Mittelpunkt des Kreises 3 in die Zweige 3, 6, 9, 12 usw. und 3, 4, 7, 10, 13 usw.

Wenden wir uns jetzt zu der Konstruktion auf der Kreiskegelfläche. Fig. 3 Taf. XIV stellt die Kreiskonstruktion auf der abgerollten Kegelfläche dar. Auch hier wurde als vorhandene Blattstellung ein Kontaktsystem mit dem rechtwinkligen Kontakt 1 und 2 angenommen, für das $b = 0{,}45$, $a = 0{,}73$ ist (dargestellt durch die Kreise 0, 1 und 2). Im Anschluß hieran wurden zuerst wieder zwei Kreise (3 und 4) mit Zwischenwerten von b angelegt und zwar wieder etwa mit den Werten 0,36 und 0,31. Darauf folgen dann ferner nur Kreise, für die $b = 0{,}28$ ist, so daß der Wert dieses Faktors auch hier im Verhältnis 0,62 abgenommen hat. Während nun diese abgerollte Figur kein übersichtlicheres Bild der Übergangsfigur gibt als die Konstruktion auf der Zylinderfläche, die wir soeben besprochen haben, ist das in großem Maße bei der entsprechenden Folioidenkonstruktion der Fall, die in Fig. 4 Taf. XIV zu finden ist. Man wird aus dieser Konstruktion die Eigentümlichkeiten des Übergangs unmittelbar ablesen können. So fällt es gleich auf, daß die Folioide 4 noch die Kontakte des ursprünglichen Systems zeigt, während dies dagegen bei der Folioide 5 und den folgenden nicht mehr der Fall ist. Vergleicht man nun die durch die Folioiden 3, 4, 5, 6 und 7 gebildete Figur mit derjenigen, welche in Fig. 5 Taf. X durch die Folioiden 6, 7, 8, 9 und 10 dargestellt wird, so wird es wieder klar sein, daß in dem erstgenannten System nur ganz unbedeutende Änderungen einzutreten brauchen, um zu ermöglichen, daß das regelmäßige rechtwinklige Kontaktsystem 2 und 3 zu stande kommt.

Auch aus dieser Konstruktion läßt sich dasjenige, was wir oben über den Verlauf der Kontaktspiralen in beiden Systemen sagten, sehr überzeugend ablesen. Es sei noch erwähnt, daß die Willkür, welche bei der Übergangsfigur für die Änderung des Kontaktsystems 1 und 1 in ein solches 1 und 2 besteht, hier nicht existiert, und daß die Hauptspirale in dem neuen System dieselbe Windungsrichtung besitzt wie im alten.

Von besonderer Wichtigkeit ist es nun hervorzuheben, daß das Resultat, zu dem uns dieser Paragraph geführt hat, nicht von vornherein zu erwarten war. Wir haben ja in § 5 dieses Kapitels klargelegt, daß, wenn in der neuen Blattstellung der Wert von b kleiner ist als 0,378, sich nicht mehr voraussagen läßt,

welche neue Stellung eintreten muß, daß dies aber durch die Art der Anschlußfigur bedingt sei. Aus dem jetzt Behandelten geht nun hervor: sobald die neue Blattstellung mit einem Wert von b gleich 0,28 in Übereinstimmung mit den Beobachtungstatsachen aus § 1 im Anschluß an ein Kontaktsystem 1 und 2 entsteht, nähert sich diese neue Blattstellung einer solchen mit dem Kontakt 2 und 3, also wieder einer aus der Hauptreihe. Es wird sich bald herausstellen, daß hiermit wieder eine der wichtigsten Tatsachen für die Erklärung der Allgemeinheit der Blattstellungen aus der Hauptreihe nachgewiesen wurde.

Die beiden in diesem und im vorigen Paragraphen besprochenen Übergangsfälle sind in der Natur ganz allgemein verbreitet, aber auch ohnedies sind sie von großem Interesse, weil wir nachweisen werden, daß wichtige andere Übergangsfälle sich auf diese beiden zurückführen lassen.

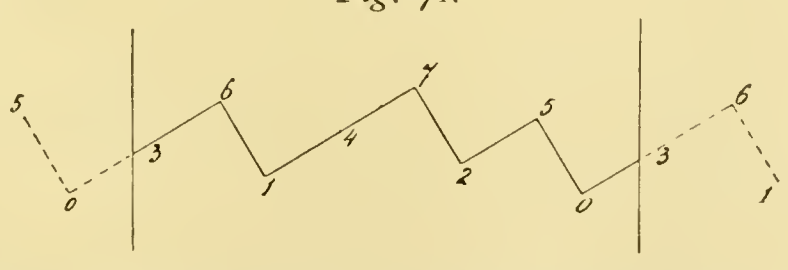
§ 10. Konstruktionen für den Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 3 und 5 in den rechtwinkligen 5 und 8. Bevor wir den allgemeinen Fall eines Überganges des Kontaktes m und n in einen solchen n und $(m+n)$ besprechen, wollen wir noch zuerst an einem bestimmten Zahlenbeispiel einen solchen Übergang erläutern. In Fig. 3 Taf. XIII bilden die Kreise 0 bis 7 einen Teil eines regelmäßigen Kreissystems mit dem Kontakt 3 und 5, so daß dafür $b = 0{,}171$ ist. Wir haben nun angenommen, daß dieser Wert, nachdem zuerst einige Kreise (8 bis 12) mit Zwischenwerten angelegt sind, in einen solchen 0,106 übergeht, d. h. also im Verhältnis 0,62 abnimmt. Man braucht nur wieder die von den Kreisen 8 bis 20 gebildete Figur mit der Konstruktion aus Fig. 10 Taf. I zu vergleichen, um zu sehen, daß bei der Fortsetzung des Systems mit konstantem Wert von b ein Kontaktfall erhalten wird, der ganz in der Nähe eines solchen mit dem rechtwinkligen Kontakte 3 und 5 steht.

Es wird dies noch überzeugender, wenn man die Konstruktion auf der Kegelfläche entwirft. Hiervon gibt Fig. 5 Taf. XIV das abgerollte System, Fig. 6 die horizontale Projektion, also die Folioidenkonstruktion wieder. Die übereinstimmenden Kreise der drei Konstruktionen sind wieder durch dieselben Zahlen bezeichnet.

Vergleicht man die von den Folioiden 8 bis 20 in Fig. 6 Taf. XIV gebildete Figur mit derjenigen, welche von den Folioiden 18 bis 30 in Fig. 9 Taf. X dargestellt wird, so muß die große Übereinstimmung sofort auffallen.

Die hier betrachteten Übergangsfiguren stehen in enger Beziehung zu denjenigen, welche wir in den beiden vorigen Paragraphen behandelt haben, es wird dies durch die folgende Betrachtung klar werden. Denkt man sich in Fig. 3 Tafel XIII die Mittelpunkte der bei ursprünglicher Blattstellung im Kontakt stehenden Kreise verbunden, so erhält man die Zickzacklinie, welche man in Fig. 71 abgebildet findet. Es zeigt nun diese Figur

Fig. 71.



zwei Arten von Einkerbungen und zwar zwei große (5, 0, 3, 6 und 6, 1, 4, 7) und eine kleine (7, 2, 5). Die großen, welche wir als Einkerbungen der ersten Art bezeichnen wollen, werden von vier Kreisen gebildet, die kleine, die eine solche der zweiten Art genannt werden soll, von drei Kreisen. Es wird aber gleich einleuchten, daß in Fig. 1 Taf. XIII die Kreise 1, 0 und 1 eine Einkerbung der ersten Art darstellen, während in Fig. 2 dieser Tafel die Kreise 2, 0, 1 und 2 eine solche der zweiten Art bilden. Daraus folgt dann sogleich, daß man in Fig. 3 oberhalb der Einkerbung der ersten Art eine Übergangsfigur antreffen muß, die mit derjenigen aus Fig. 1 übereinstimmt, während man im Anschluß an die beiden Einkerbungen zweiter Art auch solche Übergangsfiguren finden muß, die derjenigen der Fig. 2 gleichen. Wirklich zeigt dann auch die von den Kreisen 2, 5, 7, 10, 13, 15 und 18 in Fig. 3 gebildete Figur die größte Ähnlichkeit mit unserer Fig. 1, während die Figur, welche von den Kreisen 1, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 17 und 19, sowie diejenige, welche von den Kreisen 0, 3, 5, 6, 8, 11, 13, 16 und 18 gebildet wird, der Fig. 2 in jeder Hinsicht gleicht. Dennoch muß noch bemerkt werden, daß, wie schon oben gesagt, in Fig. 1 eine gewisse Willkür besteht insofern, als der Kreis 3 ebensogut rechts als links tangierend an Kreis 2 konstruiert werden kann. Diese Willkür besteht aber in Fig. 3 nicht, was die Lage des Kreises 15 anbelangt; es findet dieser Umstand seine Erklärung in der Tatsache, daß die Kreise 5 und 7 dieser letzten Figur nicht in gleicher Höhe liegen, während das mit den beiden Hälften des Kreises 1 in Fig. 1 wohl der Fall ist.

Wenn wir nun den Verlauf der Kontaktspiralen in der alten und in der neuen Blattstellung näher betrachten, so wird gleich auffallen, daß die fünf 5-zeiligen Kontaktspiralen des ursprünglichen Systems auch als solche in dem neuen auftreten, während die drei 3-zeiligen Spiralen darin durch acht 8-zeilige ersetzt sind. Man kann sich diese Änderung wieder vorstellen als zu stande gekommen durch eine Verzweigung dieser dreizeiligen Kontaktspiralen, und zwar wird es deutlich sein, daß die dreizeiligen Spiralen 0, 3, 6 und 2, 5 sich zweimal verzweigen, während die dreizeilige Spirale 1, 4, 7 dies nur einmal tut. Das war auch von vornherein zu erwarten, da wir sahen, daß oberhalb einer Einkerbung zweiter Art eine Übergangsfigur zu finden war, die mit Fig. 2 übereinstimmt, also eine zweimalige Verzweigung der weniger steilen Spirale aufweisen muß, während oberhalb einer Einkerbung erster Art eine einmalige Verzweigung auftreten muß, weil dort eine Übergangsfigur wie in Fig. 1 zu suchen ist[1]). Es sei noch bemerkt, daß die 5-zeiligen Spiralen, welche in der ursprünglichen Blattstellung die steileren waren, in der neuen die weniger steilen sind, während die dreizeiligen Spiralen, die ursprünglich am wenigsten steil verliefen, sich verzweigen zu acht 8-zeiligen, welche die steilsten Spiralen des neuen Systems bilden. Diese neuen 8-zeiligen und 5-zeiligen schneiden einander, wie wir bereits gesagt haben, annähernd rechtwinklig.

1) Man wird einsehen, daß in Fig. 3 Taf. XIII oberhalb der Einkerbung erster Art eine Verzweigung der „weniger steilen" Spirale des ursprünglichen Systems zu stande kommt, während in Fig. 1 Taf. XIII die beiden einzeiligen Spiralen dieselbe Steigung besitzen und diese Verzweigung dann auch für diese beiden Spiralen auftreten kann.

Um nun den eigentümlichen Verlauf der Kontaktspiralen auch bei der Folioidenkonstruktion nachzuweisen, haben wir in Fig. 7 Tafel XIV diese Kontaktspiralen noch näher dargestellt und die Punkte, in welchen Verzweigung der Spiralen eintritt, durch einen kleinen Kreis markiert. Daß die hier gemeinten Spiralen keine logarithmischen sind, und bei ihrer Darstellung also eine gewisse Willkür besteht, braucht wohl nicht näher betont zu werden.

Schließlich muß noch auf eine andere Darstellungsweise für die betrachtete Übergangsfigur hingewiesen werden, die man erhält, wenn man statt der Kontaktspiralen (unter welchen wir, wie immer, die Spiralen durch die Mittelpunkte verstanden haben) die einhüllenden Spiralen konstruiert, d. h. diejenigen Spiralen, welche alle sich berührenden Kreise oder Folioiden auf derselben Seite tangieren. Diese Darstellungsweise ist von CHURCH (siehe auch S. 137) angewendet worden.

Das Endresultat aller obenstehenden Betrachtungen ist also diese Schlußfolgerung: Falls die vorhandene Blattstellung den Kontakt 3 und 5 aufweist, und der Wert von b (mit einigen Sprüngen) im Verhältnis 0,62 ändert und auch weiter die Anlegung neuer Organe in Übereinstimmung mit den Beobachtungstatsachen aus § 1 dieses Kapitels geschieht, dann muß die neu auftretende Stellung sich dem rechtwinkligen Kontakt 5 und 8 nähern. Auch hier haben wir also einen Fall kennen gelernt, bei dem die neue Blattstellung wie die bereits vorhandene einen Kontakt aus der Hauptreihe aufweist.

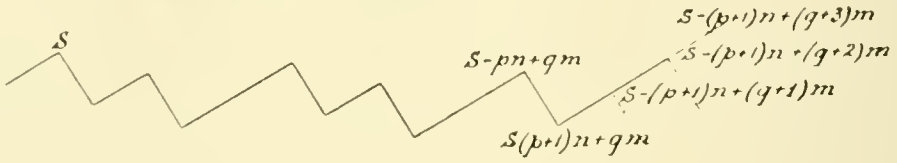
§ 11. Konstruktionen für den Übergang des rechtwinkligen Kontaktes m und n in den rechtwinkligen Kontakt n und $(m+n)$ für den Fall $n < 2m$. Es ist leicht, die Betrachtungen des vorigen Paragraphen zu verallgemeinern, denn es läßt sich nachweisen, daß sich zahlreiche Übergangsfiguren in derselben Weise, wie die in diesem Paragraphen betrachtete Konstruktion, auf die beiden einfachen zurückführen lassen, welche wir in § 8 und § 9 besprochen haben, d. h. also auf die, welche sich auf die Übergänge 1 und 1 in 1 und 2 und 1 und 2 in 2 und 3 beziehen.

Betrachtet man nämlich auf Tafel I alle Figuren, welche einen rechtwinkligen Kontakt m und n darstellen, so wird sich bald die allgemeine Regel herausstellen, daß, falls $n < 2m$ ist, diese Figuren an der oberen Seite von einer Reihe Kreise begrenzt werden, welche eine Zickzacklinie bilden, die nur dieselben zwei Arten von Einkerbungen zeigt, denen wir im vorigen Paragraphen begegnet sind. Wenn also der Wert von b wieder im Verhältnis 0,62 abnimmt und wenn wir bei dieser Abnahme wieder einige Zwischenwerte von b annehmen, so müssen sich oberhalb dieser beiden Einkerbungsarten wieder die bekannten Übergangsfiguren aus Fig. 1 und 2 der Tafel XIII einstellen. Bevor wir nachsehen, welche Blattstellung dann resultieren muß, wollen wir zuerst die soeben angegebene Regel mathematisch beweisen, denn um eine allgemeine Anwendung derselben zu rechtfertigen, kann natürlich ein Hinweis auf die beschränkte Zahl Konstruktionen der Tafel I nicht genügen.

Nehmen wir an, die ursprünglich vorhandene Blattstellung mit dem Kontakt m und n ($m < n$ und $n < 2m$) endigt mit dem Punkt s (siehe Fig. 72), so ist dieser Punkt gewiß ein „Gipfelpunkt“ der Zickzacklinie, welche das System an der oberen Seite abgrenzt. Es ist diese Linie aus Teilstücken der m- und n-zeiligen Kontaktspiralen zusammengesetzt, und es ist also nachzuweisen,

daß darin nur Einkerbungen vorkommen können, welche wir oben als solche erster und zweiter Art bezeichnet haben. Ein willkürlicher anderer Gipfelpunkt der Zickzacklinie kann nun immer dargestellt werden durch $s - pn + qm$, worin

Fig. 72.



die ganzen Zahlen p und q angeben, wieviel Schritte man in den n-zeiligen Kontaktspiralen nach unten und in den m-zeiligen Spiralen nach oben machen muß, um vom Punkt s aus den betrachteten Punkt zu erreichen. Soll nun aber dieser Punkt wirklich ein solcher Gipfel sein, so muß $s - pn + qm < s$ oder $qm < pn$ sein, weil wir vorausgesetzt haben, daß Punkt s der höchste ist. Aber außerdem muß dann $s - pn + (q+1)m > s$ oder $(q+1)m > pn$ sein, denn sonst würde der Punkt $s - pn + (q+1)m$ noch zu dem betrachteten System gehören, und es könnte der Punkt $s - pn + qm$ kein Gipfelpunkt der begrenzenden Zickzacklinie sein.

Es ist nun klar, daß der Punkt $s - (p+1)n + qm$ [1]) wohl einen Punkt der Zickzacklinie darstellt; dasselbe muß auch mit dem Punkt $s - (p+1)n + (q+1)m$ der Fall sein, denn aus den Beziehungen $qm < pn$ und $m < n$ folgt, daß $(q+1)m < (p+1)n$, sodaß $s - (p+1)n + (q+1)m < s$ ist. Ob nun der Punkt $s - (p+1)n + (q+2)m$ ein solcher ist, läßt sich nicht im allgemeinen voraussagen, denn wenn $qm < pn$ und $2m > n$ ist, kann sowohl $(q+2)m < (p+1)n$ als $(q+2)m < (p+1)n$ sein; es wird dies abhängen von dem Wert von p und q.

Sicher ist aber der Punkt $s - (p+1)n + (q+3)m$ kein Punkt der Zickzacklinie, denn wäre dies der Fall, so müßte $(q+3)m < (p+1)n$ sein, während aus den Beziehungen $(q+1)m > pn$ und $2m > n$ folgt, daß $(q+3)m > (p+1)n$ ist. Unter der Voraussetzung, daß $n < 2m$ ist, bleiben also nur die zwei Möglichkeiten, daß die Einkerbung von drei oder von vier Kreismittelpunkten begrenzt wird, d. h. also, die Einkerbung kann nur eine sein, die wir oben als eine solche erster oder zweiter Art bezeichneten.

Fragen wir jetzt noch nach der Anzahl der Einkerbungen, so läßt sich diese in einfacher Weise angeben. Dazu brauchen wir nur nachzusehen, welchen Wert p und q annehmen, wenn der Punkt $s - pn + qm$ wieder mit dem Punkt s zusammenfällt, d. h. die Zickzacklinie geschlossen ist. Es muß dann $s - pn + qm \equiv s$ sein, und also $p \equiv m$ und $q \equiv n$. Daraus folgt dann aber, wie leicht einzusehen, daß es im ganzen m Einkerbungen gibt und zwar $(n - m)$ der zweiten Art und $(2m - n)$ der ersten Art.

Wenn nun oberhalb der Einkerbungen dieselben Übergangsfiguren auftreten, wie sie in Fig. 1 und 2 der Tafel XIII dargestellt wurden, so folgt daraus, daß gewisse Kontaktspiralen des ursprünglichen Systems auch als solche in dem neuen auftreten, während sich dagegen andere verzweigen müssen. Nach dem früher Gesagten wird es deutlich sein, daß es die n-zeiligen Kontaktspiralen des ursprünglichen Systems sind, welche sich auch als n-zeilige Kontaktspiralen in dem neuen wiederfinden, obwohl sie darin weniger steil laufen als in dem ursprünglichen. Dagegen haben die m-zeiligen eine Verzweigung erfahren, und zwar oberhalb jeder Einkerbung

1) In unserer Figur steht $s\ (p+1)\ n + qm$, dies muß sein $s - (p+1)\ n + qm$.

der ersten Art eine einmalige, oberhalb einer solchen zweiter Art eine zweimalige. Da es nun $(2m - n)$ Einkerbungen erster Art und $(n - m)$ solcher zweiter Art gibt, so werden im ganzen die m-zeiligen Spiralen des ursprünglichen Systems durch $2(2m - n) + 3(n - m) = (m + n)$ Spiralen ersetzt. Weil nun in Fig. 1 und Fig. 2 Tafel XIII die neuen Kontaktspiralen einander annähernd rechtwinklig schneiden, so muß das auch für die n- und $(m + n)$-zeiligen Spiralen gelten, welche in unserem komplizierten Fall auftreten. Hiermit ist also der Nachweis erbracht, daß ganz allgemein, wenn $n < 2m$ ist und der Wert von b (mit einigen Sprüngen) im Verhältnis 0,62 abnimmt, während außerdem die neuen Kreise nach den Beobachtungstatsachen aus § 1 angelegt werden, daß dann die neu auftretende Stellung sich einer solchen mit dem rechtwinkligen Kontakt n und $(m + n)$ nähern muß.

Ist die ursprüngliche Blattstellung eine mit Kontakt aus der Hauptreihe, so muß das auch die neu auftretende sein; ist die vorhandene Stellung eine solche mit Kontakt aus einer Nebenreihe, so muß die neue einen Kontakt aus derselben Reihe aufweisen.

§ 12. Konstruktionen für den Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 1 und 1 in den rechtwinkligen 2 und 3. Wir wollen jetzt annehmen, das ursprünglich vorhandene System sei ein solches mit dem rechtwinkligen Kontakt 1 und 1, und der Wert von b ändere sich mit einigen Zwischenwerten im Verhältnis 0,38, während im übrigen wieder die neuen Organe in Übereinstimmung mit den Beobachtungstatsachen aus § 1 S. 253 angelegt werden. Es ist dieser Fall als Konstruktion auf der Kreiszylinderfläche in Fig. 4 Tafel XIII dargestellt und zwar wurden die Kreise 2 und 4 als solche mit Zwischenwerten von b gezeichnet[1]). Vergleicht man nun die durch die Kreise 5 und 9 gebildete Figur mit derjenigen, welche in Fig. 6 Tafel I durch die Kreise 9 bis 13 dargestellt wird, so sieht man, daß ein Kontaktsystem aufgetreten ist, das einem solchen mit dem rechtwinkligen Kontakt 2 und 3 sehr nahe kommt.

Es würde dieser Übergang noch viel überzeugender durch Folioidenkonstruktion darzustellen sein; nach dem Obengesagten wird es aber nicht schwer fallen, sich eine solche Konstruktion zu vergegenwärtigen.

Wir weisen noch darauf hin, daß man den hier betrachteten Übergang auch so auffassen kann, daß die eine einzeilige Spirale sich zweimal verzweigt, während die andere eine dreimalige Verzweigung aufweist.

§ 13. Konstruktionen für den Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 1 und 2 in den rechtwinkligen 3 und 5. Man wird unmittelbar einsehen, daß Fig. 5 Tafel XIII den Übergang darstellt, welcher zustande kommt, wenn die ursprünglich vorhandene Blattstellung den Kontakt 1 und 2 aufweist und der Wert von b (mit einigen Zwischenwerten) im Verhältnis 0,38 abnimmt. Die Kreise 3 bis 8 besitzen Zwischenwerte von b, aber von 9 ab wurde diese Größe als konstant angenommen. Ein Blick auf Fig. 8 Tafel I wird genügen, um den Eindruck zu festigen,

---

1) Es wird auffallen, daß der Kreis 4 größer als Kreis 3 ist; man bedenke aber, daß die Numerierung hier vorgenommen wurde, als wäre die Anlegung neuer Organe akropetal vor sich gegangen, eine Voraussetzung, der nicht genügt zu werden braucht.

daß das neue Kontaktsystem nur wenig sich zu ändern braucht, um zu einem regelmäßigen mit dem rechtwinkligen Kontakt 3 und 5 zu werden. Bemerken wir noch, daß die einzeilige Kontaktspirale des ursprünglichen Systems sich bei dem Übergang in das neue zweimal verzweigt und in drei dreizeilige Spiralen übergeht, während sich die eine zweizeilige Spirale des ursprünglichen Systems einmal, die andere zweimal verzweigt und diese Spiralen hierdurch in die fünf fünfzeiligen Spiralen übergehen.

Es ist noch von Interesse hervorzuheben, daß die Annahme der Durchmesser für die fünf Kreise mit Zwischenwerten von b in dieser Konstruktion sowie für die zwei in derjenigen des vorigen Paragraphen eine sehr willkürliche ist. Es läßt sich nun nachweisen, daß auch, wenn wir diese Durchmesser anders annehmen, z. B. den Übergang noch schneller eintreten lassen wie in diesen Figuren, doch ein System resultiert, das sich einem solchen mit demselben rechtwinkligen Kontakt stark nähert. Die Schlüsse, welche wir oben über den Verlauf der Kontaktspiralen bei dem Übergang gezogen haben, bleiben bei solchen Voraussetzungen dieselben. Für unsere weiteren Darlegungen kommen solche Übergangsfiguren nicht in Betracht, obwohl sogleich bemerkt werden muß, daß sie wohl in der Natur auftreten und z. B. für die Erklärung der Schemas, welche CHURCH[1]) für Fälle veränderlicher Blattstellung gibt, von gewisser Bedeutung sind.

§ 14. Konstruktionen für andere Übergänge von Systemen aus ein und derselben Kontaktreihe in einander. Nach dem, was wir in § 11 über die Art der Begrenzungslinie eines Kontaktsystems, für das $n < 2m$ ist, abgeleitet haben, wird man nun gleich einsehen, daß das Resultat der beiden vorhergehenden Paragraphen uns zu dem folgenden Schluß berechtigt:

Ist das ursprüngliche System ein solches mit dem rechtwinkligen Kontakt m und n, während $n < 2m$ ist, und nimmt der Wert von b mit einigen Zwischenwerten ab im Verhältnis 0,38, so wird das neu auftretende System sich stark einem solchen mit dem rechtwinkligen Kontakt $(m + n)$ und $(m + 2n)$ nähern.

Es wird nun wohl keines weiteren Beweises bedürfen, daß, wenn b im Verhältnis 0,24 abnimmt, das neu auftretende System ganz nahe bei einem solchen mit dem rechtwinkligen Kontakt $(m + 2n)$ und $(2m + 3n)$ steht. In dieser Weise kann man fortschließen, und es ergibt sich also, daß, wenn $n < 2m$ ist, und b (unter Annahme einiger Zwischenwerte) abnimmt in einem Verhältnis, das durch ein Glied der Reihe χ, χ^2, χ^3, χ^4 usw. angegeben wird, immer ein System resultieren muß, das ganz dicht bei einem mit rechtwinkligen Kontakten aus derselben Kontaktreihe steht.

Was wird nun aber geschehen, wenn der Faktor b sich in einem anderen Verhältnis ändert? Das neu auftretende System wird, wie leicht einzusehen, ebenfalls einem regelmäßigen (oder ähnlichen) nahe kommen, jedoch keinem rechtwinkligen, sondern einem solchen mit schiefem Schnitt der Kontaktspiralen. Nun haben wir auf S. 247 u. f. auseinander gesetzt, daß in solchen Fällen die Pflanze meistens ziemlich schnell wieder ein System mit rechtwinkligem Kontakt verwirklicht, und zwar kann das dadurch er-

1) Relation of Phyllotaxis to mechanical Laws. London 1904, p. 111.

reicht werden, daß der relative Durchmesser der Organe abnimmt oder daß die Organe mit gleichem Durchmesser auf einem steileren oder weniger steileren Teil des Vegetationspunktes angelegt werden. Es hat dies also nur zur Folge, daß mehr Organe mit Zwischenwerten von b angelegt werden, aber das Resultat bleibt dasselbe. Wir können also behaupten, daß alle Übergangsfälle, bei denen $n < 2m$ ist, durch die Betrachtung der oben genannten Möglichkeiten erledigt sind. Es ist von Wichtigkeit hervorzuheben, daß auch die Fälle, in denen der Faktor b „zunimmt" (mit einigen Zwischenwerten), in dem Behandelten schon einbegriffen sind. Man kann ja alle Übergangsfiguren, welche sich auf die Kreiszylinderfläche beziehen, auch umgekehrt betrachten, und es wird nicht schwer fallen, sich die dazu gehörigen Konstruktionen mit Folioiden zu vergegenwärtigen.

Welche Änderungen auftreten, wenn die Abnahme des Faktors b nicht auf dem ganzen Umfang des Stammscheitels dieselbe ist, kann hier ebensowenig besprochen werden wie die Übergangsfiguren, welche auftreten, wenn in dem ursprünglichen Kontaktsystem $n > 2m$ ist, obwohl auch diese Fälle sehr wichtig sind. Auch der Wechsel zwischen Spiralstellungen und Quirlen muß einem weiteren Studium vorbehalten bleiben. Nur zwei Fälle von dem Übergang der dekussierten Stellung werden unten noch näher erwähnt. Zuerst möge noch eine Bemerkung betreffs der Übergangsfiguren für einfache Kontaktsysteme hier Platz finden.

§ 15. Der Faktor a in den besprochenen Übergangsfiguren. Wir wollen hier auf eine Eigentümlichkeit der Übergangsfiguren aufmerksam machen, soweit diese auf einer Kreiskegelfläche ausgeführt werden, und zwar auf den merkwürdigen Verlauf des Faktors a. Bei den Konstruktionen auf der Kreiszylinderfläche kommt diese Eigenschaft natürlich nicht zum Ausdruck.

Nehmen wir als Beispiel unsere Fig. 1 auf Tafel XIV. Wie in § 8 S. 261 gesagt, ist für die Kreise 0 und 1 der Wert von $b = 0{,}7$, während dieser für den Kreis 2 beträgt 0,54 und für die Kreise 3 und 4 gleich 0,46 wird. Nun ist aber zwischen den Kreisen 1 und 0 das Verhältnis a der Kreisdurchmesser (siehe Tabelle XVIII S. 153) gleich 0,456, während dasselbe zwischen den Kreisen 4 und 3 beträgt 0,76, und bei Fortsetzung des Kontaktsystems mit dem rechtwinkligen Kontakt 1 und 2 wird a in 0,73 übergehen. Dagegen wird man das Verhältnis zwischen den Kreisen 2 und 1 nicht, wie man erwarten könnte, gleich einem Wert zwischen 0,456 und 0,76 oder 0,73 finden, sondern die Messung ergibt dafür 0,41; also hat der Wert von a nicht zu- sondern abgenommen. Zwischen den Durchmessern der Kreise 3 und 2 findet man das Verhältnis 0,59, also dafür hat der Faktor a wieder zugenommen.

Daß dieser Verlauf des Faktors a, welcher sich durch eine anfängliche Abnahme kennzeichnet, auf die eine rasche Zunahme folgt, keine Eigentümlichkeit ist, welche nur in der genannten Figur vorkommt, ergibt sich sofort, wenn man auch die Fig. 3 Tafel XIV in dieser Hinsicht untersucht.

Nun kommt es uns aber sehr unwahrscheinlich vor, daß auch in der Natur die Übergangsfiguren einen solchen Verlauf des Faktors a aufweisen sollten; viel wahrscheinlicher ist es, daß dieser Faktor ebenso wie b regelmäßig ab- oder zunehmen wird, obwohl

sich dies nicht von vornherein voraussagen läßt. Es wird diese Voraussetzung jedoch fast zur Gewißheit, wenn man die Überlegungen in Betracht zieht, welche uns bereits früher zum Schluß führten, daß die Folioidensysteme auf einer Kreiskegelfläche niemals die Wirklichkeit vollkommen genau darzustellen vermögen. Wir haben ja in § 6 S. 203 klargelegt, daß eine der Ursachen für die Unvollkommenheit dieser Figuren bei „konstanter" Blattstellung die war, daß die Stammscheitel nur auf einem ziemlich schmalen Streifen als Teile einer Kreiskegelfläche betrachtet werden dürfen, und wir sind sogar in § 2 S. 254 zu dem Schluß gelangt, daß die „veränderliche" Blattstellung meistens durch Ab- oder Zunahme der Steigung des Scheitels eingeleitet wird.

Es müssen also unsere Figuren für die Übergangsfälle, bei denen alle Kreise auf ein und derselben Kreiskegelfläche liegen, auch Abweichungen von der Natur zeigen. Führt man nun die Konstruktion aus unter der Voraussetzung, die wir auf S. 256 machten, daß nämlich eine Abnahme des Faktors b von einer Zunahme von ψ begleitet wird, so stellt sich wirklich heraus, daß der unregelmäßige Verlauf des Faktors a ganz aufgehoben werden kann.

Wir haben hier eine solche Konstruktion nicht ausgeführt, teils weil sie sehr kompliziert sein würde, teils auch weil sie doch nur unter sehr willkürlichen Voraussetzungen anzufertigen wäre, da uns das Gesetz nicht bekannt ist, nach welchem sich b mit ψ ändert. Dennoch glaube ich, daß diese Erwägungen ein wichtiger Hinweis sind auf die Art, in welcher sich die Theorie der Blattstellungen weiter entwickeln kann.

Bemerken wir aber gleich, daß sich die oben besprochenen Folioidenkonstruktionen für die Erklärung der in der Natur betrachteten Übergangsfälle als völlig genügend herausstellen werden. Daß sie unvollkommen sind, wird keine Schwierigkeiten bereiten, sobald nur Art und Ursache dieser Unvollkommenheit bekannt sind.

§ 16. Konstruktionen für den Übergang der dekussierten Stellung in den rechtwinkligen Kontakt 2 und 3 und in den dreizähligen Quirl. Eine sehr oft in der Natur angetroffene Übergangsfigur ist in Fig. 6 Tafel XIII als Kreissystem auf einer Kreiszylinderfläche dargestellt. Es ist der Übergang der dekussierten Blattstellung in eine solche mit dem Kontakt 2 und 3. Der Wert von b wird dabei abnehmen von 0,35 (siehe Tabelle XX auf S. 184) bis 0,28. Dabei wurde ein Kreis (2) mit dem Zwischenwert 0,31 angenommen. Daß die Kreise 3 bis 7 ein System bilden, das sich einem solchen mit dem rechtwinkligen Kontakt 2 und 3 nähert, wird sogleich einleuchten.

Bemerken wir noch, daß es jetzt noch nicht möglich ist, anzugeben, welche Ursache in der Natur bewirkt, daß der Kreis 2′ kleiner ausfällt als Kreis 2.

Die Figuren 1 und 3 Tafel XV geben die zugehörigen Konstruktionen auf der Kreiskegelfläche, für die $\psi = 28^0\,57'\,18''$ ist. Die übereinstimmenden Kreise und Folioiden sind wieder in den drei Figuren durch dieselben Zahlen bezeichnet.

Die dekussierte Stellung zeigt aber auch manchmal eine andere Übergangsfigur. Diese wird, wie es für die Kreiszylinderfläche in Fig. 7 Tafel XIII dargestellt wurde, dadurch eingeleitet, daß der Wert von b an der einen Seite etwas zunimmt (Kreis 1), an der

entgegengesetzten aber abnimmt, um darauf dauernd einen kleineren konstanten Wert von *b* aufzuweisen. Es kommt hierdurch ein dreizähliger Quirl zustande.

Besonders deutlich wird dies, wenn man die Fig. 4 Tafel XV in Betracht zieht, welche die übereinstimmende Konstruktion mit Folioiden darstellt. Die zugehörige Kreiskonstruktion auf der abgerollten Kreiskegelfläche ist in Fig. 2 derselben Tafel abgebildet. Es ist interessant, zu bemerken, wie die Unregelmäßigkeiten, welche Fig. 7 Tafel XIII aufweist, in der Folioidenkonstruktion gar nicht ins Auge fallen.

Wenn man annimmt, daß im ursprünglichen System der rechtwinklige Kontaktfall nicht verwirklicht war und die Kreise 0 und 0' unserer Konstruktionen ein wenig größer waren, als jetzt angenommen wurde, dann wird schon durch Abnahme von *b* an der einen Seite des Stammscheitels mit nachfolgender gleichmäßiger Abnahme der dreizählige Quirl auftreten können.

Kapitel II. Die Anlegung der ersten Stengelblätter im Anschluß an die Kotyledonen.

§ 1. Allgemeine Bemerkungen. Es ist bereits von SCHWENDENER betont worden, daß die Blattstellungen, welche an der Hauptachse der Pflanzen angetroffen werden, bestimmt sind durch die Anschlußverhältnisse der ersten Blätter an den Kotyledonen. Dennoch hat sich dieser Forscher mit den Blattstellungen an Keimpflanzen nicht ausführlich beschäftigt[1]). Wohl hat ROSENPLENTER[2]) eine Untersuchung über das „Zustandekommen spiraliger Blattstellungen bei dikotylen Keimpflanzen" veröffentlicht, aber den Ausgangspunkt seiner theoretischen Erörterungen bildet die Voraussetzung, daß die neuen Organe an den Stellen niederen äußeren Druckes am Scheitel hervortreten. Es will mir scheinen, daß man, wenn möglich, für die Erklärung der Blattstellungen Annahmen vermeiden muß, welche der Beobachtung nicht zugänglich sind. Wir wollen nun nachweisen, daß sich die Anschlußverhältnisse in den Keimpflanzen ganz aus den Beobachtungstatsachen, welche wir in § 1 des vorigen Kapitels klargelegt haben, erklären lassen. Obwohl das Beobachtungsmaterial, auf das sich meine experimentelle Arbeit erstreckt hat, ziemlich beschränkt war, so genügen die folgenden Wahrnehmungen doch, um daraus den wichtigen Schluß ziehen zu können, daß in zahlreichen Fällen das Auftreten von Blattstellungen aus der Hauptreihe eine Folge der einfachen Anschlußverhältnisse der ersten Stengelblätter ist.

§ 2. Das Auftreten der zweireihigen Blattstellung als bleibende Stellung im Anschluß an die Kotyledonen. Betrachten wir zuerst die Fälle, in welchen die Hauptachse der Pflanze in ihrer ganzen Länge die zweireihige Blattstellung aufweist. Be-

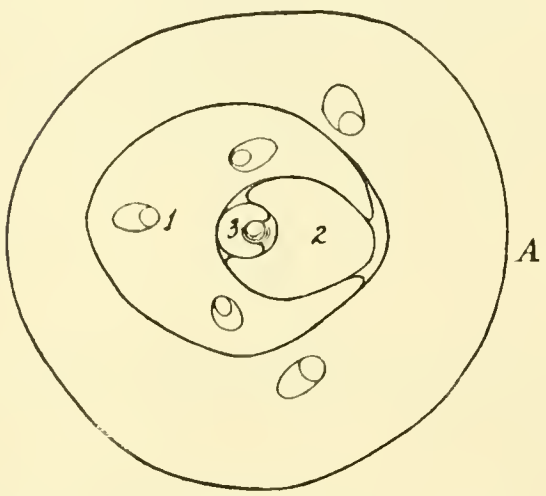
1) Eine Ausnahme bilden die Keimpflanzen von *Pinus*, welche von SCHWENDENER genau untersucht sind, wie später noch näher besprochen wird.

2) Inauguraldissertation. Berlin, GUSTAV SCHADE. 1890.

kanntlich ist dies hauptsächlich der Fall bei den Monokotylen, obwohl auch bei den Dikotylen diese Blattstellung öfters verwirklicht ist. Es wird nun nach unseren Erörterungen klar sein, daß eine solche Stellung auftreten muß, sobald alle Blätter, welche auf den einen oder die beiden Kotyledonen folgen, einen Durchmesser besitzen, der größer ist, als die Hälfte des Stengelumfangs (der Faktor b also größer als $^1/_2$).

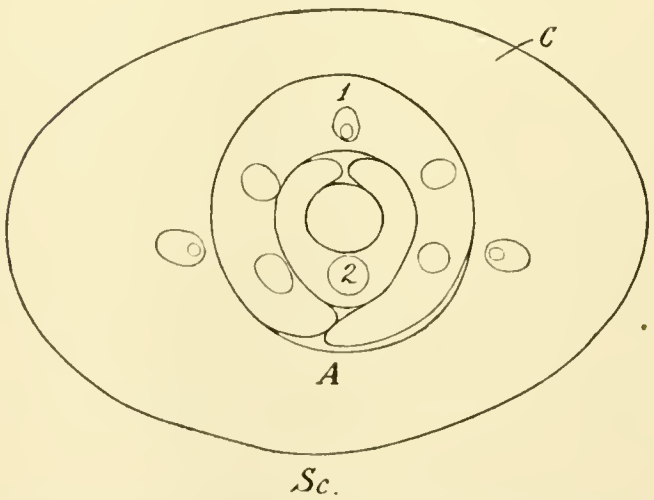
Nehmen wir als Beispiel für eine monokotyle Pflanze die Keimpflanze von *Asphodelus luteus*. Die Fig. 73 stellt eine solche Pflanze dar, welche drei Blätter angelegt hat, die vollständig von der Kotyledonarscheibe umgeben sind. Die beiden Leitbündel, welche man in dieser Scheibe bemerkt, stammen aus dem oberen Teil derselben, welcher durch ein Mittelstück in Verbindung mit dem Samen steht, der durch die Keimpflanze aus der Erde gehoben wird. Mittelstück und Samen befinden sich also oberhalb der Stelle, welche wir mit dem Buchstaben *A* benannt haben. Warum nun Blatt 1 gegenüber der Stelle *A* hervorgetreten ist, läßt sich bei dieser Pflanze nicht mit absoluter Gewißheit sagen, weil die Kotyledonarscheibe den Stengel ganz umgibt und sich also keine bevorzugte Stellung (größere Lücke) angeben läßt. Ein Studium der Entwicklungsgeschichte würde diese Frage entscheiden. Es herrscht jedoch meines Erachtens kein Zweifel, daß sich dadurch herausstellen würde, daß auch am Embryo die Anlage des Blattes 1 nach den aufgestellten Regeln zustande kommt. Was nun die Blätter 2 und 3 anbelangt, so ist ihre Lage unzweideutig bestimmt, weil ihr Durchmesser größer als die Hälfte des Stengelumfangs und nur eine Lücke vorhanden ist.

Fig. 73.



Querschnitt der Hauptknospe einer Keimpflanze von *Asphodelus luteus*. Auf den Kotyledon folgt die zweireihige Blattstellung. Vergr. 35.

Fig. 74.



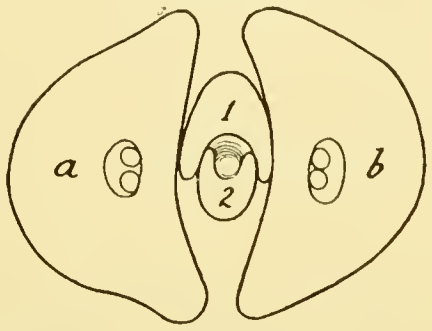
Querschnitt der Hauptknospe einer Keimpflanze von *Lolium perenne*. *Sc.* gibt die Lage des Scutellum an. *C* Coleoptile. Vergr. 80.

Als zweites Beispiel wählen wir die Keimpflanze von *Lolium perenne*. (Fig. 74.) Bekanntlich sind die Meinungen über die morphologische Deutung der Organe des Embryos der Gräser geteilt. Wir bemerken nur, daß „Scutellum“ und „Coleoptile“ („Piléole“ von

VAN TIEGHEM) superponiert stehen und daß die mit *A* bezeichnete Stelle sicher als Achsel der Coleoptile aufzufassen ist[1]). Dennoch ließ sich wieder aus unserer Figur nicht die Notwendigkeit der Stellung von Blatt 1 ablesen; auch hier konnte man nur durch das Studium der Entwicklungsgeschichte die Gewißheit bekommen, ob auch dieses Blatt in Übereinstimmung mit den von uns vorausgesetzten Beobachtungstatsachen angelegt wurde. Daß dies mit den folgenden Blättern der Fall ist, wird ohne weiteres einleuchten. Bemerken wir nur noch, daß das Übergreifen der Ränder bei den Gräsern eine sekundäre Erscheinung ist, welche in unserer Zeichnung noch sehr wenig ausgesprochen ist, aber bei älteren Keimpflanzen sehr beträchtlich sein kann[2]).

Schließlich möge nun auch eine Keimpflanze einer dikotylen Pflanze mit zweireihiger Blattstellung betrachtet werden. Figur 75 stellt eine solche von *Asarum europaeum* dar, in einem Alter, in dem nur zwei Blätter angelegt sind. Dennoch wird diese Abbildung genügen, um klar zu legen, daß dieser Fall ganz das erwartete Verhältnis aufweist. Bemerkenswert ist, daß die Medianebene der Stengelblätter senkrecht zur Medianebene der Kotyledonen steht, und man wird sich von diesem Verhalten auch leicht an anderen dikotylen Pflanzen mit zweireihiger Blattstellung überzeugen können, ohne daß man dazu zur Betrachtung von Querschnitten überzugehen braucht.

Fig. 75.



Querschnitt der Hauptknospe einer Keimpflanze von *Asarum europaeum*. *a* und *b* sind die Kotyledonen. Vergr. 35.

§ 3. Das Auftreten der zweireihigen Blattstellung im Anschluß an die Kotyledonen als Übergang zur Blattstellung mit dem Kontakt 1 und 2. Dieselbe Anschlußfigur, wie wir sie bei der Keimpflanze von *Asarum europaeum* kennen gelernt haben, wird auch ganz allgemein verbreitet angetroffen bei Arten, welche eine spiralige Blattstellung aufweisen. In diesem Fall wird aber das Blatt 3 nicht, wie bei den letztgenannten, oberhalb Blatt 1 eingefügt sein, sondern es kommt eine Übergangsfigur zum Vorschein, welche ganz mit dem Schema übereinstimmt, das wir in Fig. 2 Tafel XIV abbildeten. Wählen wir als Beispiel die Keimpflanze von *Bellis perennis*, von welcher in Figur 76 verschiedene Entwicklungsstadien abgebildet wurden. Der Querschnitt *A* wurde von einer ganz jungen Keimpflanze angefertigt, und auf dieser Stufe der Entwicklung ist kein wesentlicher Unterschied von dem in Fig. 75 abgebildeten Keimling von *Asarum europaeum* zu bemerken. Die Keimpflanze *B* jedoch zeigt bereits das dritte Blatt in ziemlich weit vorgeschrittener Entwicklung und es wird gleich auffallen, daß es nicht über Blatt 1 steht, sondern seitlich verschoben ist[3]). Zu gleicher Zeit bemerkt man aber, daß der relative Durch-

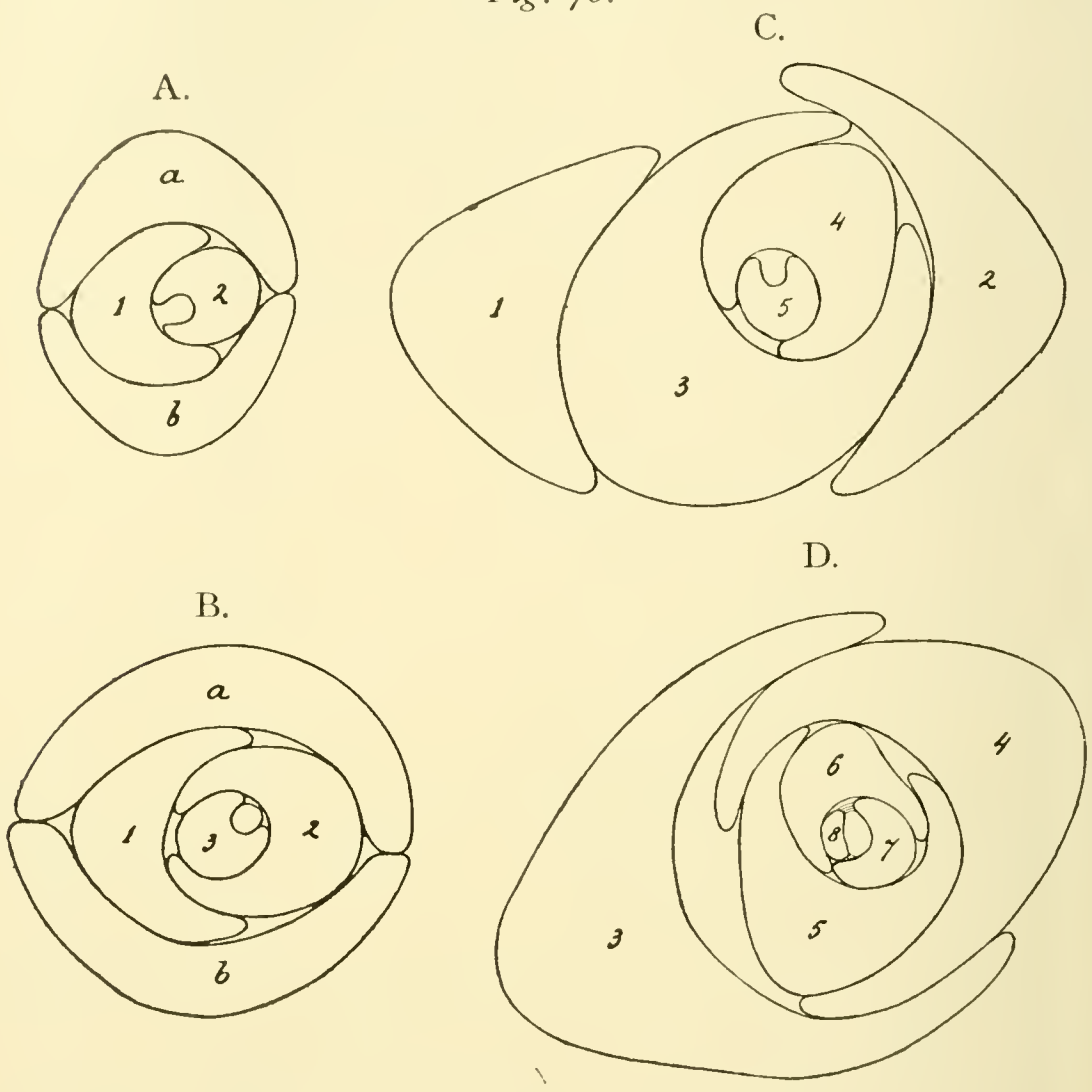
1) Es geht dies u. a. daraus hervor, daß sich an dieser Stelle ein Achselsproß befinden kann.

2) Man siehe z. B. die Keimpflanze von *Zea Mais* in GOEBELS Organographie, S. 603.

3) Tiefer geführte Schnitte zeigen, daß Blatt 3 mit Blatt 1 in Kontakt steht.

messer dieses Blattes bedeutend geringer ist als derjenige der beiden ersten Blätter. Hiermit ist nun die spiralige Blattstellung eingeleitet, und die folgenden Blätter (siehe besonders die Pflanze D)

Fig. 76.



Keimpflanzen von *Bellis perennis*, *a* und *b* sind die Kotyledonen. Fig. A., B. und C. 40mal vergr., Fig. D. 30mal.

werden mit dem Kontakt 1 und 2 angelegt, wie es nach unseren theoretischen Erörterungen zu erwarten war. Daß die Blätter hier in den höheren Teilen nicht den richtigen Kontakt aufweisen, ist wieder sekundären Änderungen zuzuschreiben, wir können dafür auf das früher Gesagte (siehe S. 203) verweisen.

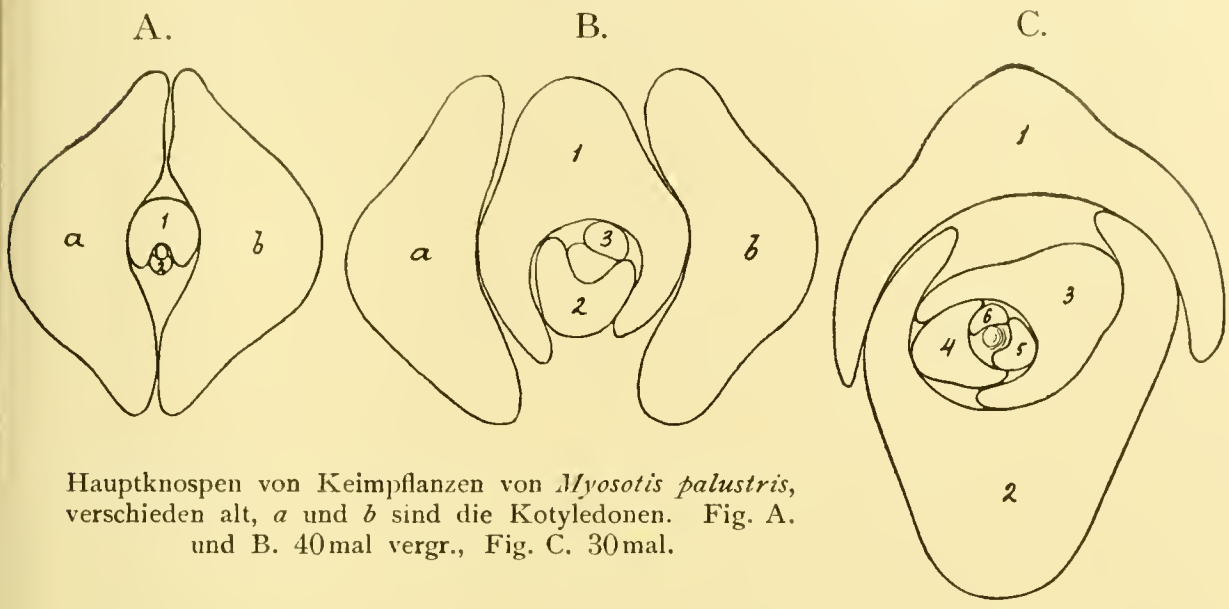
Wir haben gesehen, daß in unserem Schema die Stellung des Blattes 3 willkürlich rechts oder links von Blatt 2 angenommen werden konnte. Es kommen auch in der Natur beide Möglichkeiten vor und als Folge davon kann an der Pflanzenachse sowohl eine links- als eine rechtsgewundene Hauptspirale angetroffen werden.

Als zweites Beispiel haben wir die Keimpflanze von *Myosotis palustris* (Fig. 77) gewählt; es entspricht diese Pflanze unserem Schema noch besser als die vorige.

Der jetzt betrachtete Fall ist auch von ROSENPLENTER beschrieben worden; dieser Autor sieht die Grundursache des Auftretens der zweizeiligen Blattstellung im Anschluß an die Kotyle-

donen darin, daß diese Organe für bestimmte Arten kleine Unregelmäßigkeiten in der Stellung aufweisen. Sind die Kotyledonen so inseriert, daß die Hauptachsen ihrer Insertionsflächen horizontal liegen, und ihre Mediane einen Winkel von 180° bilden, so wäre

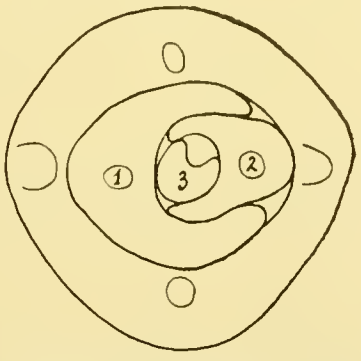
Fig. 77.



Hauptknospen von Keimpflanzen von *Myosotis palustris*, verschieden alt, *a* und *b* sind die Kotyledonen. Fig. A. und B. 40mal vergr., Fig. C. 30mal.

nach ROSENPLENTER ein dekussiertes Blattpaar in Anschluß an die Kotyledonen zu erwarten. Ich kann mich dieser Meinung jedoch nicht anschließen. Betrachtet man z. B. die in Fig. 78 abgebildete Keimpflanze von *Rudbeckia amplexicaulis,* so sind dabei die beiden genannten Bedingungen erfüllt, wie daraus zu ersehen ist, daß die Leitbündel der Kotyledonen genau einander gegenüber gestellt sind, während diese Organe zu einer Scheide verwachsen sind. Dennoch geschieht hier der Übergang zur Spiralstellung ganz nach demselben Schema wie in dem vorigen Fall.

Fig. 78.



Querschnitt durch eine Keimpflanze von *Rudbeckia amplexicaulis*. Die Seitenränder der Kotyledonen sind auf der rechten und linken Seite zusammengewachsen und dort befinden sich Gefäßbündel.

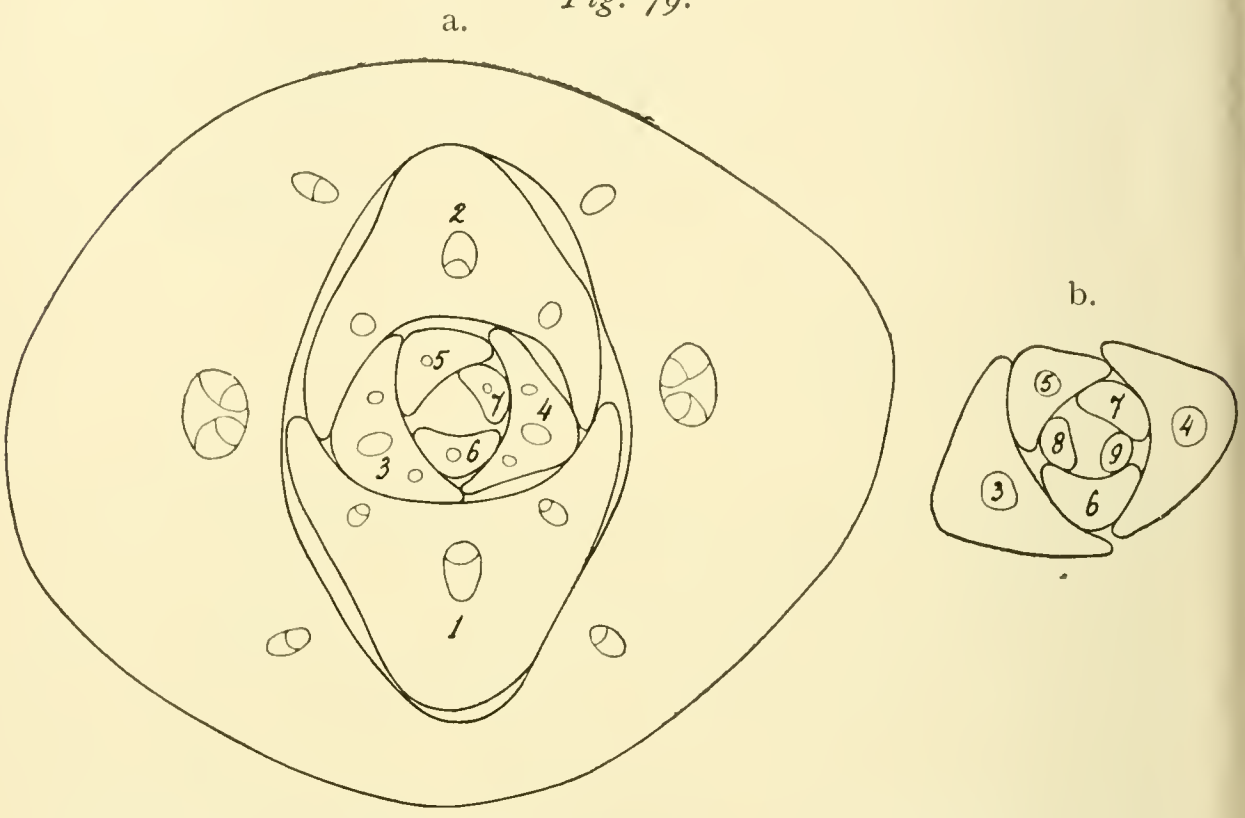
Die genannten Unregelmäßigkeiten sind nach meiner Meinung für die Erklärung der Anschlußverhältnisse an den Keimpflanzen ohne Bedeutung. Vielmehr glaube ich annehmen zu dürfen, daß diese Eigentümlichkeiten immer sekundär auftreten. So beobachtet man öfters, daß bei ganz jungen Keimpflanzen, z. B. von *Bellis perennis,* die Kotyledonen genau einander gegenüber stehen, während sie bei älteren einen Winkel mit einander bilden. Ohne Zweifel hat hier das Blatt 1 (siehe Fig. 76 A.) die beiden Kotyledonen auseinander gedrückt.

Die gleichen Anschlußverhältnisse, wie sie hier beschrieben wurden, fanden wir auch bei *Lactuca perennis, Althaea officinalis, Senecio vulgaris, Campanula Medium, Melilothus cœrulcus, Isatis tinctoria, Lupinus albus* und *luteus.* Auch in der Arbeit ROSENPLENTERS sind mehrere Beispiele für diese Anschlußverhältnisse zu finden, so daß man sie als eine allgemein im Pflanzenreich verbreitete annehmen kann.

Hiermit ist einer der wichtigsten Gründe für das Auftreten von Blattstellungen aus der Hauptreihe aufgefunden.

Dennoch muß bemerkt werden, daß es öfters vorkommt, daß die Blätter 1 und 2 nur wenig mehr als die Hälfte des Stengels umfassen und sie werden dann auch nur wenig in Größe verschieden sein; auch wird Blatt 2 dann nur wenig höher eingefügt sein als Blatt 1. Hierdurch kann dann der Eindruck entstehen, als wäre ein dekussiertes Blattpaar angelegt. Ein Querschnitt durch die Keimpflanze von *Cnicus benedictus* (siehe Fig. 79) möge dies er-

Fig. 79.



Querschnitt einer Keimpflanze von *Cnicus benedictus*. Die Seitenränder der Kotyledonen sind zusammengewachsen. Fig. b. Der innere Teil einer älteren Keimpflanze. Beide Figuren 45mal vergrößert.

läutern. Blatt 2 dieser Figur ist ohne Zweifel kleiner als Blatt 1 und höher inseriert. Die Blätter 3, 4 und 5 sind nach dem bekannten Schema angelegt. Vom letzten Blatt ab gerechnet zeigt sich aber ein abweichendes Verhalten: der Blattdurchmesser nimmt noch mehr ab und es geht der Kontakt 1 und 2 in einen 2 und 3 über. Es ist dies besonders in der Fig. 79b, welche einer älteren Keimpflanze entnommen wurde, sehr deutlich. Hier ist also der Übergangsfall verwirklicht, den wir in Fig. 4 Tafel XIII als Kreiskonstruktion auf der Kreiszylinderfläche darstellten.

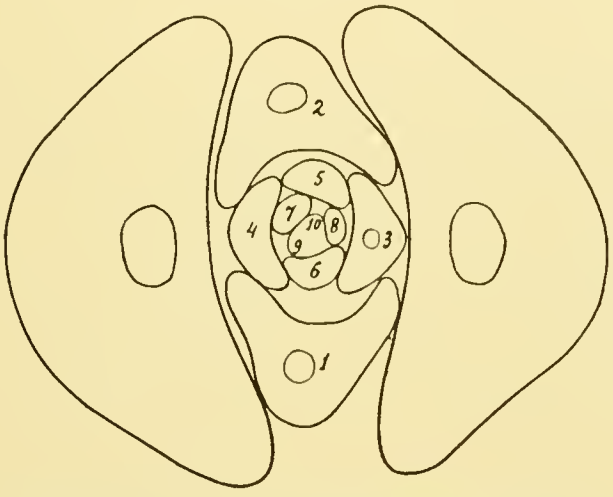
Wir werden bald sehen, daß dieser Fall den Übergang darstellt zu denjenigen Fällen, bei welchen die zwei ersten Blätter dekussiert stehen. Es werden zwischen diesen äußersten Fällen jedoch noch mehr Übergangsformen gefunden, indem das eine Mal die Blattstellung mit dem Kontakt 1 und 2 beibehalten (z. B. bei *Lupinus luteus*), das andere Mal eine Stellung mit dem Kontakte 2 und 3 noch schneller erreicht wird (z. B. bei *Malva sylvestris*). Alle diese Abweichungen finden ihre Begründung in der Tatsache, daß die Blätter 1 und 2 kein „rechtwinkliges" Kontaktsystem 1 und 1

bilden, wie wir das in unserem Schema annahmen. Es kann dieser Umstand jedoch nicht gegen unsere Theorie angeführt werden, denn wir haben dabei ein solches rechtwinkliges Kontaktsystem nur vorausgesetzt in dem Fall, daß eine konstante Blattstellung existiert; die Blätter 1 und 2 bei den jetzt betrachteten Keimpflanzen stellen aber solche dar, welche auf einer Übergangszone gelegen sind.

Bei allen Übergangsfällen, die hier in Betracht kommen, ist leicht einzusehen, welche Änderungen unser Schema aus Fig. 2 Tafel XIV erfahren muß, um sich den natürlichen Verhältnissen ganz genau anzuschließen. Immer geschieht also die Anlage neuer Organe in Übereinstimmung mit den Beobachtungstatsachen, die wir als das morphologisch Gegebene betrachtet haben.

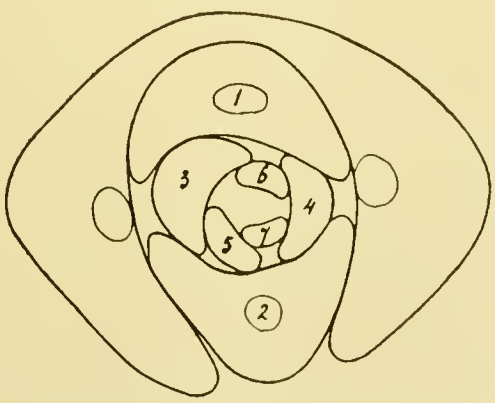
§ 4. Das Auftreten der dekussierten Blattstellung im Anschluß an die Kotyledonen als Übergang zur Blattstellung mit dem Kontakt 2 und 3. Daß bei solchen Pflanzen, welche die dekussierte Stellung ihren ganzen Stengel entlang aufweisen, das erste Blattpaar gegenüber den Kotyledonen um 90° gedreht steht, und daß dabei also diese Organe sich als die ersten Glieder einer konstanten Blattstellung ergeben, braucht keine nähere Erklärung, und wir haben deshalb die Abbildung einer Keimpflanze, welche dieses Verhalten zeigt, für unnötig befunden. Öfters wird man jedoch auch bei Pflanzen mit spiraliger Blattstellung als erstes Blattpaar ein dekussiertes finden. Als Beispiel für diese zweite sehr allgemein angetroffene Übergangsblattstellung wählen wir die Keimpflanze von *Ulex europeus* (Fig. 80). Auf die Kotyledonen folgen hier zwei dekussierte Blattpaare; wir haben die hier gemeinten Blätter mit den Zahlen 1 bis 4 benannt, obwohl wir ausdrücklich bemerken, daß damit nicht gemeint ist, daß sie auch in dieser Reihenfolge hervorgetreten sind. Die Blätter 5 und 6 sind bereits nicht mehr genau dekussiert und mit denjenigen 7 und 8 ist die spiralige Blattstellung eingeleitet. Man trifft hier also ganz genau den Übergangsmodus verwirklicht an, den wir in unserem Schema Fig. 3 Tafel XV abgebildet haben.

Fig. 80.



Querschnitt durch eine Keimpflanze von *Ulex europaeus*, das Blattpaar 1 und 2 folgt auf die Kotyledonen. Vergr. 35.

Fig. 81.



Querschnitt einer Keimpflanze von *Delphinium consolida*. Die Kotyledonen sind einseitig verwachsen. Vergr. 35.

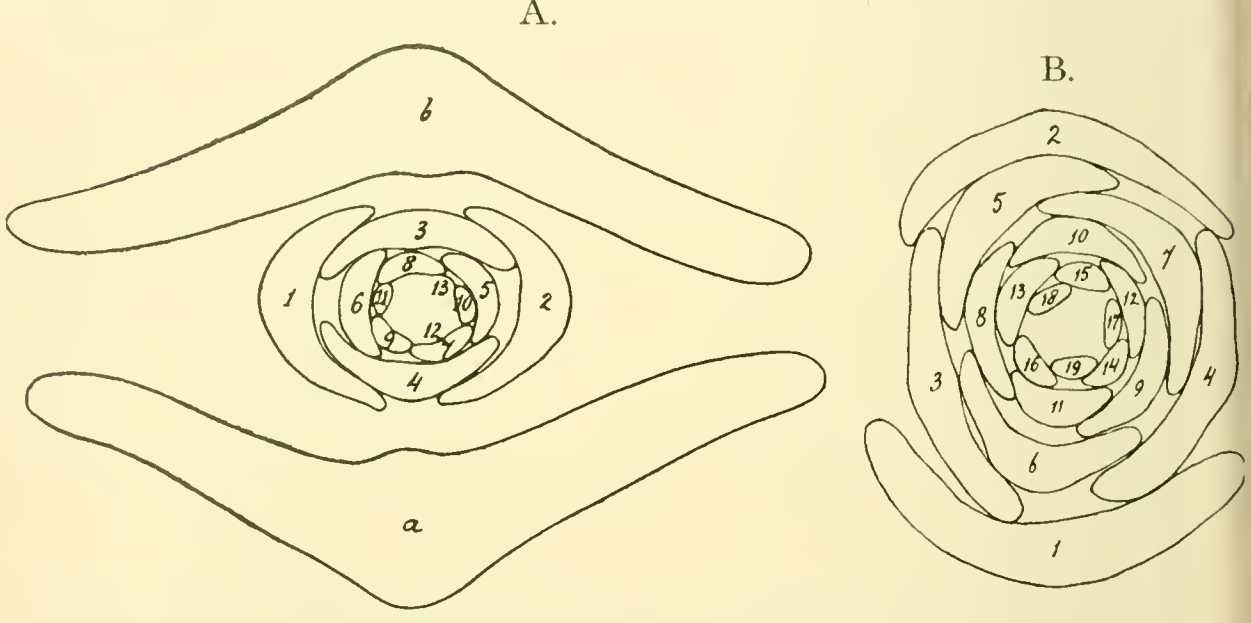
Noch schneller ist die spiralige Blattstellung bei der Keimpflanze

von *Delphinium consolida* eingetreten, die in Fig. 81 reproduziert wurde. Die beiden Kotyledonen sind hier an der einen Seite zusammengewachsen, an der anderen frei, was jedoch an den Stellungsverhältnissen nichts geändert hat, und wahrscheinlich ganz sekundärer Natur ist.

Die hier betrachtete Übergangsfigur fanden wir noch bei *Nicotiana Tabacum, Spinacia oleracea, Calendula officinalis, Sinapis alba, Datura Stramonium,* während auch aus der Arbeit ROSENPLENTERS Beispiele dafür zu entnehmen sind. Hiermit ist also ein zweiter, sehr wichtiger Grund aufgefunden, warum in der Natur die Blattstellungen aus der Hauptreihe so zahlreich verwirklicht sind.

Von Interesse ist weiter noch der Übergangsfall, der in der Keimpflanze von *Linum usitassimum* angetroffen wird (siehe Fig. 82).

Fig. 82.



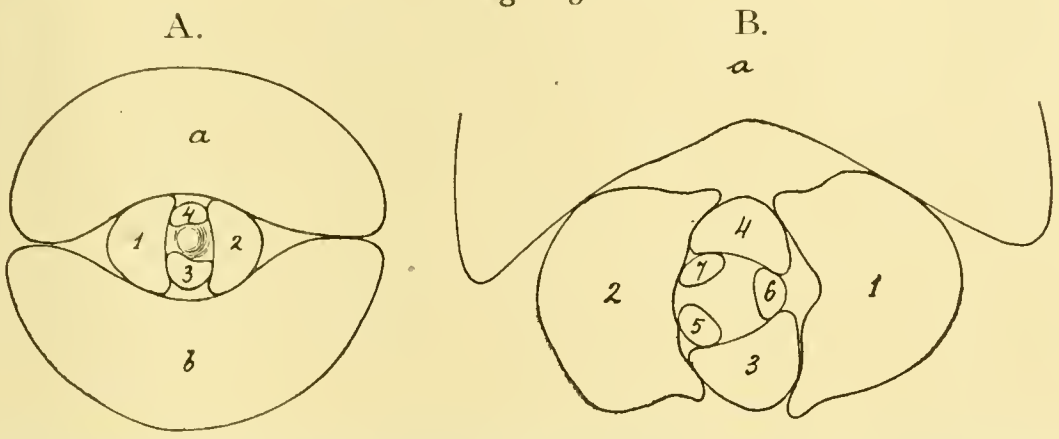
Querschnitt durch Keimpflanzen von *Linum usitatissimum*. *a* und *b* sind die Kotyledonen. Vergr. 30.

Auch hier kommen nach den Kotyledonen einige dekussierte Blattpaare vor, und zwar ist ihre Anzahl sehr verschieden bei verschiedenen Keimpflanzen. Die Blattspirale wird auch jetzt nach demselben Schema eingeleitet. Während aber bei den vorigen Pflanzen die Kontaktstellung 2 und 3 beibehalten wird, nimmt hier der Organdurchmesser noch stärker ab und es kommt eine Blattstellung mit dem Kontakt 3 und 5 zum Vorschein. Hier findet man also einen Fall verwirklicht, bei dem eine Blattstellung aus der Hauptreihe übergeht in die folgende höhere aus derselben Reihe. Es ist dieser Übergang analog demjenigen von Kontakt 3 und 5 in den Kontakt 5 und 8, welchen wir in Fig. 6 Tafel XIV abbildeten.

§ 5. Das Auftreten der dekussierten Blattstellung im Anschluß an die Kotyledonen als Übergang zum dreizähligen Quirl. Wir haben bei unseren theoretischen Betrachtungen auseinander gesetzt, wie durch gewisse Änderungen in dem Wert des Faktors *b* die dekussierte Blattstellung auf sehr einfache Weise in einen dreizähligen Quirl übergehen kann. Die Keimpflanze von *Impaticns glanduligera* gibt uns für dieses Verhalten

ein interessantes Beispiel (Fig. 83). Auf die beiden Kotyledonen folgt ein Blattpaar, das ziemlich genau dekussiert gestellt ist, aber doch von dieser Stellung eine gewisse Abweichung zeigt. Das zweite darauf folgende Blattpaar weicht bereits bedeutend von der

Fig. 83.



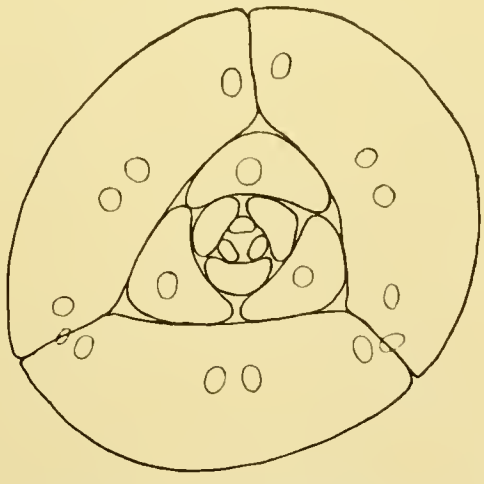
Querschnitte durch Keimpflanzen von *Impatiens glanduligera*. *a* und *b* sind die Kotyledonen. Fig. A. 28mal vergr., Fig. B. 35mal.

Dekussation ab, auch sind diese beiden Blätter nicht gleich groß, also wahrscheinlich nicht gleichzeitig angelegt. Diese Abweichungen genügen, um die folgenden drei Blätter, welche mit kleinerem Wert von *b* angelegt werden, in eine Stellung zu bringen, die sich bereits sehr stark derjenigen des dreizähligen Quirls nähert. Zwar wird dieser Quirl durch diese drei Blätter noch nicht ganz genau verwirklicht, aber bei den folgenden Blattwirteln ist von dieser Unregelmäßigkeit nichts mehr zu bemerken.

Der Übergang ist also hier ganz wie es unsere theoretische Fig. 4 auf Taf. XV zeigt, zu stande gekommen.

§ 6. Andere Anschlußverhältnisse an den Keimpflanzen. Obwohl nun mit den besprochenen Fällen die wichtigsten Übergangsfiguren, welche im Anschluß an die Kotyledonen auftreten, behandelt sind, so muß doch bemerkt werden, daß damit die Möglichkeiten noch nicht erschöpft sind. So möge hier noch ein interessantes Beispiel für eine andere Art folgen, in welcher ein dreizähliger Quirl zu stande kommen kann. Fig. 84 stellt einen Querschnitt durch eine tricotyle Keimpflanze von *Helianthus annuus* dar. Diese Pflanze zeigt in normalem Anschluß an die drei Kotyledonen einen regelmäßigen dreizähligen Quirl[1]). Es ist dieses Verhalten darum besonders lehrreich, weil daraus hervorgeht, daß die Blattstellung der Pflanze nicht von vornherein bestimmt ist, aber ganz

Fig. 84.



Querschnitt einer Keimpflanze von *Helianthus annuus* mit drei Kotyledonen. Vergr. 30.

1) Man vergleiche auch Hugo de Vries, Die Mutationstheorie Bd. II, 1903, S. 228: Einfluß der Trikotylie auf die Blattstellung.

und gar von der Art der Basis abhängt, an die sich die folgenden Blätter anschließen müssen.

Bei *Callithris quadrivalvis* nahm ich die Anlegung von drei-, vier- und fünfzähligen Quirlen wahr, je nachdem die Anzahl Kotyledonen drei, vier oder fünf betrug. Hiermit sind wir zu der Frage nach der Anlegung der ersten Blätter bei den polycotylen Koniferenkeimpflanzen gelangt, welche für solche von *Pinus* besonders von SCHWENDENER[1]) studiert wurden. Aus den Beobachtungen dieses Forschers geht hervor, daß die Blattbasen oberhalb der Kotyledonen meistens ziemlich breit werden und daß dadurch einfache Spiralstellungen eingeleitet werden. Dabei muß noch bemerkt werden, daß es durch die Untersuchungen von DUCHARTRE[2]) große Wahrscheinlichkeit gewonnen hat, daß die verschiedenen Kotyledonen in zwei Gruppen einzuteilen sind, welche den Kotyledonen der dikotylen Pflanzen entsprechen. Auch diese Überlegung macht ein normales Zustandekommen der spiraligen Blattstellungen aus der Hauptreihe bereits wahrscheinlich.

Hauptsache ist, daß mit Ausnahme von solchen Fällen, in welchen starke Kantenbildungen *(Cyperaceae, Cactaceae)* die Blattstellung beeinflussen, immer die Anschlußverhältnisse bei den Keimpflanzen den Beobachtungstatsachen entsprechen, welche wir in § 1 des vorigen Kapitels angaben, und daß in zahlreichen Fällen sich daraus das Hervortreten einer Blattstellung aus der Hauptreihe als Notwendigkeit ergibt. Ich zweifle nicht daran, daß sich auch die hier nicht in Betracht gezogenen Fälle in gleicher Weise erklären lassen.

§ 7. Nachträgliche Änderung in der Blattanlegung. Obwohl die Übergänge verschiedener Blattstellungen an dem Pflanzenstengel einem weiteren Studium vorbehalten bleiben müssen, so will ich dennoch nicht unterlassen hier ein einziges Beispiel dieser Art anzuführen, weil es sich in vorzüglicher Weise an unsere vorigen Betrachtungen anschließt. In *Euphorbia Lathyris* findet man eine Pflanze, die im ersten Frühjahr ihrer Entwicklung (die Pflanze ist zweijährig) eine genau dekussierte Stellung ihrer Blätter aufweist. Bisweilen behält die Pflanze diese Stellung sehr lange bei und zeigt diese noch bei etwa 75 cm Länge. Ein solches Exemplar findet man in Fig. 1 Taf. XVI abgebildet. Unsere photographische Aufnahme stellt die Pflanze schief von oben gesehen dar und die kreuzweise Stellung der Blätter muß gleich auffallen. Bei den meisten Individuen jedoch zeigen im Sommer und Herbst die zuletzt angelegten Blätter eine merkbare Abweichung von der Dekussation, aber nicht immer ist die dadurch bedingte Unregelmäßigkeit von derselben Art. Es zeigt sich nämlich an den weiter entwickelten Pflanzen, daß zwei verschiedene Blattstellungen zu stande kommen können: der dreizählige Quirl und eine spiralige Blattstellung mit dem Kontakt 2 und 3. Die Fig. 2 der genannten Tafel stellt eine Pflanze im ersten Stadium des Überganges zu dem dreizähligen Quirl dar, Fig. 3 und 4 geben

1) Über den Wechsel der Blattstellungen an Keimpflanzen von *Pinus*. Verhandlungen des Botanischen Vereins der Provinz Brandenburg, 21. Jahrg., 1879, Sitzung vom 27. Juni, S. 109—111.

2) Sur les Embryons qui ont été décrits comme polycotylés. Ann. d. Sciences naturelles, Botanique, 3ième Série, T. IX, 1848, p. 362—382.

ein Exemplar (dieselbe Pflanze ist in beiden Figuren in verschiedener Lage wiedergegeben), bei welchen die oberen Blätter deutlich auf 6 vertikalen Reihen geordnet sind, während unten am Stengel die dekussierte Stellung noch sichtbar ist. Die Fig. 5 und 6 stellen eine Pflanze dar (beide Figuren von derselben Pflanze, aber in verschiedener Stellung), bei welcher die oberen Blätter auf fünf gewundenen Zeilen zu ordnen sind; auch hier ist am unteren Teil die Dekussation deutlich wahrnehmbar. Daß die fünfzeilige Blattstellung wirklich eine solche mit dem Kontakt 2 und 3 ist, konnte mit Sicherheit durch die Herstellung von Querschnitten des Vegetationspunktes festgestellt werden: dieselben entsprachen ganz dem Schema aus Fig. 5 Taf. X. Die fünf stark ins Auge fallenden Spiralen sind also keine Kontaktspiralen (man vergleiche S. 221).

Weil die Änderung der Blattstellung hier nicht wie bei den Keimpflanzen auf einer ganz bestimmten Stufe der Entwicklung auftritt, so hat es große Schwierigkeiten, Querschnitte herzustellen, welche diese Übergänge gerade zeigen. Dennoch ist mir das für den Übergang zu dem dreizähligen Quirl wenigstens teilweise gelungen. Aus den Beobachtungen, welche ich bei der Herstellung solcher Querschnitte machte und aus der Ordnung der Blätter an den Übergangsstellen bei ausgewachsenen Pflanzen geht zweifellos hervor, daß die neuen Stellungen nach den beiden theoretischen Schemas zustande kommen, welche wir in den Figuren 3 und 4 Tafel XV abbildeten. Eben dieser Umstand war es, der uns veranlaßte, diesen Fall veränderlicher Blattstellung an Pflanzenstengeln hier näher zu erläutern.

Eine wichtige Beobachtung möge hier noch hinzugefügt werden. Diejenigen Pflanzen, bei welchen der Übergang nach dem dreizähligen Quirl verwirklicht ist, zeigen in vielen Fällen an den Übergangsstellen oder kurz darunter „gespaltene“ Blätter, und zwar werden bei verschiedenen Individuen alle möglichen Zwischenformen zwischen einem einzigen ganzen Blatt und einem völlig gespaltenen, d. h. zwei Blättern angetroffen. Dabei fällt es auf, daß solche Blätter, bei welchen nur die Spitze ein wenig eingeschnitten ist, eine einzige Achselknospe besitzen, während, wenn die Spalte tiefer geht, zwei solche Knospen sichtbar werden. Im letzteren Fall ist auch der Blattnerv in seiner ganzen Länge verdoppelt. Ich erinnere daran, daß das Vorkommen solcher „gespaltenen“ Blätter besonders von DELPINO[1]) studiert wurde; man findet in seiner „Teoria Generale della Fillotassi“ eine Reihe Beispiele von Pflanzen angegeben, welche solche Blätter öfters zeigen. Am meisten wurden sie von DELPINO bei solchen Arten angetroffen, welche die dekussierte Blattstellung oder den dreizähligen Quirl aufweisen.

Von Interesse ist es nun hervorzuheben, daß man die gespaltenen Blätter bei *Euphorbia Lathyris* nur nahe an den Übergangsstellen antrifft und zwar allein bei solchen Individuen, welche höher am Stengel den dreizähligen Quirl zeigen. Es hat mich dieser Umstand zur Aufstellung der folgenden Hypothese geführt. Man betrachte nochmals das Schema Fig. 4 Tafel XV und denke sich

1) Teoria Generale della Fillotassi, Genova 1883, p. 197 u. f. Man vergleiche auch: HUGO DE VRIES: Over Verdubbeling van Phyllopodien, l. c. und Die Mutationstheorie, II. Band, 1903, S. 212 u. f.

darin die Blätter 2 und 2′ mit einem größeren relativen Durchmesser im Anschluß an das Blattpaar 1 und 1′ angelegt. Die Blätter 3′ und 3″ würden dann dichter aneinander rücken und sich unter bestimmten Bedingungen berühren können. Wäre der Wert von *b* für die Blätter 2 und 2′ noch ein wenig größer als im letzten Fall, so müßten 3′ und 3″ übereinander fallen. Wie wird die Pflanze jetzt diesen Umstand vermeiden? Es besteht die Möglichkeit, daß ein einziges Blatt in dieser Lücke zwischen 2 und 2′ angelegt wird; aber wenn man bedenkt, daß die Blätter 3 und 3′ nicht von Anfang an ihre definitiven relativen Durchmesser zu zeigen brauchen, so ist es auch nicht ausgeschlossen, daß anfangs 3 und 3′ als zwei verschiedene Höcker zum Vorschein kommen, die sich aber bei ihrer weiteren Entwicklung berühren, um dann gleichzeitig wie ein einziges Blatt hervorgehoben zu werden. Je nachdem die Berührung später oder früher erfolgt, soll dann die Doppelnatur des Blattes in allen ihren Eigentümlichkeiten mehr oder weniger sichtbar werden. Das Auftreten von gespaltenen Blättern sollte nach dieser Hypothese durch die Hinneigung zur Änderung der Blattstellung veranlaßt werden, welche sich nur in den allerjüngsten Blattanlagen merkbar macht, aber bereits aufgehoben sein soll, wenn diese Anlagen ihre erste Entwicklungsphase vollendet haben. Die Tatsache, daß die gespaltenen Blätter besonders bei Pflanzen mit dekussierter Blattstellung oder dreizähligem Quirl vorkommen, würde durch diese Hypothese völlig erklärt sein.

Kapitel III. Die Anlegung der ersten Zweigblätter im Anschluß an das Tragblatt und den Stamm.

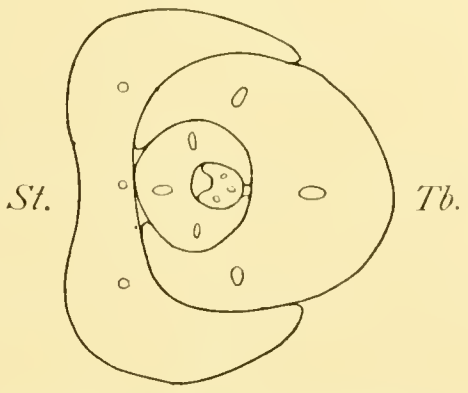
§ 1. Allgemeine Bemerkungen. Daß man das Auftreten bestimmter Blattstellungen an den Zweigen des Stengels aus den Anschlußverhältnissen der ersten Zweigblätter an Stamm und Tragblatt erklären muß, ist von SCHWENDENER in seiner Mechanischen Theorie[1]) nachdrücklich betont worden, und die einzelnen Fälle, welche dabei zu unterscheiden sind, wurden von WEISSE[2]) näher studiert. Die Untersuchungen dieser Autoren haben wichtige Resultate ergeben und sind kräftige Belege für die mechanische Theorie der Blattstellungen. Dennoch will es mir scheinen, daß es auch hier besser ist, die hypothetischen „Druckverhältnisse", welchen die beiden Autoren einen wichtigen Einfluß auf die Anordnung der ersten Zweigblätter zuschreiben, nicht in die Betrachtungen hineinzuziehen. Ich will deshalb auch im Folgenden für einige Fälle den Nachweis zu erbringen suchen, daß die „Raum-" und „Kon-

1) Mechanische Theorie der Blattstellungen, Leipzig 1878, S. 98 u. f.

2) Beiträge zur mechanischen Theorie der Blattstellungen an Axillarknospen. Flora 1889, Neue Reihe, 47. Jahrg., S. 114—140. Man siehe auch: Neue Beiträge zur mechanischen Theorie der Blattstellungen, Pringsheims Jahrb., 1894, 26. Band, S. 236—294.

taktverhältnisse" gänzlich genügen, um das Auftreten bestimmter Stellungen aus der Hauptreihe zu erklären. Es hat sich nämlich für diese Fälle herausgestellt, daß auch hier die Anlegung der ersten Blätter in Übereinstimmung mit den Beobachtungstatsachen aus § 1 S. 253 geschieht, und wir haben gesehen, daß dann bei bestimmter Form der Basis, an welche sich die neuen Organe anschließen, das Auftreten von Stellungen aus der Hauptreihe als eine mechanische Notwendigkeit betrachtet werden muß.

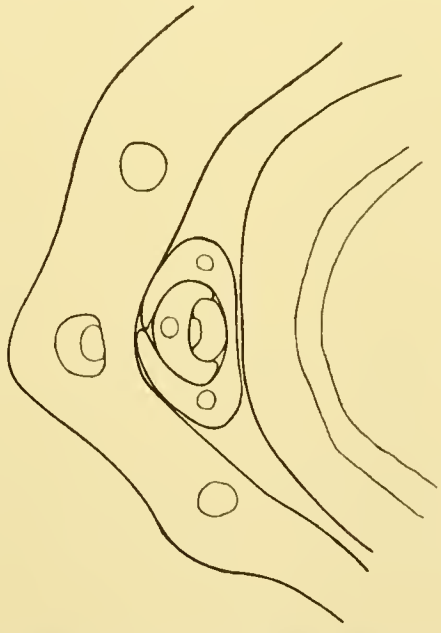
Fig. 85.



Querschnitt einer Axillarknospe von *Lilium bulbiferum*. Der Stengel an der linken Seite, das Tragblatt an der rechten der Knospe. Vergr. 35.

§ 2. Die Anlegung der zweireihigen Blattstellung als definitive bei Axillarknospen. Aus unseren theoretischen Betrachtungen folgt, daß, sobald der relative Durchmesser der Ansatzstellen aller Zweigblätter größer ist als der halbe Umfang des Zweigscheitels, eine zweireihige Stellung auftreten muß. Es wird diese Folgerung wieder ganz durch die Beobachtung bestätigt. So findet man in Fig. 85 eine Seitenknospe von *Lilium bulbiferum* abgebildet, und zwar hat man sich bei *St* den Stamm, bei *Tb* das Tragblatt zu denken. Die Zweigblätter stehen hier in derselben Ebene wie die Stengelblätter; das erste Blatt ist das adossierte Vorblatt.

Fig. 86.



Querschnitt einer Axillarknospe von *Hedera Helix*, zeigt ein adossiertes Vorblatt und zweireihige Blattstellung in der Fläche der Hauptachse. Vgr. 35.

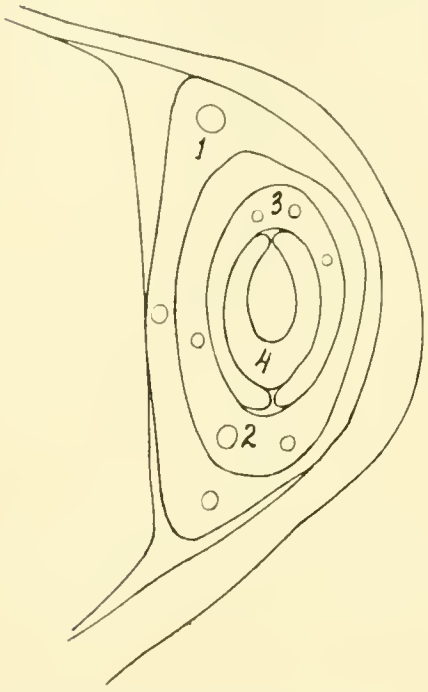
Daß diese Art der Anlegung nicht auf die monokotylen Pflanzen beschränkt ist, geht aus Fig. 86 hervor, welche eine Seitenknospe von *Hedera Helix* zeigt, und zwar an einem Zweige, der, wenigstens anfänglich, eine zweireihige Blattstellung aufweist. Die Anordnung stimmt hier vollkommen mit der soeben besprochenen überein.

Bekanntlich besitzen die dikotylen Pflanzen nur ausnahmsweise ein adossiertes Vorblatt (Beispiele siehe bei Weisse l. c.), und es ist sogar nicht unwahrscheinlich, daß in diesen Fällen dieses Blatt phylogenetisch als die Verwachsung zweier mehr oder weniger lateral gestellter Blätter angesehen werden muß. Speziell in unserem Beispiel deuten die beiden symmetrisch gestellten Leitbündel und die zwei Spitzen, welche das ausgewachsene adossierte Vorblatt zeigt, sehr stark auf ein solches Verhalten hin.

Bei anderen dikotylen Pflanzen mit zweireihiger Blattstellung an den Zweigen findet man oberhalb des Achselblattes ein dekussiertes Blattpaar; dann erst beginnt die zweireihige Stellung. In vielen Fällen ist das erste Blattpaar nicht genau dekussiert gestellt und dann liegt

die zweireihige Stellung in einer schief gestellten Ebene (Beispiel: *Medicago sativa*). Wir wollen diese Fälle hier jedoch außer Betracht lassen und nur darauf hinweisen, daß die abweichende Anordnung des dekussierten Blattpaares ihren Grund in den Raumverhältnissen finden muß, welche der Zweigscheitel bei ihrer Anlegung darbot, sodaß ein Studium der Entwicklungsgeschichte hierüber mehr Licht bringen kann.

Fig. 87.



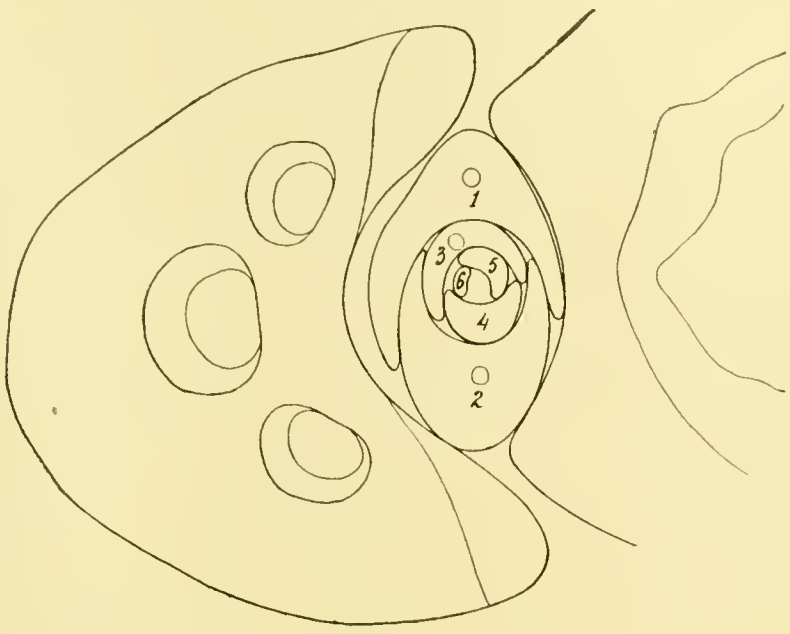
Querschnitt einer Axillarknospe von *Tradescantia discolor*. 1 ist das adossierte Vorblatt. Vergr. 45.

Aber auch bei den Monokotylen ist das oben abgebildete Verhalten Ausnahme. Wohl trifft man dabei immer ein adossiertes Vorblatt an, aber das zweite Blatt steht in den meisten Fällen gedreht. Als Beispiel eines solchen Verhaltens haben wir die Achselknospe von *Tradescantia virginica* gewählt (Fig. 87), wobei das zweite Zweigblatt fast rechtwinklig auf dem Tragblatt gestellt ist. Ohne Zweifel findet diese Abweichung in der asymmetrischen Form der Ansatzstelle des adossierten Vorblattes ihre Erklärung, wodurch die Raumverhältnisse derart geworden sind, daß die größere Lücke am Zweigscheitel nicht oberhalb des Tragblattes, sondern seitwärts gelegen ist. Die Asymmetrie ist in dem Stadium, auf das sich unsere Figur bezieht, noch deutlich zu erkennen; es ist ja der Leitbündel in der Nähe der Zahl 1 stärker ausgebildet als der gegenüber gelegene im adossierten Vorblatt. Auch am Blatt selbst ist deutlich zu sehen, daß die Spitze des Vorblattes, die gegenüber Blatt 2 gelegen ist, viel größer und stärker entwickelt ist, als die, welche sich an der anderen Seite der Knospe befindet. Aus unserer Figur ist weiter auch noch abzulesen, daß von Blatt 2 ab die Ansatzstellen der Blätter wieder symmetrisch angelegt sind und somit die zweireihige Blattstellung beibehalten bleibt.

§ 3. Die Anlegung der zweireihigen Blattstellung an Axillarknospen als Übergang zur Stellung mit dem Kontakt 1 und 2. Ein Blick auf Fig. 88, welche die Anschlußverhältnisse für die Axillarknospe von *Prunus Padus* darstellt, wird genügen, um zu überzeugen, daß bei den Zweigen dieser Pflanze die Blattstellung mit dem Kontakt 1 und 2 auf eine Weise zustande kommt, die ganz übereinstimmt mit einer der wichtigsten Übergangsarten, welcher wir im Anschluß an die Kotyledonen begegnet sind. Denkt man sich in dieser Figur Stamm und Tragblatt durch zwei Kotyledonen ersetzt, so ist sie fast nicht zu unterscheiden von derjenigen, welche wir für die Anlegung der spiraligen Blattstellung bei *Myosotis palustris* gegeben haben (man siehe Fig. 77 S. 277). Dennoch zeigt sich ein Unterschied, der von gewissem Interesse ist. Es ist nämlich für die Axillarknospe von *Prunus Padus* die Stellung von Blatt 3 insofern eine bestimmte, als dieses Blatt immer an der

Seite des Tragblattes gelegen ist, niemals aber nach der Achse zu gerichtet; die Pflanze zeigt, wie SCHWENDENER es ausdrückt, eine

Fig. 88.



Querschnitt einer jungen achselständigen Knospe von *Prunus Padus*. Vergr. 28.

„voranschließende" Zweigspirale. Wäre nun Stamm und Achselblatt ganz den zwei Kotyledonen gleich zu stellen und demnach die Blattstellung ganz in Übereinstimmung mit dem theoretischen Schema aus Fig. 2 Tafel XIV zustande gekommen, so hätte man Blatt 3 mit dem gleichen Rechte an der Seite des Stammes erwarten können (man vergleiche S. 262). Daß dies niemals der Fall ist, weist darauf hin, daß die zwei Stellen, an welchen Blatt 3 nach der Theorie hervortreten kann, in Wirklichkeit hier nicht genau gleichartig sind und daß die nach dem Tragblatt zu gerichtete Lücke in dem Augenblick, als dieses Blatt am Scheitel hervortrat, die größere war.

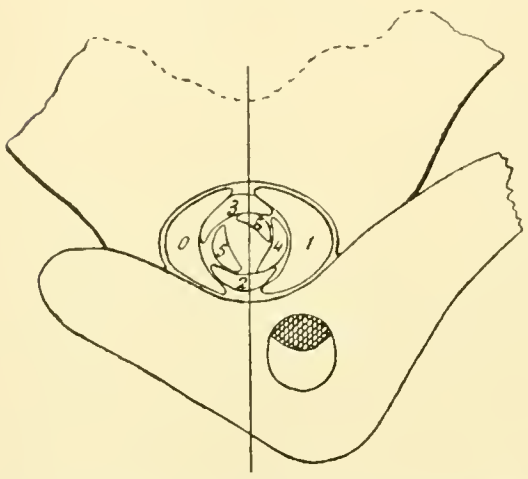
Bekanntlich hat SCHWENDENER die Wahrnehmung gemacht, daß die Fälle mit voranschließenden Zweigspiralen besonders angetroffen werden bei Pflanzen, bei welchen „die Wachstumsrichtung der Knospe" mit der Achse des Mutterstrahls einen sehr spitzen Winkel bildet und wo überdies der Widerstand des Tragblattes, nach Form und Größe des Blattgrundes zu schließen, augenscheinlich geringer ist, als derjenige des Stammes. Dagegen fällt nach seinen Beobachtungen „an Zweigen, welche nahezu rechtwinklig zum Mutterstrahl hervorsprossen", das dritte Blatt auf die Innenseite. Wenn nun aber SCHWENDENER aus diesem Verhalten den Schluß zieht, daß der Druck, der auf die Knospe ausgeübt wird, die angegebene Stellung des dritten Blattes bedingt, dann scheint es mir wieder besser zu sein, anzunehmen, daß durch diese Stellung der Achselknospe gegenüber Stamm und Tragblatt die Blattbasen der Blätter 1 und 2 nicht ganz symmetrisch entwickelt sind, und daß dadurch die nach dem Tragblatt zu gerichtete Lücke als größere bevorzugt wird.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die „seitliche Abweichung" des dritten Blattes hier eine notwendige Folge der zweireihigen Anlegung der Blätter 1 und 2 ist, und daß ich mich dann auch nicht mit der Auffassung von WEISSE einverstanden erklären kann, welcher diese Abweichung als durch die seitliche Verschiebung des Tragblattes verursacht ansieht.

Das hier geschilderte Verhalten kommt nach meiner Erfahrung sehr allgemein vor. Bemerken wir aber, daß, je mehr die Blattgründe der Blätter 1 und 2 sich dem halben Umfang des Scheitels nähern, desto näher die von ihnen gebildete Stellung der Dekussation kommt. Es entstehen auf diese Weise Übergangsfälle, wie wir sie auf S. 278 für die Anschlußverhältnisse an den Kotyledonen getroffen haben.

§ 4. Die Anlegung der dekussierten Blattstellung an Axillarknospen als Übergang zur Blattstellung mit dem Kontakt 2 und 3. In zahlreichen Fällen steht das erste Blattpaar am Zweig dekussiert. Bleibt die Dekussation an dem Zweig beibehalten, so stellt dieses Paar nur das erste Glied der Blattpaare dieser Stellung dar und es kann als überflüssig betrachtet werden, Beispiele für dieses Verhalten anzuführen. In anderen Fällen geht diese Blattstellung bald in eine spiralige über. So stellt Fig. 89, welche aus der Arbeit SCHWENDENERS[1]) entnommen ist, die Axillarknospe von *Chrysocoma coma aurea* dar, und es wird gleich auffallen, daß hier ein uns bekannter Übergangsfall verwirklicht ist, den wir bei vielen Keimpflanzen angetroffen und in Fig. 3 Tafel XV nach unseren theoretischen Voraussetzungen in Folioidenkonstruktion entworfen haben. Die Blätter 0 und 1 in Figur 89 zeigen bereits einen Größenunterschied, weshalb diejenigen 2 und 3 beträchtlich von der dekussierten Stellung abweichen, was noch dadurch erhöht wird, daß auch hier ein Größenunterschied herrscht. Dieses Verhalten, verbunden mit der Abnahme der relativen Durchmesser der Ansatzstellen, gibt zu dem Auftreten der spiraligen Blattstellung Veranlassung.

Fig. 89.



Axillarknospe von *Chrysocoma coma aurea*. Vergr. 40. (Nach SCHWENDENER.)

Mit SCHWENDENER bin ich also ganz einverstanden, daß die Richtung der Zweigspirale durch geringfügige Abweichungen von der symmetrischen Lage beeinflußt wird: daß die Blätter 1 und 2 nicht genau dekussiert stehen, hängt ohne Zweifel mit der unsymmetrischen Lage des Tragblattes in Bezug auf den Stamm zusammen. Wo SCHWENDENER aber hier wieder von Druckverhältnissen spricht, da würde ich für die Erklärung die Raumverhältnisse allein in Betracht ziehen wollen. Diese und die Kontaktverhältnisse, kombiniert mit den Werten der relativen Durchmesser der

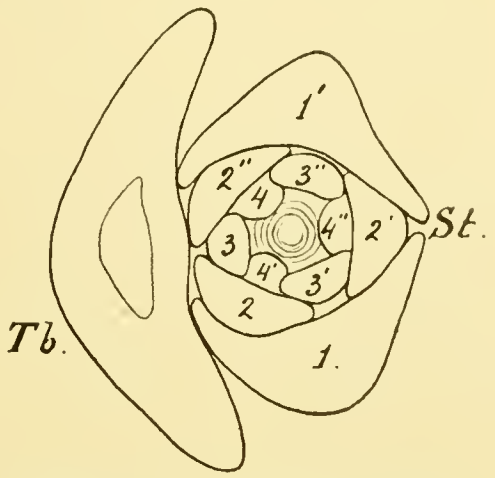
1) Mechanische Theorie der Blattstellungen Fig. 72, Tafel XIII.

Ansatzstellen, genügen vollständig, um die Übergangsfigur zu erklären.

Hauptsache ist, daß das Auftreten einer Blattstellung aus der Hauptreihe auch hier als eine mechanische Notwendigkeit der vorausgesetzten Beobachtungstatsachen und der einfachen Anschlußverhältnisse der ersten Zweigblätter am Stamm und Tragblatt zu betrachten ist.

§ 5. Die Anlegung der dekussierten Blattstellung an Axillarknospen als Übergang zu dem dreizähligen Quirl. Auch bei den Axillarknospen treffen wir denselben Übergangsmodus der dekussierten Stellung in den dreizähligen Quirl an, welchem wir an der Keimpflanze von *Impatiens glanduligera* und an dem Stengel von *Euphorbia Lathyris* begegneten. Fig. 90 stellt die Axillarknospe von *Juniperus communis* im Anschluß an das Tragblatt dar. Bekanntlich bildet hier dieses Blatt sowie die Knospe einen ziemlich großen Winkel mit der Achse[1]); man beachte also, daß in unserer Zeichnung der Stamm, wenn er zur Darstellung gebracht wäre, sich nicht genau im Querschnitt zeigen würde, sondern als ein in schräger Richtung geführter Durchschnitt.

Fig. 90.



Querschnitt einer Axillarknospe von *Juniperus communis*. *Tb.* Tragblatt, *St.* Stamm. Vergr. 40.

Das erste Blattpaar 1 und 1' steht hier in einer Stellung, welche der Dekussation wohl nahekommt, aber beide Blätter sind nach der Achse hin verschoben. Es muß diese Stellung natürlich wieder als eine Folge der Raumverhältnisse aufgefaßt werden, welche zur Zeit der Anlegung dieser beiden Blätter am Zweigscheitel herrschten. Durch diese Stellung der Blätter 1 und 1' ist die Lage der Blätter des ersten dreizähligen Wirtels bestimmt und es steht deshalb das erste unpaare Blatt nach dem Stamm zu gerichtet. Meines Erachtens ist es also auch hier nicht notwendig, die Druckverhältnisse für die Erklärung der Stellung dieses Blattes in Betracht zu ziehen.

1) Man vergleiche SCHWENDENER, Mechanische Theorie, S. 102.

Dritter Abschnitt.

Schlußbetrachtungen über die botanischen Anwendungen.

§ 1. Zusammenfassung der Hauptresultate. Als Aufgabe, welche eine Theorie der Blattstellungen zuerst zu lösen hat, haben wir die folgende aufgestellt:

Die Zahlengesetze, welche die Blattstellungsverhältnisse aufweisen, als die mechanisch notwendige Folge bestimmter einfacher Beobachtungstatsachen zu erklären. Besonders muß dabei das vielfache Auftreten der Blattstellungen aus der Hauptreihe seine Erklärung finden.

Die Ursache für das Auftreten bestimmter Blattstellungen ist in den Verhältnissen am Stammscheitel zu suchen, es ist also die Anordnung der jungen Anlagen seitlicher Organe als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen gewählt worden und zwar haben wir mit dem Studium der konstanten Blattstellung angefangen.

Die Beobachtung der verschiedenen Formen, welche die jungen Anlagen seitlicher Sprossungen an Scheiteln von verschiedener Steilheit aufweisen, und die Erwägung, daß man denjenigen Teil des Scheitels, auf dem diese Anlagen hervorsprossen, meistens als einen Teil einer Kreiskegelfläche betrachten kann, während die jungen Anlagen (wenigstens am Basalteil) ziemlich genau in der Richtung der Kegelachse emporwachsen, hat uns zur Aufstellung dieser Hypothese geführt:

„Die Umrißlinien der Ansatzstellen der jungen Anlagen sind im allgemeinen als Kreise auf einer Kreiskegelfläche zu betrachten.“ Die Querschnitte solcher Organe und die Ansicht von oben stellen dann notwendigerweise Kurven dar, welchen wir den Namen Folioiden gegeben haben.

Aus den Beobachtungstatsachen, daß ganz allgemein bei konstanter Blattstellung jedes Blatt annähernd allen anderen gegenüber in übereinstimmender Weise gestellt ist, und daß nach Beendigung der ersten Entwickelungsphase jede junge Anlage mindestens zwei ältere unmittelbar berührt, folgt dann dieser Satz:

„Die Umrißlinien der Ansatzstellen junger seitlicher Organe bilden bei konstanter Blattstellung annähernd ein ähnliches System tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche (für die Definition siehe man S. 146).“ Die Querschnitte und Obenansichten solcher Vegetationspunkte müssen dann annähernd ein ähnliches System tangierender Folioiden darstellen (für die Definition siehe man S. 163).

Es ist dieser Satz an einer Reihe von Beispielen geprüft und bestätigt gefunden worden. Dabei stellte sich heraus, daß außer der zweireihigen Blattstellung (mit dem Kontakt 1 und 1) die Stellungen mit dem Kontakt 1 und 2 und mit dem Kontakt 2 und 3 am meisten in der Natur angetroffen werden. Die seltenen Stellungen aus den Nebenreihen wurden vorläufig nicht in Betracht gezogen, doch wurden verschiedene mehrfache Systeme untersucht, und auch hierfür fand der Satz Bestätigung.

Ganz genau gilt der Satz nur für die Anlagen am obersten Teil der Scheitel. Die Abweichungen, welche die älteren Organe zeigen, fanden ihre Erklärung in verschiedenen Umständen, von welchen die bedeutendsten diese sind: daß nämlich diese Blätter auf einem Teil des Scheitels stehen, der nicht mehr als zu derselben Kegelfläche gehörig zu betrachten ist, und daß in den oberen Teilen dieser Blätter durch sekundäres Wachstum der relative Durchmesser ein ganz anderer sein kann als an der Ansatzstelle, während dadurch außerdem die Form der Querschnitte beträchtlich von der einer Folioide abweichen kann.

Aus den bei der Prüfung des genannten Satzes gemachten Wahrnehmungen ergab sich ferner noch, daß bei konstanter Blattstellung die Kontaktfälle mit rechtwinkligem Kontakt am obersten Teil des Scheitels vor den anderen bevorzugt werden. Es wurde für diese Beobachtung eine mechanische Erklärung angegeben, bei welcher diese Bevorzugung mit dem Umstand in Zusammenhang gebracht wurde, daß bei rechtwinkligen Kontaktsystemen die freie Oberfläche zwischen den kreisförmigen Ansatzstellen eine maximale Größe besitzt, und daß diese Stellung darum unter gewissen Bedingungen als eine Gleichgewichtslage betrachtet werden kann. Durch diese Hypothese war dann zugleich die Erklärung der Tatsache gegeben, daß sowohl bei den niederen Kontakten (speziell beim Kontakt 1 und 2) als auch bei den höheren am Stammscheitel eine Divergenz angelegt wird, welche sich bei Systemen aus der Hauptreihe der Limitdivergenz dieser Reihe (d. i. 137° 30' 28") nähert.

Wenn einmal eine bestimmte Blattstellung am Sprossenscheitel vorhanden ist, so kann die Fortsetzung desselben Systems als eine mechanisch notwendige Folge der folgenden Beobachtungstatsachen erklärt werden:

1. Für die neuen Anlagen ist der relative Durchmesser der Ansatzstelle (der Faktor b) derselbe wie für die bereits vorhandenen jungen seitlichen Sprossungen.

2. Diese Anlagen befinden sich in Kontakt mit mindestens zwei älteren.

3. Sie sind angelegt in den größeren Lücken, welche sich zwischen den vorhandenen Bildungen befinden.

Da nun die Anlegung neuer Organe nicht mit mathematischer Genauigkeit geschieht und sogar ziemlich bedeutende Abweichungen angetroffen werden, so würden diese, wenn sie öfters vorkämen, beträchtliche Unregelmäßigkeiten in der Blattstellung verursachen. Es hat uns dieser Umstand dazu geführt, noch eine Beobachtungstatsache den vorigen hinzuzufügen, obwohl diese letzten bei mathematisch genauer Ausbildung für die Erklärung des Innehaltens einer bestimmten Blattstellung genügen sollten. Diese Beobachtung läßt sich wie folgt wiedergeben:

4. Kleine Unregelmäßigkeiten, welche bei der Anlegung neuer Organe in der Stellung oder Größe derselben auftreten, werden bei der Fortsetzung des Systems oder beim weiteren Wachstum wieder aufgehoben.

Was die Stellungsverhältnisse am ausgewachsenen Stengel anbelangt, so haben wir klargelegt, daß sich aus der Lage der Ansatzstellen an solchen Stengeln kein Urteil über das ursprünglich am Scheitel vorhandene Kontaktsystem gewinnen läßt. Die Koordinatzahlen der Spiralscharen, die an dem Stengel am meisten ins Auge fallen, werden bestimmt durch die Divergenz, welche die Blattinsertionen aufweisen.

Wir haben keine Veranlassung gefunden, „Verschiebungen der Ansatzstellen durch ihren gegenseitigen Druck" anzunehmen. Soweit kleine Divergenzänderungen für die Ansatzstellen seitlicher Organe merkbar sind, die meistens dazu führen, einfachere Stellungen am Stengel hervortreten zu lassen, als am Scheitel angelegt wurden, so z. B. die genauen Stellungen $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}$, kann dies völlig erklärt werden aus den Spannungen, welche in dem Leitbündelsystem im Innern der Stengel auftreten und welche wir im Anschluß an eine Arbeit von TEITZ als eine Folge der Rektipetalität aufgefaßt haben.

Wenn wir nun auch für die Ansatzstellen keine Verschiebungen durch ihren gegenseitigen Druck anzunehmen brauchten, so kommen solche sicherlich bei den freien Enden der seitlichen Organe vor. Wachsen z. B. diese freien Enden in der Knospe mit ungleicher Schnelligkeit in die Breite als in die Tiefe oder Höhe, so treten hier Verschiebungen und Kontaktwechsel ein, die der SCHWENDENERschen Theorie genügen.

Die Ansatzstellen der seitlichen Sprossungen haben in vielen Fällen einen veränderlichen Durchmesser: in bestimmten Fällen wachsen sie schneller, in anderen langsamer als der Stengelteil, auf dem sie gelegen sind; jedoch hat dieser Umstand keine Divergenzänderung zur Folge. Es hat uns das Studium dieses selbständigen Wachstums der Blattbasen zu wichtigen Schlüssen über die „Berindung der Stengel durch die Blattbasen" geführt, und zwar sind wir zu dem Resultat gelangt, daß in bestimmten Fällen keine freie Stammoberfläche besteht, während in anderen der Stengel zum größeren Teil von den Blattbasen berindet wird. Auch konnte dabei die „Zeichnung und Gestalt der Stengel" mit der Blattstellung in Beziehung gebracht und die Erklärung für die wichtige Tatsache gegeben werden, daß die Anzahl charakteristischer Riefen, Linien oder Kanten in zahlreichen Fällen durch eine Zahl aus der Hauptreihe darzustellen ist. Es stellte sich nämlich dieser Umstand als eine notwendige Folge der Anlegung von Blattstellungen aus der Hauptreihe am Sproßscheitel heraus.

Die Erscheinungen der veränderlichen Blattstellung haben wir aus folgenden Beobachtungstatsachen zu erklären gesucht:

1. Jede Änderung der Blattstellung ist begleitet von einer Zu- oder Abnahme des relativen Organdurchmessers (d. h. des Faktors *b*).

2. Die Anlegung neuer Organe findet immer in den größeren Lücken zwischen den vorhandenen statt.

3. Die neuen Anlagen sind, nach Beendigung ihrer ersten Entwicklungsphase, mit mindestens zwei älteren in unmittelbarem Kontakt.

4. Die Änderung der Blattstellung geschieht meistens sprungweise, d. h. nachdem eine beschränkte Zahl Blätter angelegt ist, welche unter einander keine regelmäßige Stellung besitzen, kommt wieder eine konstante Blattstellung zum Vorschein.

Dabei muß dann noch bemerkt werden, daß auch für diese Fälle die oben genannte allgemeine Hypothese Bestätigung fand, daß die Umrißlinien der Ansatzstellen als Kreise auf einer Kreiskegelfläche zu betrachten sind. Auch die Beobachtung, daß, sobald die Blattstellung eine konstante wird, die Systeme mit rechtwinkligem Kontakt bevorzugt werden, führt zu bedeutenden Vereinfachungen der Auseinandersetzungen.

Es wurde nun nachgewiesen, daß in bestimmten Fällen die neu auftretende Blattstellung bereits durch den Wert des relativen Durchmessers (b) der neu auftretenden Organe ganz bestimmt ist und unabhängig ist von der Art des vorhandenen Systems. Liegt nämlich der Wert von b zwischen 1 und 0,58, so muß die neue Blattstellung eine zweireihige sein, liegt dieser Wert zwischen 0,58 und 0,38, dann muß die neue Blattstellung eine solche sein mit dem Kontakt 1 und 2. Bei kleineren Werten von b stellt sich die neu auftretende Stellung im allgemeinen als abhängig vom ursprünglich vorhandenen System heraus.

Unter Voraussetzung der oben genannten Beobachtungstatsachen ergab sich weiter, daß, wenn die ursprüngliche Blattstellung eine solche mit dem Kontakt m und n, und wenn $n < 2m$ ist, die neu auftretende Stellung eine solche sein muß mit einem Kontakt aus der Kontaktreihe: m, n, $m+n$, $m+2n$ usw. War $n > 2m$, so können auch andere Stellungen auftreten als solche aus dieser Reihe, jedoch sind diese hier nicht näher untersucht worden.

Andererseits wurden noch zwei Übergänge erwähnt, welche die dekussierten Blattstellungen unter Voraussetzung der angegebenen Beobachtungstatsachen aufweisen können; einer davon führt zur spiraligen Blattstellung mit dem Kontakt 2 und 3, der zweite zu dem dreizähligen Quirl.

Für einige der einfachsten Übergangsfälle, welche nach dieser Theorie möglich sind, wurden Schemata entworfen, teils als Kreiskonstruktionen auf einer Zylinderfläche (siehe Taf. XIII), teils als solche auf einer abgerollten Kreiskegelfläche (siehe Taf. XIV und XV), teils auch als Folioidensysteme (siehe Taf. XIV und XV); der Scheitelwinkel der Kegelfläche wurde wiederum aus praktischen Gründen gleich $28^0\,57'\,18''$ angenommen. Aus der Betrachtung der Folioidensysteme ergab sich noch, daß diese zwar die natürlichen Verhältnisse annähernd zum Ausdruck bringen können, daß sie aber eine Unvollkommenheit besitzen müssen, die dadurch veranlaßt wird, daß in der Natur eine Änderung der Blattstellung wahrscheinlich immer von einer solchen der Steilheit desjenigen Scheitelteils begleitet wird, auf welchem die neuen Organe hervorsprossen.

Es hat sich nun herausgestellt, daß die Anschlußverhältnisse der ersten Blätter an Keimpflanzen und Axillarknospen vollkommen mit den theoretischen Erwartungen übereinstimmen und die beobachteten Übergangsfiguren die größte Übereinstimmung zeigen mit den nach der Theorie angefertigten Folioidenkonstruktionen. Im Anschluß an die Kotyledonen und an Stamm und Tragblatt ergaben sich die zweireihigen Blattstellungen und die Dekussation

als die gewöhnlichen Stellungen. Werden diese Systeme beibehalten, dann herrschen von den ersten Stengel- oder Zweigblättern an die Verhältnisse, die wir für konstante Blattstellung gefunden haben. In vielen Fällen gehen diese Stellungen aber bald über in spiralige und zwar fand sich der Übergang der zweireihigen Stellung in ein System mit dem Kontakt 1 und 2 und der Übergang der dekussierten Stellung in eine solche mit dem Kontakt 2 und 3 ganz allgemein verbreitet. Daneben wurde auch der Übergang der Dekussation in den dreizähligen Quirl oberhalb der Kotyledonen und an Axillarknospen ganz in Übereinstimmung mit der entwickelten Theorie gefunden.

Hieraus geht also der wichtige Schluß hervor: In den angedeuteten Fällen konnte das Auftreten von den wichtigsten Blattstellungen aus der Hauptreihe (und des dreizähligen Quirls) erklärt werden als die mechanisch notwendige Folge der oben genannten Beobachtungstatsachen und der einfachen Stellungsverhältnisse (zweireihige Blattstellung und Dekussation), welche die ersten Blätter an den Keimpflanzen und Zweigen aufweisen.

Erinnern wir schließlich noch daran, daß wir dem Übergang der Dekussation in die spiralige Blattstellung mit dem Kontakt 2 und 3 ebenso wie dem der Dekussation in den dreizähligen Quirl auch am Stengel von *Euphorbia Lathyris* in großer Entfernung von den Kotyledonen begegnet sind (siehe Taf. XVI) und daß diese Übergänge auch hier ganz in Übereinstimmung mit unseren Schemas zu stande kommen.

Hiermit ist wenigstens für einige wichtige Fälle die Aufgabe, welche wir an eine Theorie der Blattstellungen gestellt haben, als gelöst zu betrachten.

§ 2. Aussichten für die Anwendung der Theorie auf andere Fälle. Obwohl wir uns für die Anwendung der Theorie auf einige wichtige Fälle beschränkt haben, so eröffnen sich doch zahlreiche Aussichten auf ihre Anwendung auf andere Blattstellungsverhältnisse. So sind die verschiedenen Übergänge, welche zwischen Blattstellungen am Stengel vorkommen und von welchen wir nur zwei einfache Beispiele besprochen haben, sicherlich von denselben Gesichtspunkten aus zu erklären. Es sind z. B. die Übergangsfiguren, welche CHURCH für die Anschlußverhältnisse der Sonnenköpfe an den Stengel abgebildet hat und welche ihn zur Aufstellung wichtiger empirischer Regeln führten, auf einfache Weise durch die entwickelte Theorie verständlich zu machen. Auch die Behandlung der Übergangsfiguren, welche zu stande kommen, wenn in der ursprünglich vorhandenen Blattstellung $n > 2m$ ist, läßt die Möglichkeit der Anwendung der Theorie auf die natürlichen Objekte zu. Dasselbe gilt auch von den Übergängen spiraliger Blattstellungen in Quirle und umgekehrt. Ebenso lassen sich die Anschlußverhältnisse der Blüten der Angiospermen größtenteils mit den gegebenen Voraussetzungen in Übereinstimmung bringen, obwohl hier die Mitwirkung von Faktoren angenommen werden muß, die für die oben betrachteten Blattstellungen außer Acht bleiben konnten: der Abortus und die Intercalation seitlicher Organe. Übrigens kann ich bei allen diesen Fragen auf die wichtigen Auseinandersetzungen von SCHWENDENER in seiner Mechanischen Theorie

verweisen; denn obwohl die hier gegebenen Betrachtungen in mehreren wichtigen Punkten von den SCHWENDENERschen abweichen, so stimmen für beide Betrachtungsweisen die Grundannahmen in so vielen Punkten mit einander überein, daß ich die hier gegebene Theorie gewissermaßen als eine Erweiterung derjenigen von SCHWENDENER betrachten möchte.

Schließlich will ich nicht unterlassen zu bemerken, daß nach meiner Meinung auch die Blattbildung der typischen Moosstämmchen mit zwei- und dreiseitiger Scheitelzelle, bei welchen bekanntlich die Lage der Blätter durch die Segmentierung der Scheitelzelle bestimmt wird, indem aus jedem Segment ein Blatt entsteht, mit unserer Theorie in Übereinstimmung zu bringen ist. Man braucht ja nur die Fig. 2 und 4 der Taf. X mit den bekannten Querschnitten der Sproßscheitel von Laubmoosstämmchen mit zwei- und dreiseitiger Scheitelzelle zu vergleichen, um einzusehen, daß nur geringfügige Änderungen in unseren Figuren angebracht zu werden brauchen, damit sie eine vollkommene Übereinstimmung mit den natürlichen Objekten zeigen. Eine Ausarbeitung dieser wichtigen Frage mußte jedoch vorläufig unterbleiben.

Auch den Nachweis, daß die merkwürdigen Zahlenverhältnisse, welche LUDWIG für die Rand- und Scheibenblüten der Kompositenköpfe nachwies, sich als eine Folgerung der entwickelten Theorie herausstellen, muß einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben.

§ 3. Fälle, in welchen die Theorie keine Anwendung erlangt. Wir haben bereits bei der Besprechung der Anschlußverhältnisse an der Axillarknospe von *Tradescantia virginica* (siehe S. 286) darauf hingewiesen, daß die Stellung, welche nach der Theorie zu erwarten war, beträchtlich geändert werden kann infolge asymmetrischer Form der Blattbasen. Es scheint zwar eine solche Asymmetrie eine ziemlich beschränkte Erscheinung zu sein, dennoch wird das genannte Beispiel genügen, die Wichtigkeit ihrer Berücksichtigung erkennen zu lassen. Daß eine solche asymmetrische Ausbildung der Blattbasen bisweilen zu sehr auffallenden Blattstellungen Veranlassung geben kann, geht aus den interessanten Untersuchungen von K. SCHUMANN[1]) hervor, nach welchen die gewundenen zweireihigen Blattstellungen verschiedener Aloe-Arten in einer solchen asymmetrischen Form der Blattbasen ihre Erklärung finden. Es ist dies besonders darum für unsere Betrachtungen von Interesse, weil sich solche Systeme nach unserer Theorie sonst nicht erklären ließen.

In anderen Fällen unterliegt die Blattstellung dem Einfluß ausgesprochener Kantenbildungen des Stengels; es können dann bestimmte Kontakte aufgehoben erscheinen (Karex, Kakteen und andere Stammsukkulenten). Übrigens kann ich für diese Verhältnisse auf die jüngste wichtige Arbeit von WEISSE[2]) verweisen, welche viele Beiträge für die richtige Deutung der Blattanlegung in diesen Fällen gebracht hat.

---

1) Morphologische Studien Heft I, Leipzig 1892, Die Blattstellung in gewundenen Zeilen, S. 74 ff.

2) Untersuchungen über die Blattstellung an Kakteen und anderen Stamm-Sukkulenten nebst allgemeinen Bemerkungen über die Anschlußverhältnisse am Scheitel. PRINGSHEIMS Jahrb. 1904, Bd. 39, S. 343—423.

Scheinen mir also die Fälle, in welchen die gegebene Theorie keine Anwendung findet, beschränkt zu sein, so bleiben andererseits doch manche Fragen, zu denen sie Veranlassung gibt, unbeantwortet und mehrere Untersuchungen werden notwendig sein, um ihre Richtigkeit in jeder Hinsicht zu beweisen. Aber eben in dem Anstoß zur Lösung verschiedener Fragen und zur Ausführung neuer Untersuchungen gipfelt der Hauptwert einer Theorie.

DRITTER TEIL.

Betrachtungen über den Schalenbau der Miliolinen.

Verwendete Literatur.

I Munier-Chalmas et Schlumberger. Nouvelles observations sur le dimorphisme des Foraminifères. Comptes Rendus Acad. des Sciences. T. 96, p. 862—866 und p. 1598—1601, 1883.

II — Note sur les Miliolidées Trématophorées. Bulletin d. l. Société géologique de France, 3e série, T. 13, p. 273—323, 1885.

III Schlumberger. Note sur le genre *Adélosina*. Bulletin d. l. Société zoologique de France, vol. 11, p. 544—557, 1886.

IV — Note sur le genre *Planispirina*. Ebenda, vol. 12, p. 475—488, 1887.

V — Note sur les *Biloculina bulloïdes* (d'Orb.) et *Biloculina ringens* (Lamk.). Bulletin d. l. Société géologique de France, 3e série, T. 15, p. 573—584, 1887.

VI — Révision des Biloculines des grands fonds. Mémoires d. l. Société zoologique de France, T. 4, p. 542—579, 1891.

VII — Note sur les genres *Trillina* et *Linderina*. Bulletin d. l. Société géologique de France, 3e série, T. 21, p. 118—123, 1893.

VIII — Monographie des Miliolidées du golfe de Marseille. Mémoires d. l. Société zoologique de France, T. 6, p. 57—80, 1893.

IX — Note sur les Foraminifères des mers arctiques russes. Mémoires d. l. Société zoologique de France, T. 7, p. 252—259, 1894.

X — Note sur *Lacazina Wichmanni*, Schlumb. Bulletin d. l. Société géologique de France, T. 22, 3e série, p. 295—298, 1894.

XI — Deuxième Note sur les Miliolidées Trématophorées. Bulletin d. l. Société géologique de France, T. 5, 4e série, p. 115—134.

XII Zittel. Text-Book of Palaeontology translated by Ch. R. Eastman. Vol. 1, p. 26, London 1900.

XIII Rhumbler. Entwurf eines natürlichen Systems der Thalamophoren. Nachrichten v. d. Königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse, S. 51, 1895.

XIV — Der Aggregatzustand und die physikalischen Besonderheiten des lebenden Zellinhaltes. II. Teil. Zeitschrift für Allgemeine Physiologie, 2. Band, S. 183—340, 1903.

XV — Die Doppelschalen von Orbitolites und anderer Foraminiferen vom entwicklungsmechanischen Standpunkt aus betrachtet. Archiv für Protistenkunde (herausgegeben von Schaudinn), 1. Band, S. 193 bis 296, 1902.

Diese Abhandlungen sollen im Folgenden mit den davorstehenden Zahlen angedeutet werden.

Als ich vor einiger Zeit mit dem Studium der Vegetationspunkte beschäftigt war, kam mir die letzte Abhandlung von Schlumberger: „Sur les Miliolidées Trématophorées“ (XI) in die

Hände. Die darin abgebildeten Schliffe machten auf mich einen überraschenden Eindruck, fand ich doch darin Anschluß- und Formverhältnisse der Schalenkammern, welche eine so wunderbare Übereinstimmung mit denjenigen zeigten, welche die jungen Blätter am Stammscheitel aufweisen, daß man beim ersten Anblick meinen könnte, Querschnitte von Vegetationspunkten vor sich zu haben. Beim näheren Betrachten der ausgezeichneten Abbildungen und musterhaften Beschreibungen, welche SCHLUMBERGER, teilweise zusammen mit MUNIER-CHALMAS von mehreren Arten aus der Familie der Miliolinen in verschiedenen Abhandlungen gegeben hat, ergab sich, daß diese Übereinstimmung nicht nur eine oberflächliche ist, sondern daß sich sogar bei den verschiedenen Genera dieselben Zahlenverhältnisse nachweisen lassen, welche die wichtigste Eigenschaft der Blattstellungen ausmachen. Auch an diesen Schalen findet man nämlich Zahlen aus der Hauptreihe und aus einer der einfachen Nebenreihen wieder.

Dieser Umstand ist auch darum interessant, weil die hier in Betracht kommenden Arten durch ihren Formenreichtum und ihre außerordentliche Verbreitung zu den wichtigsten felsbildenden Foraminiferen gehören. So besteht der Kalkstein aus dem Pariser Becken und aus den Pyrenäen zum großen Teil aus Schalen von Miliolinen, während auch jetzt noch Kalkablagerungen in der Nordsee, westlich der norwegischen Küste, durch Foraminiferen dieser Familie (Genus: *Biloculina*) gebildet werden (nach ZITTEL XII).

Zunächst möge hier eine kurze Beschreibung der wichtigsten Gattungen folgen, um daraus die Übereinstimmung des Schalenbaues mit den Verhältnissen am Stammscheitel klarlegen zu können.

Vor einigen Jahren hat RHUMBLER (XIV) den Bau der Foraminiferenschalen vom mechanischen Standpunkt aus zu erklären gesucht, indem er den Nachweis geliefert hat, daß sich die Eigentümlichkeiten der Kammeranordnung aus den Spannungsgesetzen der Flüssigkeitsoberflächen ableiten lassen. An der Hand dieser interessanten Untersuchungen wollen wir dann zweitens den Bau der für uns wichtigen Foraminiferen näher erläutern und dadurch den Beweis zu erbringen suchen, daß sich auch hier die auffallenden Zahlenverhältnisse aus mechanischen Gründen erklären lassen, welche wenigstens teilweise Übereinstimmung zeigen mit denen, welche für die Erklärung der Blattstellungsgesetze als Ausgangspunkt genommen sind.

Kapitel I. Kurze Beschreibung der Kammeranordnung bei der Familie der Miliolinen.

§ 1. Allgemeine Eigentümlichkeiten. Die hier in Betracht kommenden Foraminiferen gehören sämtlich zu den Miliolinen[1]) und zwar wurden die für uns wichtigsten von PARKER und

1) Die Miliolinen sind als Unterfamlie der Miliolinden aufzufassen, in welcher Familie man außerdem noch die Nubecularinen und die Hauerininen unterbringt. Man vergleiche RHUMBLER (XIII).

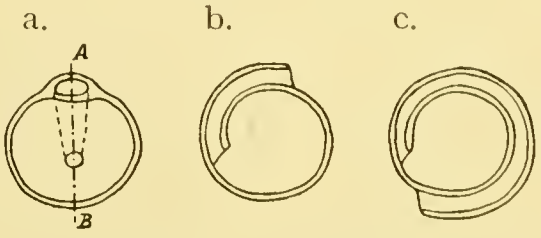
CARPENTER unter dem Namen *Miliola* zusammengefaßt, einem Formenkomplex, der sich in zahlreiche Genera zerlegen läßt.

SCHLUMBERGER und MUNIER-CHALMAS haben darauf aufmerksam gemacht, daß man bei diesen Foraminiferen unterscheiden muß zwischen gewöhnlichen und trematophoren Miliolinen. Letztere sind außer durch die Anwesenheit eines Trematophors in der Kammermündung durch den Besitz einer Innenwand in den Kammern ausgezeichnet[1]); meistens besitzt die Schale auch noch eine Zeichnung; diese Kennzeichen fehlen bei den gewöhnlichen Miliolinen, doch ist hier die Mündung der Kammern mit einer Spitze (Zahn) versehen. Weil nun übrigens bei den gewöhnlichen und den trematophoren Miliolinen Genera mit übereinstimmendem Schalenbau angetroffen werden, so können wir beide gleichzeitig besprechen. Wo dies gewünscht erscheint, werden wir die trematophoren durch den Ausdruck „trem." näher bezeichnen.

Die Foraminiferen aus der Familie *Miliolinae* sind polythalame imperforate Thalamophoren, welche dadurch ausgezeichnet sind, daß ihre spiralenweise angeordneten Schalenkammern alle an zwei entgegengesetzten Polen abschließen. Jede folgende Kammer ist größer als die vorhergehende und schließt sich an ein oder mehrere ältere an, wodurch diese ganz oder teilweise überdeckt werden. Hierdurch entstehen Eigentümlichkeiten des inneren und äußeren Baues, welche bei den verschiedenen Genera sehr verschieden sind.

Jeder gut gelungene Dünnschliff einer Miliolidae zeigt im Zentrum eine Embryonalkammer, welche meist eine kugelförmige Gestalt besitzt, und mit einem Kanal kommuniziert, der bei verschiedenen Gattungen, Arten und sogar Individuen eine sehr verschiedene Länge aufweist (man siehe Fig. 91). Morphologisch gehört dieser Kanal, der die Embryonalkammer ein wenig komprimiert, zu dieser Kammer, was aus dem Fehlen einer Ansatzlinie hervorgeht. Fertigt man von der Schale einen Querschliff an, so wird man darin diesen Kanal in den meisten Fällen einmal wiederfinden, bisweilen aber kommt er auch zweimal vor, und es besteht auch die Möglichkeit, daß er ganz fehlt. Durchgehends ist er durch das Fehlen der Ansatzlinie und seinen geringen Durchmesser leicht zu erkennen. Die meist elliptische Mündung dieses Kanals führt zu der ersten Schalenkammer, welche sich über die Embryonalkammer wölbt und ihre Mündung an der entgegengesetzten Seite (Pol) der Embryonalkammer trägt, als wo sich die Mündung des Embryonalkanals befindet. Durch diese Mündung der ersten Kammer kommt man in die zweite, welche wieder mit einer Mündung abschließt, die nun oberhalb derjenigen des Embryonalkanals liegt. So zeigt schließlich die ganze Schale die oben erwähnte spiralige Anordnung der Kammern, wo-

Fig. 91.



Embryonalkammer mit Embryonalkanal von *Biloculina*. a. Querschliff, b. und c. Längsschliffe für zwei verschiedene Schalen. Vergr. ± 250. (Nach MUN.-CHALM. u. SCHLUMB. II.)

1) Nur bei den an die Embryonalkammer grenzenden Kammern fehlt diese Innenwand.

bei die Mündung der paaren Kammern sich an dem einen Pol befinden, diejenigen der unpaaren an dem anderen. Die Achse, welche diese beiden Pole verbindet, wird von SCHLUMBERGER und MUNIER-CHALMAS Konstruktionsachse genannt, ein Dünnschliff senkrecht zu dieser Achse heißt „Querschliff" und ein solcher, welcher diese Achse enthält, „Längsschliff". Wir werden uns besonders mit „Querschliffen" zu beschäftigen haben, und dabei hat man sich also den einen Pol oberhalb, den anderen unterhalb der Papierebene zu denken.

Die Embryonalkammer kann bei verschiedenen Individuen derselben Art verschiedene Größen aufweisen, und zwar werden neben Individuen mit ziemlich großer Embryonalkammer, solche angetroffen mit bedeutend kleinerer. Diese zwei Formen werden, seit SCHLUMBERGER und MUNIER-CHALMAS diesen „Dimorphismus" entdeckt haben, als megalosphärische oder *A*-Form und mikrosphärische oder *B*-Form unterschieden. Bei vielen Arten unterscheiden sich nun aber diese *B*-Formen von den *A*-Formen nicht nur durch die Größe der Embryonalkammer, sondern zeigen außerdem einen viel komplizierteren Bau, indem ihre Erstlingskammern nicht dieselbe Anordnung aufweisen wie die älteren Kammern und dadurch eine sogenannte „diforme" oder „triforme" Kammeranordnung entsteht. Die *A*-Formen dagegen zeigen meistens eine „uniforme" Kammeranordnung, obwohl bei einigen Genera auch eine diforme neben der uniformen Anordnung angetroffen wird. Merkwürdigerweise erreichen die *B*-Formen eine beträchtlichere Größe als die *A*-Formen. Zuerst werden wir hier die einfacheren *A*-Formen näher zu beschreiben haben, um dann die *B*-Formen ins Auge zu fassen.

Beiläufig möge noch bemerkt werden, daß die Untersuchungen von LISTER und SCHAUDINN es sehr wahrscheinlich machen, daß die *A*- und *B*-Formen verschiedene Generationen darstellen; die *A*-Formen sollten aus Embryonen entstehen im Innern der älteren Schalen, die *B*-Formen aus Schwärmern.

Schließlich muß noch ein Umstand erwähnt werden, durch den die Regelmäßigkeit des Schalenbaus beträchtlich leiden kann. Es kommt nämlich vor, daß die Konstruktionsachse nicht genau dieselbe Lage beibehält, sondern bei den älteren Kammern eine andere Richtung besitzt als bei den jüngeren. Wir werden aber solche Fälle hier nicht näher erörtern, weil dabei die Querschnitte derartige Abweichungen vom regelmäßigen Bau aufweisen, daß sie für unseren Zweck keinen Wert mehr besitzen.

Fig. 92.

Lacazina Wichmanni SCHL. Halb. Schematisierter Längsschliff. Vergr. 13. (Nach SCHLUMBERGER X.)

§ 2. Der monolokulinäre Typus. Die einfachste Kammeranordnung ist verwirklicht bei einer Foraminiferenart, welche von SCHLUMBERGER in einem fossilen Kalkstein der NO-Küste Neu-Guineas aufgefunden wurde und welche ihm von Dr. WICHMANN zugesandt wurde. Man findet einen Längsschliff dieser Art: *Lacazina Wichmanni*, SCHLUMBERGER, in Fig. 92 halbschematisiert abgebildet. Die vertikal aufgestellte Konstruktionsachse liegt hier also in der Zeichnungsebene, und weil die Schale annähernd als ein Rotationskörper aufgefaßt

werden kann, wird man sich von dem Bau eine Vorstellung machen können, wenn man sich unsere Figur um die Konstruktionsachse gedreht denkt. Ein Querschliff wird hier also annähernd durch eine Reihe konzentrischer Kreise dargestellt.

Obwohl die Öffnung der Embryonalkammer (wahrscheinlich durch die weit fortgeschrittene Versteinerung) nicht sichtbar ist, so befindet sie sich ohne Zweifel an dem oberen Pol dieser Kammer. Die erste Kammer umhüllt die Embryonalkammer vollständig, ihre Mündung liegt an dem unteren Pol. Die zweite Kammer umschließt wieder ganz die erste und hat ihre Mündung oberhalb derjenigen der Embryonalkammer, und dieser Aufbau wird auch für die übrigen Kammern beibehalten.

Diese Art gehört zu den trematophoren Miliolinen; die Protuberanz, welche in der Mündung der sechsten Kammer sichtbar ist, stellt einen Rest des Trematophors dar. Bemerken wir noch, daß die Kammern im Innern mit vorspringenden Leisten versehen sind, welche bisweilen die gegenüberliegende Wand erreichen.

Soweit mir bekannt, zeigt außer der hier besprochenen Art nur die später von SCHLUMBERGER beschriebene *Lacazina elongata* MUN.-CHALM. denselben einfachen Bau; es ist sogar nach diesem Autor nicht unmöglich, daß diese beiden Arten identisch sind. Wohl findet man bei anderen Species von *Lacazina* und bei anderen Gattungen vollständig einhüllende Kammern, aber wie wir später sehen werden, zeigt dabei die Schale diesen Bau nicht von der Embryonalkammer abwärts.

§ 3. Der bilokulinäre Typus. Als Beispiel für die Kammeranordnung, welche als bilokulinärer Typus bezeichnet wird, kann

Fig. 93.

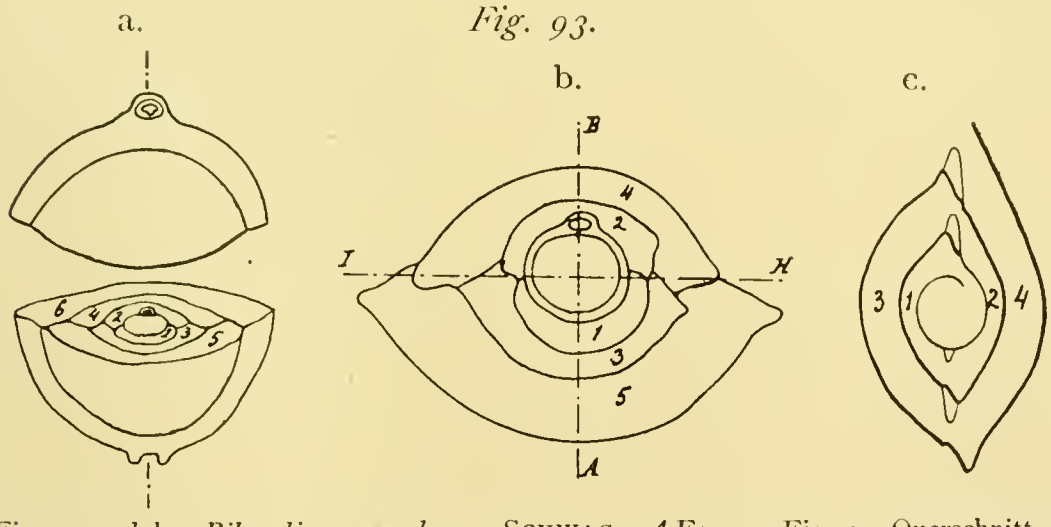


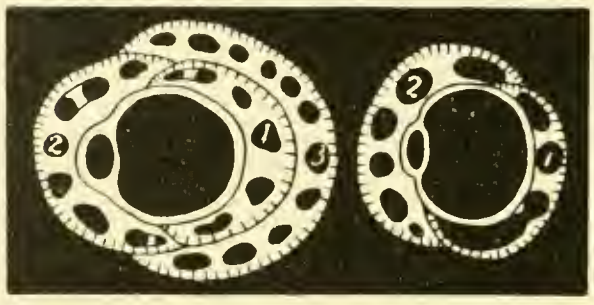
Fig. a. und b. *Biloculina murrhyna*, SCHWAG. *A*-Form. Fig. a. Querschnitt in Perspektiv. Fig. b. Querschliff. Vergr. 200. Fig. c. *Biloculina depressa*, D'ORB. *A*-Form. Längsschliff. (Nach MUN.-CHALM. und SCHLUMB. II.)

der Schalenbau der *A*-Form von *Biloculina murrhyna*, SCHWAG, dienen, wovon Fig. 93b den Querdurchschnitt darstellt, während Fig. 93a eine perspektivische Ansicht der durchschnittenen Schale widergibt[1]). Weil für diese Art keine Zeichnung eines Längsschliffes zur Verfügung stand, ist dafür ein solcher Durchschnitt von einer

1) Es sei bemerkt, daß der Querschliff eine Kammer weniger aufweist als die Ansichtzeichnung.

nahestehenden Art: *Biloculina depressa* D'ORB. reproduziert worden (Fig. 93c). Die Mündung des Embryonalkanals findet man an der oberen Seite der Embryonalkammer. Sie führt dort in die erste Kammer, welche, wie aus dem Querschliff zu ersehen ist, dem Kanal gegenüber liegt. Diese erste Kammer umhüllt die Embryonalkammer um mehr als die Hälfte, läßt aber einen großen Teil der Oberfläche frei. Die zweite Kammer, in die man durch die am unteren Pol gelegene Mündung der ersten Kammer eintritt (siehe Fig. 93c), umfaßt diesen frei bleibenden Teil und stützt sich mit ihren Rändern auf die erste Kammer. In ganz gleicher Weise überdeckt auch die dritte Kammer die erste und stützt sich mit den Rändern auf die zweite. Auch die folgenden immer größer werdenden Kammern zeigen eine übereinstimmende Anordnung, sodaß sich alle Kammern in zwei Symmetrieebenen anordnen lassen, die die Fortsetzung von einander bilden.

Fig. 94.

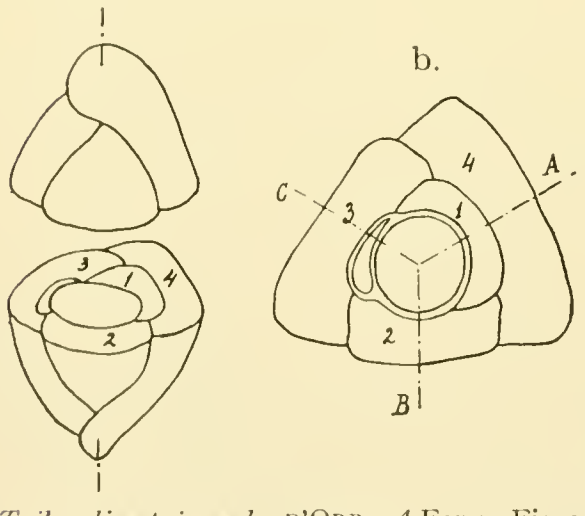


Fabularia discolithes, DEFR., *A*-Form, Vergr. 47. (Nach SCHLUMBERGER XI.)

Äußerlich sind nur zwei Schalen sichtbar (man siehe Fig. 93a) und diesem Umstand verdankt der Typus seinen Namen.

Man findet diesen bilokulären Typus bei allen *A*-Formen der Genus *Biloculina* wieder[1]), einer Formengruppe, welche unter die „gewöhnlichen" Miliolinen zu rechnen ist. Von den „trematophoren" Miliolinen besitzt die *A*-Form von *Fabularia* diese Kammeranordnung, wie das aus Fig. 94 zu sehen ist, worin *Fabularia discolithes* wiedergegeben wurde; auch bei Individuen von *Idalina* kann diese Form auftreten, obwohl hier nicht als konstante Anordnung.

a. *Fig. 95.* b.



Triloculina trigonula, D'ORB., *A*-Form. Fig. a. Querschnitt in Perspektiv. Fig. b. Querschliff. Vergr. 75. (Nach MUN.-CHALM. u. SCHLUMB. II.)

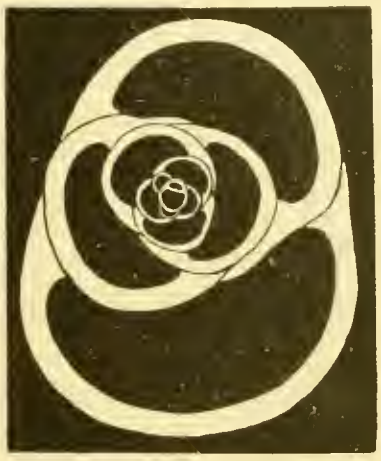
§ 4. Der trilokulinäre Typus. Ein komplizierter Bautypus tritt uns in *Triloculina trigonula*, D'ORB., entgegen, wovon Fig. 95b einen Querschliff darstellt, während Fig. 95a eine Ansichtzeichnung der halbierten Schale gibt. Die erste Kammer befindet sich hier nicht dem Embryonalkanal gegenüber, jedoch ist diese Lage nicht bei allen Arten und eine genaue Opposition aus der Genus *Triloculina* dieselbe kommt öfters vor. Hauptsache ist, daß Kammer 1 hier weniger

1) Die einzige Ausnahme bildet *Biloculina anomala*, SCHLUMB., welche Art bei der *A*-Form trilokulinär anfängt.

als die Hälfte der Embryonalkammer umfaßt, sodaß ein sehr großer Teil der Oberfläche dieser letzteren freibleibt. Die zweite Kammer ist nun so angelegt, daß der Embryonalkanal nicht von ihr überwölbt ist, sie stützt sich mit ihren Rändern einerseits auf diesen Kanal, andererseits auf Kammer 1; Kammer 2 steht also 1 gegenüber um einen gewissen Winkel gedreht. Die dritte Kammer wird wieder nicht genau gegenüber Kammer 2 angelegt, sie überwölbt den Embryonalkanal und stützt sich auf die beiden vorigen Kammern. So liegt Kammer 4 über Kammer 1, ist also wieder gegenüber 3 gedreht und diese Bauordnung setzt sich bei den übrigen Kammern fort.

Wäre die vierte Kammer genau über der ersten gelegen, die fünfte genau über der zweiten usw., so müßten die Kammern nach drei Symmetrieebenen geordnet sein, die unter einander einen Winkel von 120° bilden. Wirklich kommt die Kammeranordnung bei *Triloculina trigonula* diesem Bau ziemlich nahe, obwohl sie kleine Abweichungen davon zeigt, und sich bei der kleinen Anzahl Kammern kein entscheidendes Urteil aussprechen läßt. Bei den meisten Arten aus den Gattungen *Triloculina* und *Trillina*[1]) ist aber die Abweichung von diesem Bau ziemlich bedeutend. So sind in vielen Fällen die drei Symmetrieebenen übergegangen in Symmetrieflächen, während sie in anderen überhaupt nicht auffallen.

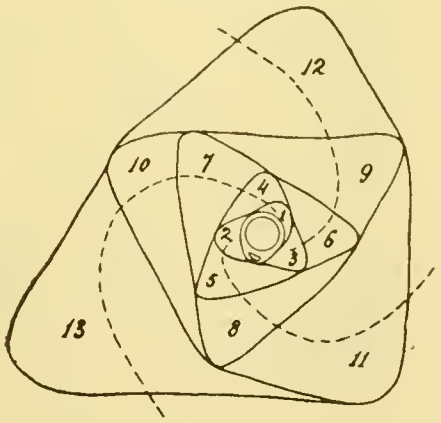
Fig. 96.



Triloculina rotunda, D'ORB., *A*-Form. Vergr 44. (Nach SCHLUMBERGER VIII.)

Bei *Triloculina rotunda*, D'ORB. z. B. (Fig. 96) wird man diese drei Symmetrieflächen nur mit Mühe aufsuchen können. Viel deutlicher sieht man hier die Kammern auf zwei Spiralen geordnet, von welchen die eine die paaren, die andere die unpaaren umfaßt[2]). Von großem Interesse ist es nun zu bemerken, daß bei dieser Art die Kammern einen viel bedeutenderen Teil des Schalenumfanges einnehmen als das bei *Triloculina trigonula* der Fall ist, jedoch einen merkbar geringeren als bei dem bilokulinären Bautypus.

Fig. 97.



Trillina Howchini, SCHL., *A*-Form. Vergr. 50. (Nach SCHLUMB. VII.)

Als Beispiel für den Fall, bei dem sich die Kammern auf drei Symmetrieflächen ordnen, möge hier die *A*-Form von *Trillina Howchini*, SCHLUMB., (Fig. 97) abgebildet werden. Die Figur gibt zu keinen besonderen Bemerkungen Veranlassung, nur sei darauf aufmerksam gemacht, daß die Form der Kammern hier eine asymmetrische ist.

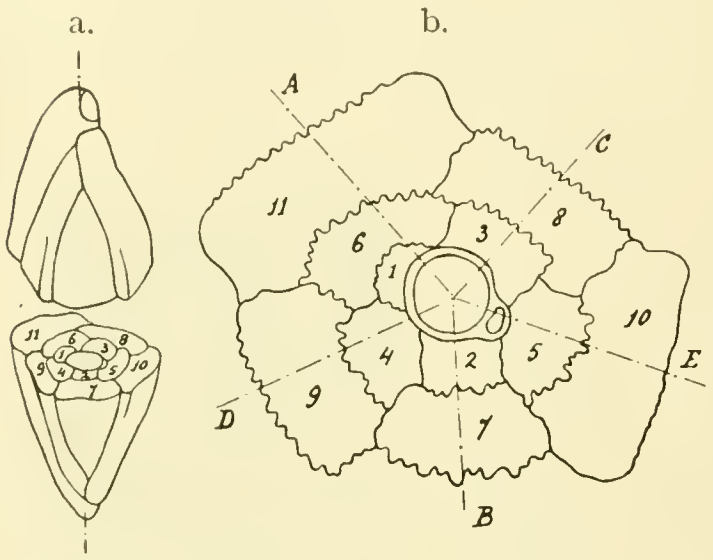
1) Die letzte Gattung umfaßt die übereinstimmenden trematophoren Miliolinen.

2) Die Schalenanordnung ist nicht vollkommen uniform, aber die Abweichung davon ist nur sehr gering.

Aus dem Gesagten wird man bemerkt haben, daß unter dem Namen „trilokulinärer Typus“ verschiedene Schalenanordnungen zusammengefaßt sind und daß wir diesen Typus nicht etwa als feststehenden Bauplan aufzufassen haben.

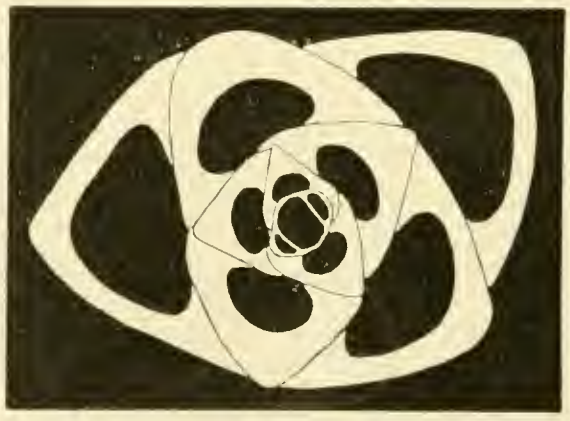
§ 5. Der quinquelokulinäre Typus. Nicht geringeren Formenreichtum weisen die Arten auf, welche man zu dem quinquelokulinären Typus rechnet. Nehmen wir zuerst als ausgezeichneten Repräsentanten die *A*-Form von *Pentellina pseudosaxorum*, SCHLUMB. (Fig. 98a und b)[1]). Kammer 1 befindet sich hier gerade gegenüber dem Embryonalkanal, sie umfaßt aber nur einen Bruchteil des Umfangs der Embryonalkammer. Kammer 2 liegt gegenüber 1 um einen Winkel gedreht, und stützt sich einerseits auf den Embryonalkanal, andererseits auf die Embryonalkammer. Kammer 3 fällt wieder seitwärts von Kammer 1, und im Ganzen sind hier fünf Kammern um die Embryonalkammer gelegen. Kammer 6 endlich fällt über 1, 7 über 2, usw. Die Kammern ordnen sich hier annähernd auf fünf Symmetrieebenen, welche untereinander Winkel von 72° bilden. Dennoch muß bemerkt werden, daß diese Anordnung nicht ganz genau verwirklicht ist, obwohl sie bei vielen Individuen dieser Art fast erreicht wird.

Fig. 98.



Pentellina pseudosaxorum, SCHL. Fig. a. Querschnitt in Perspektiv. Fig. b. Querschliff. (Nach MUN.-CHALM. und SCHLUMB. II.)

Fig. 99.



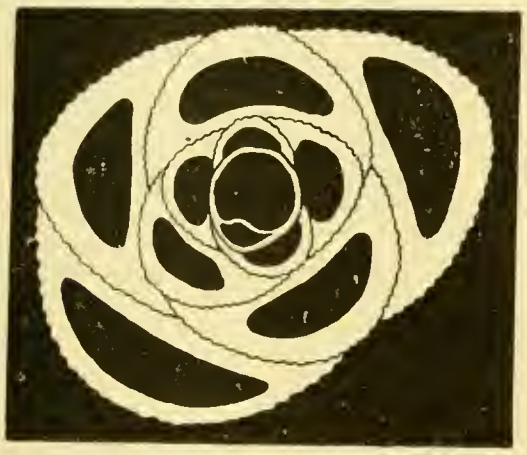
Quinqueloculina vulgaris, D'ORB., *A*-Form. Vergr. 44. (Nach SCHLUMBERGER VIII.)

Als erstes Beispiel einer abweichenden Form, welche man noch zu demselben Typus rechnet, möge die *A*-Form von *Quinqueloculina vulgaris* D'ORB. (Fig. 99) erwähnt werden. Die fünf Symmetrieebenen sind hier zwar nachzuweisen, aber sie fallen wenig auf; viel auffallender ordnen sich die Kammern auf drei gewundenen Symmetrieflächen in derselben Weise wie das bei *Trillina*

1) Die Genus *Pentellina* umfaßt die trematophoren Miliolinen, welche in der Form übereinstimmen mit den Repräsentanten der Genus *Quinqueloculina*, zu der die gewöhnlichen Miliolinen gehören.

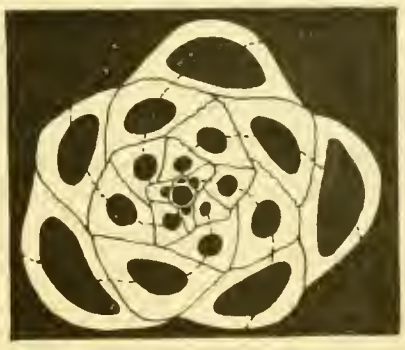
Howchini der Fall war. Dieser Schalenbau kann deshalb auch als Übergang zum trilokulinären Typus betrachtet werden. Noch stärker kommt dieses Verhalten in der Schale der *A*-Form von *Periloculina Raincourti* SCHLUMBERGER (siehe Fig. 100) zum Ausdruck, nur sei bemerkt, daß die Gattung *Periloculina* verschiedene Bautypen für dieselbe Art aufweist, was wir später noch näher besprechen werden. Man achte nun wieder besonders darauf, daß für diese beiden letzten Schalen die Kammern einen merkbar größeren Teil des Schalenumfangs einnehmen als bei *Pentellina pseudosaxorum*.

Fig. 100.



Periloculina Raincourti, SCHL., *A*-Form. Vergr. 28. (Nach SCHLUMBERGER XI.)

Fig. 101.

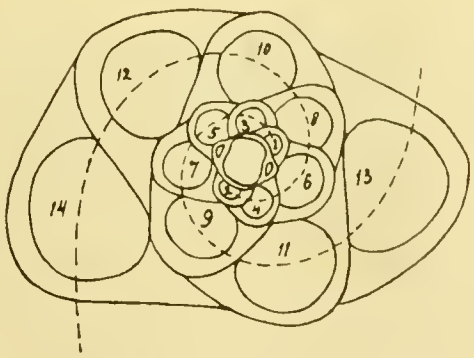


Pentellina Douvillei, SCHL., *A*-Form. Vergr. 32. (Nach SCHLUMBERGER XI.)

Eine noch bedeutendere Abweichung zeigt der Bau von *Pentellina Douvillei* SCHLUMBERGER, hier sind die fünf Symmetrieebenen durch fünf gewundene Symmetrieflächen ersetzt. Man gebe darauf Acht, daß die drei Erstlingskammern eine Form besitzen, welche von derjenigen der übrigen Kammern bedeutend abweicht, und merke sich auch noch besonders, daß alle Kammern hier einen Bruchteil des Schalenumfangs einnehmen, der noch geringer ist als bei *Pentellina pseudosaxorum*.

Bemerken wir schließlich noch, daß man bei anderen Arten aus den Gattungen *Quinqueloculina* und *Pentellina* viele Übergangsformen zwischen den hier beschriebenen Formen antreffen kann.

Fig. 102.



Sigmoilina Macarovi, SCHL., *A*-Form. Vergr. 89. (Nach SCHLUMBERGER IX.)

§ 6. Der Bautypus der Gattung *Sigmoilina*[1]). Ein sehr schönes Beispiel für diesen Bautypus findet man in der Schale der *A*-Form von *Sigmoilina Macarovi* SCHLUMBERGER (Fig. 102). Die Kammern sind hier nach zwei stark gewundenen Symmetrieflächen geordnet, sie nehmen einen so kleinen Bruchteil des Schalenumfangs ein, daß sieben Kammern nötig sind, um die Embryonalkammer

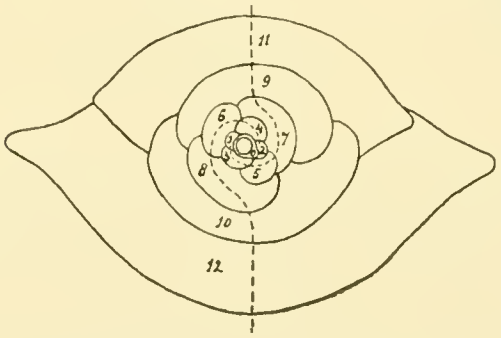
1) Für die Beschreibung der Gattung *Sigmoilina* vergleiche man: SCHLUMBERGER, Note sur le Genre *Planispirina* (IV).

einzuschließen, und äußerlich auch sieben Kammern angetroffen werden. Übrigens wird man den Bau dieser Art aus der schönen Zeichnung SCHLUMBERGERS unmittelbar verstehen.

Die anderen Arten dieser Gattung zeigen von der hier besprochenen zwar Abweichungen in der Anordnung der Erstlingskammern, aber die Endform kommt dem Bau von *Sigmoilina Macarovi* meistens sehr nahe.

§ 7. Der Dimorphismus. Wir haben bis jetzt nur die einfachen *A*-Formen betrachtet, welche eine uniforme Kammeranordnung besitzen; die mikrosphärischen *B*-Formen haben einen komplizierteren Bau, indem sie alle mit dem quinquelokulinären Typus anfangen, um, wenn sie etwa die Größe der Megalosphär erreicht haben, in dieselbe Kammeranordnung wie die *A*-Form überzugehen. Bei den Gattungen *Quinqueloculina* und *Pentellina*, welche auch in der *A*-Form den quinquelokulinären Typus aufweisen, sind die *A*- und *B*-Formen nur an der Größe der Embryonalkammern zu unterscheiden; wir haben diese *B*-Formen dann auch hier nicht zur Darstellung gebracht. Für die *B*-Form von *Biloculina murrhyna*, SCHWAG findet man das beschriebene Verhalten in Fig. 103, für

Fig. 103.



Biloculina murrhyna, SCHWAG, *B*-Form. Querschliff. Vgr. 200. (Nach MUN.-CHALM. und SCHLUMBERGER II.)

Fig. 104.

Triloculina trigonula, D'ORB. *B*-Form. Querschliff. Vgr. 120. (Nach MUN.-CHALM. und SCHLUMBERGER II.)

die *B*-Form von *Triloculina trigonula*, D'ORB. in Fig. 104 abgebildet. Die erste Figur vergegenwärtigt den Übergang des quinquelokulinären Typus in den trilokulinären und dann in den bilokulinären, stellt also eine „triforme" Kammeranordnung dar, während die zweite Figur den Übergang des quinquelokulinären in den trilokulinären Typus wiedergibt und sich also auf eine „diforme" Kammeranordnung bezieht [1]).

§ 8. Der Initialpolymorphismus. In seltenen Fällen zeigt sich um die Embryonalkammer der *A*-Formen eine andere Kammeranordnung als die älteren Kammern aufweisen, eine Erscheinung, welche von MUNIER-CHALMAS und SCHLUMBERGER „Polymorphisme initial" genannt ist. So findet man bei *Idalina antiqua* MUN.-CHALM. und SCHL. um die Megalosphär entweder die bi-, tri- oder quinquelokulinäre Anordnung. Ein ähnliches Verhalten zeigen auch die Gattungen *Periloculina* MUN.-CHAL. und SCHL. und *Lacazina*

1) Ausnahmsweise bleibt die *B*-Form von *Biloculina lucernula* SCHWAG trilokulinär und scheint niemals den bilokulinären Typus zu erreichen.

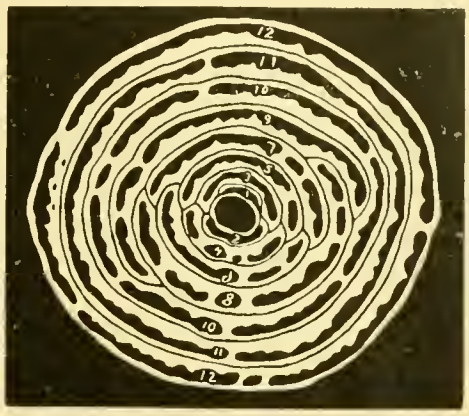
Mun.-Chalm.[1]), welche sich von *Idalina* durch die Anwesenheit von Rippen oder Zwischenleisten in den Kammern unterscheiden.

Fig. 105 gibt für die *A*-Form von *Idalina antiqua* den Übergang vom quinquelokulinären Typus in den bilokulinären, während

Fig. 105.

Idalina antiqua, Mun.-Chalm. u. Schl. *A*-Form. Vergr. 19. (Nach Mun.-Chalm. und Schlumberger II.)

Fig. 106.

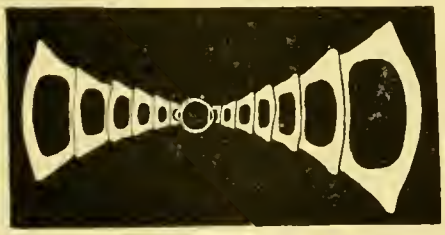


Periloculina Zitelli, Mun.-Chalm. u. Schl. *A*-Form. Querschliff. Vergr. 17. (Nach Mun.-Chalm. und Schlumberger II.)

Fig. 106 den Übergang des bilokulinären in den monolokulinären darstellt für die *A*-Form von *Periloculina Zitteli* Mun.-Chalm. und Schl.

§ 9. Andere Bautypen. Die meisten und bedeutendsten Miliolinen zeigen eine Kammeranordnung, welche sich auf einen der obenerwähnten Typen zurückführen läßt, dennoch werden in der Familie *Miliolinae* noch einige Gattungen mit abweichenden Bauformen untergebracht. So hat die Gattung *Spiroloculina* mit den jetzt beschriebenen Formen gemein, daß die Kammermündungen an zwei entgegengesetzten Polen liegen, und sie stimmt sogar mit den *A*-Formen von *Biloculina* darin überein, daß sich die Kammern auf zwei Symmetrieebenen (oder Flächen) ordnen. Während aber bei *Biloculina* die Kammern einander einhüllen, bedecken bei

Fig. 107.



Spiroloculina excavata, d'Orb. *A*-Form. Vergr. 34. (Nach Schlumberger VIII.)

Fig. 108.

Spiroculina inaequilateralis, Schl. *A*-Form. Vergr. 65. (Nach Schlumberger VIII.)

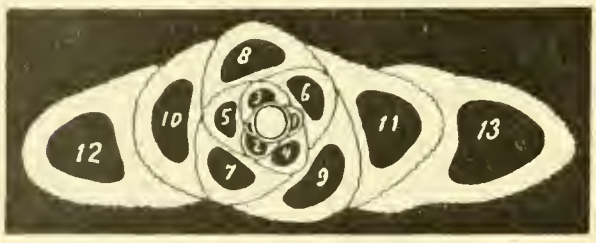
Spiroloculina die Kammern einander nur teilweise. So stellt Fig. 107 die *A*-Form von *Spiroloculina excavata* d'Orb. dar, bei welcher Art die beiden Symmetrieebenen in eine einzige zusammenfallen. Daß dieser letzte Umstand keine allgemeine Regel ist, folgt aus dem Bau von *Spiroloculina inaequilateralis* Schlumb. (Fig. 108).

1) Mit Ausnahme der oben besprochenen *Lacazina Wichmanni*, wobei (bis jetzt) nur die monolokulinäre Anordnung angetroffen worden ist.

Bemerken wir noch kurz, daß die *B*-Formen bei dieser Gattung nur durch die Größe der Embryonalkammern von den *A*-Formen zu unterscheiden sind.

Bei der Gattung *Massilina* und der damit in Form übereinstimmenden trematophoren Miliolinen aus der Gattung *Heterellina* findet man um die Embryonalkammer zuerst die Kammeranordnung nach dem quinquelokulinären Typus, während die älteren eine Anordnung zeigen, wie wir sie bei *Spiroloculina* angetroffen haben. Als Beispiel möge hier die *A*-Form von *Heterillina Guespellensis* SCHLUMB. (Fig. 109) dienen.

Fig. 109.



Heterillina Guespellensis, SCHL. *A*-Form. Vergr. 58. (Nach SCHLUMBERGER IX.)

Ein zweites abweichendes Verhalten zeigt die Gattung *Adelosina*, indem hier bei den *A*-Formen die erste Kammer sich ganz um die Embryonalkammer umbiegt[1]) und ihre Mündung oberhalb derjenigen des Embryonalkanals hat. Die übrigen Kammern aber und auch alle Kammern der *B*-Formen zeigen Anordnungen, welche sich in die beschriebenen Typen einordnen lassen.

Erwähnen wir nun schließlich noch, daß die Genera *Vertebralina* und *Articulina*, welche nicht bei der Familie *Miliolinae* untergebracht werden, ihr dennoch sehr nahe stehen, indem sie ihre Kammern teilweise miliolinär anordnen, obwohl sie an ihren älteren Kammern einen anderen Bau aufweisen.

§ 10. Vergleichung des Schalenbaus der Miliolinen mit den Anschlußverhältnissen junger Blätter am Vegetationspunkt. Wir haben uns bei der oben gegebenen Beschreibung und Einteilung der Typen den gebräuchlichen Ausdrucksweisen angeschlossen, jetzt wollen wir aber nachweisen, daß diese Formen sich übersichtlicher ordnen lassen, wenn wir dabei die Resultate unserer Blattstellungsstudien in Betracht ziehen. Vorläufig mögen die abweichenden, unter 8 besprochenen Bautypen von der Behandlung ausgeschlossen werden.

Zuerst sei darauf hingewiesen, daß bei den Schalen mit uniformer Kammeranordnung annäherungsweise jede Kammer den anderen gegenüber eine übereinstimmende Lage einnimmt. Die Mittelpunkte der Kammerquerschnitte bilden also annähernd einen Teil eines „ähnlichen Punktsystems auf einer Ebene", und weil jede folgende Kammer größer ist als die vorhergehende, so muß dieses System sicher ein „einfaches" sein. Daß sich die Kammermittelpunkte dann auch auf Systemen paralleler Spiralscharen ordnen lassen, braucht nicht näher hervorgehoben zu werden. Die Kammern selbst sind von verschiedener Gestalt; doch zeigt ihre Umrißlinie meistens eine gewisse Übereinstimmung mit der Kurve, welche wir als „Folioide" kennen gelernt haben. Eine Vergleichung der Querschliffe von Schalen mit uniformer Kammeranordnung

1) Dabei wird die Embryonalkammer ganz von der Wand dieser ersten Kammer eingehüllt.

mit den Folioidenkonstruktionen, welche auf Tafel X zu finden sind, wird deutlich machen, daß diese Querschliffe mit den „ähnlichen Systemen tangierender Folioiden" wichtige Eigenschaften gemein haben. Jede Kammer wird von vier oder sechs anderen berührt und auch die Scharen paralleler „Kontaktspiralen" fallen unmittelbar ins Auge. Jedoch findet man bei den Schalen keine Lücken zwischen den Kammern wie bei den Folioidenkonstruktionen zwischen den Folioiden, und eben dieser Umstand gibt zu der abweichenden Form der Kammern Veranlassung. Man kann sich nun in diesen Kammern Folioiden konstruiert denken, die der Kammerform möglichst nahe kommen und die dann zusammen das ähnliche Folioidensystem bilden, mit dem die Kammeranordnung die größte Übereinstimmung zeigt. Wenn wir dann diese Folioidensysteme wieder durch ihre zwei- oder dreizähligen Kontakte ausdrücken, so können wir den Schalenbau vollständig beschreiben. Die oben besprochenen und abgebildeten Arten mit uniformer Kammeranordnung (*A*-Formen) lassen sich bei dieser Ausdrucksweise in folgende Reihe ordnen:

Lacazina Wichmanni, SCHLUMB.	Kontakt 0 und 1
Biloculina murrhyna, SCHWAG *Fabularia discolithes,* DEFR.	Kontakt 1 und 1
Triloculina rotunda, D'ORB.	Kontakt 1 und 2
Triloculina trigonula, D'ORB.	Kontakt 1, 2 und 3
Trillina Howchini, SCHL. *Quinqueloculina vulgaris,* D'ORB. *Periloculina Raincourti,* SCHL.	Kontakt 2 und 3
Pentellina pseudosaxorum, SCHL.	Kontakt 2, 3 und 5
Pentellina Douvillei, SCHL.	Kontakt 3 und 5
Sigmoilina Macarovi, SCHL.	Kontakt 2 und 5

Bei der Prüfung dieser Angabe erwäge man, daß man niemals mathematische Genauigkeit zu erwarten hat, die Kammern weisen z. B. nur sehr annähernd eine konstante Divergenz auf[1]), während sie auch öfters Abweichungen von dem symmetrischen Bau zeigen, so daß keine wirklichen Folioiden darin zu beschreiben sind, sondern nur asymmetrische Figuren. Wir wissen bereits aus unseren Blattstellungsstudien, wie auch durch diesen letzten Umstand die Divergenz eine Änderung erfahren kann. Dennoch können wir den Vergleich noch ein wenig weiter fortsetzen. Dazu erinnern wir daran, daß bei den Folioidenkonstruktionen bestimmte Kontakte nur bei bestimmten Werten des „relativen Folioidendurchmessers", des Faktors *b*, zu konstruieren sind, und zwar gilt dafür folgende Tabelle:

für	den	Kontakt	0	und	1	ist	$b = 1$					
„	„	„	1	„	1	liegt	b	zwischen	1	und	$\pm 0{,}5$	
„	„	„	1	„	2	„	b	„	$\pm 0{,}5$	und	$\pm 0{,}38$	
„	„	„	2	„	3	„	b	„	$\pm 0{,}38$	„	$\pm 0{,}23$	
„	„	„	3	„	5	„	b	„	$\pm 0{,}23$	„	$\pm 0{,}14$	
„	„	„	2	„	5	„	b	„	$\pm 0{,}23$	„	$\pm 0{,}16$	

1) So fand ich für die 10 jüngsten Kammern von *Pentellina Douvillei,* SCHL. diese Divergenzen: 143°, 140°, 127°, 152°, 127°, 135°, 142°, 128°, 147°, 134°, d. i. im Mittel 137°,5. Obwohl also die einzelnen Werte ziemlich stark voneinander abweichen, ergab der Mittelwert eine merkwürdige Annäherung an die Limitdivergenz der Hauptreihe.

Bei den Foraminiferenschalen kann man nun als Maßstab für den Faktor *b* den Teil des Schalenumfangs annehmen, der von den Kammern eingenommen wird, und man wird sich leicht davon überzeugen, daß bei roher Annäherung die tatsächlich beobachtete Breite der Kammern mit diesen theoretischen Werten übereinstimmt. Damit ist also die Beziehung erklärt, auf die wir bei unseren Beschreibungen öfters hinwiesen, welche zwischen dem Schalenbau und der relativen Breite der Kammern besteht.

Daß sich die Schalen mit diformer und triformer Kammeranordnung mit Folioidensystemen mit veränderlichen Kontakten vergleichen lassen, wird ohne weiteres deutlich sein. Die oben genannten Beispiele lassen uns also folgende Reihe aufstellen:

B-Form von *Biloculina murrhyna,* SCHWAG. Übergang vom Kontakt 2 und 3 in den Kontakt 1 und 1.

B-Form von *Triloculina trigonula,* D'ORB. Übergang vom Kontakt 2 und 3 in den Kontakt 1, 2 und 3.

A-Form von *Idalina antiqua,* MUN.-CH. u. SCHL. Übergang vom Kontakt 2 und 3 in den Kontakt 1 und 1.

A-Form von *Periloculina Zitteli,* MUN.-CH. u. SCHL. Übergang vom Kontakt 1 und 1 in den Kontakt 0 und 1.

Aus dem Obenstehenden geht also der wichtige Schluß hervor, daß die in § 2—8 beschriebenen Schalen die größte Übereinstimmung mit Folioidenkonstruktionen zeigen, wie wir sie in unseren früheren Studien kennen gelernt haben, und zwar mit solchen, welche konstante oder veränderliche Kontakte aus der Hauptreihe und aus der einfachen Nebenreihe 2 und 5 aufweisen. Nun sahen wir, daß auch die Anschlußverhältnisse junger Blätter an den Vegetationspunkten sich mit solchen Folioidenkonstruktionen vergleichen lassen und zwar ebenfalls meistens mit solchen, die Kontakte aus der Hauptreihe besitzen. Nur die Kontakte 0 und 1 und 2 und 5, welche wir bei den Foraminiferenschalen gefunden haben, zeigen die Pflanzen nicht. In den meisten Fällen, und das muß jedermann auffallen, besteht also zwischen dem beschriebenen Schalenbau und den Kontaktverhältnissen am Scheitel eine merkwürdige Übereinstimmung nicht nur in der äußeren Gestalt sondern auch in den Zahlenverhältnissen.

Man denke nun nicht etwa, daß die hier angeführten Beispiele mit Vorbedacht ausgewählt wurden und daß diese Übereinstimmung nur für sie gilt, nein, sämtliche Genera, welche man zu der Familie *Miliolinae* vereinigt hat, mit nur einigen ganz bestimmten Ausnahmen, über die bald näher gesprochen werden wird, zeigen einen ähnlichen Schalenbau. Bei allen Species von *Biloculina, Triloculina, Trillina, Quinqueloculina, Pentellina, Sigmoilina, Idalina, Periloculina, Lacazina, Fabularia* und *Adelosina*[2]) läßt sich die Kammeranordnung mit Folioidenkonstruktionen aus der Hauptreihe oder aus der Nebenreihe 2 und 5 vergleichen.

Nur bei denjenigen Gattungen, bei welchen der spirolokulinäre Typus auftritt, erfährt diese Regel eine Ausnahme. Es gilt dies also noch für die übrigen Genera: *Spiroloculina, Massilina* und *Heterillina.* Bei *Spiroloculina excavata,* D'ORB. (Fig. 107) findet man

---

1) Für diese letzte Gattung hat man bei den *A*-Formen die erste Kammer von der Betrachtung auszuschließen.

zwar eine Anordnung der Kammern, welche an die zweizeilige Blattstellung erinnert, jedoch läßt dieser Schalenbau sich nicht mit den dafür geltenden Folioidenkonstruktionen vergleichen, weil die Kammern nur einen Teil des Schalenumfangs einnehmen, der kleiner ist als die Hälfte desselben. Bei *Spiroloculina inaequilateralis* SCHLUMB. (Fig. 108) ist sogar die konstante Divergenz nicht mehr vorhanden und hört die Übereinstimmung ganz auf. Was schließlich die Genera *Massilina* und *Heterellina* anbelangt, so zeigen dafür, wie wir gesehen haben, nur die jüngeren Kammern den spirolokulinären Bautypus und die übrigen bilden ein System, das sich wieder ganz mit den Folioidenkonstruktionen vergleichen läßt. Auch die nicht unter die Miliolinen fallenden Genera: *Vertebralina* und *Articulina* weichen nur in der Anordnung ihrer letzten Kammern von einem solchen Bau ab.

Obwohl sich also einige bestimmte Ausnahmen angeben lassen, so wird dadurch die Bedeutung unserer Schlußfolgerung nicht vermindert, daß in den meisten Fällen sich die Kammeranordnung in den Miliolinenschalen vergleichen läßt mit Folioidensystemen, welche Kontakte aus der Hauptreihe oder ausnahmsweise aus der einfachen Nebenreihe 2 und 5 aufweisen. Worin die Ursache für diese interessante Übereinstimmung mit den pflanzlichen Vegetationspunkten zu suchen ist, warum die genannten Kontaktsysteme bevorzugt werden, warum der quadrilokulinäre Typus niemals aufgefunden wird und bei der biformen Anordnung der quinquelokulinäre Typus in den trilokulinären und dieser in den bi- und monolokulinären übergeht, ohne daß dabei ein quadrilokulinärer Typus verwirklicht wird, sind Fragen, die durch die genannten Ausnahmen nichts von ihrer Bedeutung verloren haben.

Kap. II. Die Mechanik des Kammerbaus bei der Familie der Miliolinen.

§ 1. Allgemeine Gesetze. Wie bereits früher gesagt wurde, wollen wir uns den theoretischen Betrachtungen von RHUMBLER anschließen und zwar werden wir zuerst die Mechanik des Kammerbaus, wie sie für sämtliche mehrkammerige Foraminiferen gilt, kurz besprechen, um dann diese Anschauungen auf den Schalenbau der Miliolinen zu übertragen.

Die Untersuchungen von LISTER und SCHAUDINN haben es unzweifelhaft gemacht, daß alle polythalamen Foraminiferen im Jugendzustand aus der Embryonalkammer allein bestehen. Die Anlegung der ersten Kammer geschieht nun in der Weise, daß die Sarkode aus der Embryonalkammer hervorfließt und sich gegen die Wand dieser Kammer anlegt, um, wenn sie eine bestimmte Größe erreicht hat, an der äußeren und bisweilen auch an der inneren Seite eine Kalkwand abzusetzen. Dabei bleibt eine Stelle von der Kalkablagerung frei; aus dieser „Mündung“ tritt nun nach einiger Zeit aufs neue ein Sarkodestrom, der zu der Bildung der zweiten Kammer Veranlassung gibt.

Nun hat man die Sarkode sicherlich als Flüssigkeit zu betrachten; dies geht ja schon aus der „Körnchenströmung" in den von ihr ausgesandten Pseudopodien hervor. Die Oberfläche der ausgeflossenen Sarkode muß also den Flüssigkeitsgesetzen unterworfen sein und diese müssen auch in der von ihr abgelagerten Kalkwand zum Ausdruck kommen. Diese Überlegung bildet den Grundgedanken der RHUMBLERschen Ableitungen.

Die Frage nach der Gestalt des Sarkodestroms wird bedeutend vereinfacht durch den Umstand, daß die Schwerkraft auf die Gestalt desselben keinen Einfluß ausübt. Es findet das seine Erklärung darin, daß die ausfließende Sarkode ein spezifisches Gewicht besitzt, das nur wenig von dem des umgebenden Meerwassers verschieden ist. Das Hervortreten der Sarkode wird nämlich durch Wasseraufnahme bewirkt, welche wahrscheinlich auf osmotischem Wege geschieht, so daß das aufgenommene Wasser frei von Salzen und also spezifisch leichter ist als das Meerwasser. Die Substanz, welche diesen erhöhten osmotischen Druck hervorruft, ist nach RHUMBLER die bei der Atmung erzeugte Kohlensäure. Wird diese bei der Anlegung der Schalenwand als kohlensaurer Kalk abgesetzt, so ist damit die Erhöhung des osmotischen Druckes aufgehoben und in diesem Stadium findet man die Sarkode in der jüngsten Kammer nur als dünnen Wandbelag wieder. Im Laufe der weiteren Entwicklung wird diese Kammer ganz mit Sarkode ausgefüllt und schließlich wieder der Zustand erreicht, in welchem die Sarkode durch neue Wasseraufnahme aus der Kammer hervortritt.

Genügt schon diese Herabsetzung des spezifischen Gewichtes, um die Unabhängigkeit der Kammergestalt von der Schwerkraft zu erklären, so wird dieser Umstand noch dadurch verstärkt, daß die Oberflächenspannung hier wahrscheinlich eine sehr bedeutende Kraft darstellt, gegenüber welcher die Schwerkraft nicht in Betracht kommt.

Beim Hervorfließen kommt die Sarkode mit zwei Medien in Berührung: der Schalenwand und dem Meerwasser. Wenn sie dann infolge der Adhäsion an der Schalenwand entlang fließt, so muß sie mit derselben einen Winkel bilden, der, wenn die Oberfläche der Sarkode überall dieselbe Spannung und die Schalenwand die gleiche Zusammensetzung besaß, auch überall denselben Wert aufweisen müßte. In diesem Fall würde derjenige Teil der Oberfläche der Sarkode, der nach dem Meerwasser hingerichtet ist, die Gestalt einer Kugelfläche besitzen. Nun lehrt die Beobachtung, daß diese beiden letzten Verhältnisse gar nicht genau verwirklicht werden, und daraus geht also notwendig hervor, daß die Oberflächenspannung der Sarkode keine gleichmäßige sein kann. Es wird diese Inhomogenität im Sinne ROUX dadurch ermöglicht, daß die Sarkode, wie das von BÜTSCHLI, SCHAUDINN und RHUMBLER festgestellt wurde, einen „wabigen Bau" besitzt.

Da nun aber die Ungleichheit in den meisten Fällen in gesetzmäßiger Weise zum Ausdruck kommt, indem z. B. der vordere Teil des Sarkodestroms eine andere Spannung besitzt als der hintere, während dazwischen der Übergang gleichmäßig ist, so läßt sich doch allgemein dieses Gesetz aufstellen: Die homologen Randwinkel, mit denen sich die neuen Wände an den älteren absetzen,

besitzen einen konstanten Wert. Dieses Gesetz hat RHUMBLER an zahlreichen Beispielen bestätigt gefunden, auch an den Querschliffen der Miliolinen. Es sind ja in diesen Schliffen die Kammern alle in der Mitte durchgeschnitten und die darin vorkommenden Randwinkel sicherlich „homologe". Man kann sich von der Richtigkeit dieses Gesetzes in unseren Figuren leicht überzeugen. Daß es auch für die Miliolinen mit biformer Kammeranordnung Geltung hat, wie von RHUMBLER nachgewiesen wurde, ist darum noch besonders interessant, weil daraus die Unabhängigkeit des Randwinkels von der Schalengestalt hervorgeht.

Bedenkt man, daß auch die freie Oberfläche der Sarkode an homologen Stellen gleiche Beschaffenheit zeigt, so geht daraus hervor: „homologe Querschnitte verschiedener Kammern sind ähnliche Figuren". Daß auch diese Regel für die meisten Schalen richtig ist, wird man aus unseren Abbildungen entnehmen können; daraus wird man aber auch sehen, daß es Ausnahmen gibt, diese muß man einer Änderung der Oberflächenspannung an homologen Stellen zuschreiben, ohne daß sich dafür eine weitere Erklärung angeben läßt.

Findet also durch die gegebene Betrachtung bereits die Gestalt der einzelnen Kammern auf physikalischem Weg ihre Erklärung, so hat RHUMBLER noch einen zweiten Schritt getan, indem er die verschiedenen Kammeranordnungen bei den polythalamen Foraminiferenschalen näher zu erklären versuchte. Dazu hat dieser Forscher an der Hand des Minimalflächengesetzes untersucht, wie sich die Sarkode auf den vorhandenen Schalenteilen ausbreiten muß, wenn die Schale verschiedene Winkel und Krümmungen aufweist. Der für unsere weitere Betrachtung wichtigste Schluß, zu dem er gelangte, ist der folgende:

Ein Flüssigkeitsrand läßt sich bei gleichem Randwinkel auf einer gekrümmten Fläche um so schwerer ausbreiten, je konkaver die Krümmung der Fläche ist, auf einer konvexen, je kleiner der Krümmungsradius ist. Für die Beweisführung dieses und für seine anderen wichtigen Schlüsse möge auf die Originalabhandlung hingewiesen werden.

Aber auch andere Umstände als das genannte Minimalflächengesetz üben auf die Kammeranordnung Einfluß aus, teils sind das dieselben, welche die Gestalt der einzelnen Kammern bestimmen, teils auch andere. RHUMBLER faßt diese „physikalischen Momente, die auf Grund des rein flüssigen Zustandes der alveolar gebauten Sarkodenmenge die Ausbildung der Schale bei allen Foraminiferen bewerkstelligen", wie folgt zusammen:

1. Die Inhomogenität der Spannung der Oberfläche.
2. Das Gleichbleiben homologer Randwinkel.
3. Die Gestalt der Flußfläche.
4. Die Lage der als Ausflußöffnung dienenden Schalenmündung.
5. Das Gesetz des kleinsten Oberflächenkonsumes.
6. Die Menge der ausgeflossenen Sarkode.

An zahlreichen Beispielen hat der genannte Forscher diese Betrachtungen geprüft und bestätigt gefunden, auch die Miliolinen sind dabei wieder angeführt worden. Im Folgenden werden wir ausschließlich für diese Familie die RHUMBLERsche Theorie anwenden, wir werden dabei ausführlicher sein müssen als dieser

Forscher und auch von einigen anderen Gesichtspunkten aus unsere Darstellung zu geben haben.

§ 2. Anwendung auf den Schalenbau der Miliolinen. Wenn die Sarkode aus der Mündung der Embryonalkammer hervorfließt, so wird sie, wie gesagt, über die Kammerwand strömen und sich daran mit einem bestimmten Winkel ansetzen. Es leuchtet nun ein, daß, je weniger Sarkode ausfließt und je größer ihre Oberflächenspannung ist, desto schmaler die Ansatzstelle des Stromes sein muß; ist dagegen die Quantität Sarkode groß und die Oberflächenspannung klein, so wird dieser Strom sich über einen größeren Teil der Embryonalkammer ausbreiten.

Der einfachste denkbare Fall ist nun der, daß die Menge Sarkode so groß ist, oder die Spannung so klein, daß die ganze Oberfläche der Embryonalkammer davon überströmt wird. Diesem Verhalten begegnet man, wie wir gesehen haben, bei *Lacazina Wichmanni* SCHL. (Fig. 92). Daß nun in diesem Fall die Mündung der ersten Kammer derjenigen des Embryonalkanals gegenüber gelegen ist, muß einer Abweichung in der Spannung der Sarkodenoberfläche an dieser Stelle zugeschrieben werden, obwohl sich dafür zur Zeit noch keine mechanische Erklärung geben läßt. Für die weitere Oberfläche scheint die Spannung eine ziemlich gleichmäßige zu sein, denn die Schale besitzt annähernd eine kugelförmige Gestalt. Tritt bei dieser Art aus der Mündung der ersten Kammer eine neue Menge Sarkode aus, so ist diese größer als diejenige, welche aus der Embryonalkammer hervorkam. Bei gleich gebliebener Oberflächenspannung und gleicher Beschaffenheit der Schalenwand wird dann die erste Kammer wieder vollständig von Sarkode überströmt werden. Auch jetzt muß wieder eine Inhomogenität der Spannung an dem Pol, der der Mündung der ersten Kammer gegenüberliegt, die Mündung der zweiten erzeugen. Ganz dasselbe Spiel wiederholt sich bei der Anlegung der folgenden Kammern.

Ein wenig komplizierter wird das Verhalten für den bilokulinären Bautypus, wie wir es bei der *A*-Form von *Biloculina* und von *Fabularia* angetroffen haben (Fig. 93 u. 94). Hier sind die Quantität und die Spannung der aus der Embryonalkammer hervorfließenden Sarkode derart, daß nicht die ganze Oberfläche derselben mit Sarkode überdeckt wird, daß aber die Ansatzstelle doch mehr als die Hälfte des Kammerumfangs beträgt. Weil nun der Sarkodestrom mit einer gewissen, wenn auch kleinen Geschwindigkeit aus der Mündung des Kanals hervorfließt, so wird sich dieser Strom über denjenigen Teil der Kammeroberfläche ausbreiten, der dem Embryonalkanal gegenüberliegt. Umstände, wie wir sie später kennen lernen werden, durch die die Richtung dieses Stromes abgelenkt werden kann, kommen bei den hier betrachteten Formen nicht vor; die Opposition von Embryonalkanal und erster Kammer scheint hier die Regel zu sein.

Eine der bedeutendsten Eigentümlichkeiten in dem Bau von *Biloculina* und *Fabularia*, und auch bei allen übrigen Miliolinen, mit Ausnahme der Gattung *Adelosina*, ist nun die, daß der Strom, welcher zur Bildung der ersten Kammer Veranlassung gibt, an dem Pol der Embryonalkammer, welcher der Kanalmündung gegenüberliegt, aufhört. Warum das der Fall ist, läßt sich nicht mit Sicherheit angeben. Wahrscheinlich ist hier die Beschaffenheit der Schale

eine andere und wird dadurch die Strömung der Sarkode erschwert; möglicherweise spielt dabei die Inhomogenität der Oberflächenspannung eine Rolle oder haben kleine Abweichungen in der Form der Embryonalkammer an dieser Stelle einen Einfluß; höchstwahrscheinlich also ist eine mechanische Erklärung dafür möglich, wenn sie auch jetzt noch nicht anzugeben ist.

Die freie Oberfläche der Sarkode besitzt bei den meisten *Biloculina* sicher keine gleichmäßige Spannung, indem die Wand, besonders in der Nähe der Ansatzstellen stärker gebogen als in der Mitte und öfters sogar zugespitzt erscheint.

Wenn nun aus der ersten Kammer aufs neue ein Sarkodestrom hervorquillt, der jetzt bedeutender ist als der, welcher aus der Embryonalkammer hervortrat, so kann dieser zwar mit dem geringsten Widerstand an den Seiten der Ansatzstellen des Embryonalkanals entlangfließen, aber durch die beträchtliche Breite des Stromes wird dieser Kanal ganz überdeckt und hat also auf die Stellung der zweiten Kammer keinen Einfluß. Seitwärts wird der Strom erst gehemmt durch die Ansatzstellen der ersten Kammer, welche durch die oben erwähnte starke Krümmung oder Zuspitzung einen großen Widerstand bilden und dem Strom ein bestimmtes Flußbett vorschreiben. Aber auch an der vorderen Seite wird der Strom durch die Ansatzstelle der ersten Kammer gehemmt, sobald er die Hälfte der Schale umflossen hat und oberhalb der Kanalmündung angelangt ist. Hierdurch ist also die Form und Lage der zweiten Kammer eine ganz bestimmte und zwar liegt sie genau gegenüber der ersten Kammer. Auch die übrigen Kammern werden in ganz übereinstimmender Weise angelegt.

Betrachten wir nun die Fälle, in welchen der aus der Embryonalkammer fließende Sarkodestrom einen Teil der Oberfläche derselben einnimmt, der kleiner ist als die Hälfte des Schalenumfangs. Im allgemeinen wird dieser Strom wieder aus der Mündung des Kanals mit gewisser Geschwindigkeit hervorfliessen und wird die erste Kammer diesem Kanal gegenüber angelegt. In diesen Fällen erleidet aber die Richtung des Stromes öfters eine Abweichung, wozu sich verschiedene Gründe angeben lassen. So kann es vorkommen, daß der Embryonalkanal eine beträchtliche Länge besitzt und dadurch zweimal auf dem Querschnitt angetroffen wird, dann wird sich der Strom leichter an einer der Seiten dieses Kanals entlang bewegen; diesen Fall findet man z. B. bei *Sigmoilina Macarovi*, SCHL. (Fig. 102) verwirklicht. Auch kann es vorkommen, daß die Kanalmündung nicht genau symmetrisch ist und an der einen Seite den Sarkodestrom leichter zufließen läßt als an der anderen; dies ist wahrscheinlich bei *Triloculina trigonula* D'ORB. (Fig. 95) die Erklärung für die schiefe Lage der Kammer gegenüber dem Embryonalkanal. Auch besteht natürlich die Möglichkeit einer ungleichmäßigen Beschaffenheit der Schalenwand.

In allen diesen Fällen befindet sich die Mündung der ersten Kammer wieder an dem Pol, der der Mündung des Kanals gegenüber liegt, und es gilt also dieselbe Bemerkung, welche wir in Bezug auf die Lage der Mündung der ersten Kammer für *Biloculina* gemacht haben.

Wie sich nun die dritte Kammer stellen wird, wird auch jetzt allein dadurch bestimmt, auf welchem Weg die aus der ersten

Kammer hervorfließende Sarkode den geringsten Widerstand findet. So muß sich die zweite Kammer bei *Triloculina trigonula*, D'ORB. (Fig. 95) notwendigerweise über dem noch freigebliebenen Teil der Oberfläche der Embryonalkammer anlegen. Obwohl auch hier der aus der Mündung der ersten Kammer hervortretende Strom, weil er mit einer gewissen Geschwindigkeit hervortritt, Neigung besitzt, sich dieser Kammer genau gegenüber anzulegen, so erleidet er doch eine Ablenkung, weil die am leichtesten zugängliche Flußfläche seitwärts gelegen ist. Der Strom wird hier an seinen Seiten durch den Embryonalkanal und durch die erste Kammer zurückgehalten. Die Lage der übrigen Kammern ist ebenfalls genau durch das Minimalflächengesetz bestimmt.

Bei *Pentellina pseudosaxorum* SCHL. (Fig. 98), bei der die erste Kammer genau dem Embryonalkanal gegenüber gestellt ist und eine noch kleinere relative Breite besitzt als bei der letztgenannten Art, bleibt für die Anlegung der zweiten Kammer noch ein großer Teil der Oberfläche der Embryonalkammer frei. Es wird nun einleuchten, daß hier durch den Umstand, daß sich die neue Kammer möglichst der vorhergehenden gegenüber zu stellen sucht, als Flußfläche eine der Ansatzkanten des Embryonalkanals bevorzugt wird. Auch alle folgenden Kammern werden in den am leichtesten zugänglichen Furchen angelegt, und, wenn mehrere zur Verfügung stehen, wird sich immer die neue Kammer der letztangelegten so viel wie möglich gegenüber zu stellen suchen.

Wir haben also gesehen, daß die Sarkode sich immer derart zwischen den älteren Kammern fortbewegt, daß bei dem gegebenen Quantum die Oberfläche so klein wie möglich ist. Wodurch wird nun aber jedesmal dieses Quantum Sarkode bestimmt? Es muß ja einleuchten, daß nur darum ein so regelmäßiger Kammerbau zustande kommt, weil diese Quantität immer einen ganz bestimmten Wert besitzt.

Man kann als wahrscheinlich annehmen, daß durchgehends der Sarkodestrom dann ausfließen wird, wenn der osmotische Druck der Kohlensäure eine bestimmte konstante Größe erreicht hat. Setzen wir nun voraus, daß die ganze Quantität der in den älteren Kammern vorhandenen Sarkode für die Bildung der neuen Kammer benutzt wird, so muß der Inhalt dieser Kammer dem Quantum vorhandener Sarkode proportional sein. Ist dann der Inhalt der Embryonalkammer J_0, derjenige der ersten Kammer $J_1 = qJ_0$, so wird der Inhalt der zweiten Kammer gegeben durch $J_2 = q(J_0 + qJ_0) = qJ_0(1+q)$, der dritten durch $J_3 = qJ_0(1+2q+q^2) = qJ_0(1+q)^2$, der vierten durch $J_4 = qJ_0(1+q)^3$ usw., also der n^{ten} durch $J_n = qJ_0(1+q)^{n-1}$. Hieraus folgt, daß in diesem Fall der Inhalt zweier aufeinander folgender Kammern das konstante Verhältnis $(1+q)$ zeigen muß.

Weil nun aus der Konstanz der Ansatzwinkel, wie bereits früher hervorgehoben wurde, folgt, daß die einzelnen Kammern annähernd als ähnliche Figuren betrachtet werden können, so müssen, wenn unsere Voraussetzung richtig ist, übereinstimmende Abstände in den aufeinander folgenden Kammern ein konstantes Verhältnis aufweisen. Wenn man nun diese Folgerung an den Schalen prüft, so stellt sich heraus, daß sie bei Schalen mit uniformer Kammeranordnung in sehr roher Annäherung richtig ist,

obwohl ziemlich bedeutende Abweichungen nicht selten sind. Man bedenke aber, daß die Ähnlichkeit der Kammern sicherlich nicht genau verwirklicht ist, und daß man also schon zufrieden sein muß, wenn das Verhältnis nicht all zu sehr variiert. Tabelle XXI gibt für *Triloculina rotunda*, D'ORB. dieses Verhältnis für die Breite der Kammern.

Tabelle XXI.

Verhältnis der Kammerbreiten für *Triloculina rotunda*, D'ORB. (Fig. 98).

Nummer der Kammer	Breite in mm	Verhältnis
2	0,034	
3	0,045	0,76
4	0,061	0,74
5	0,084	0,73
6	0,114	0,74
7	0,142	0,80
8	0,182	0,78
9	0,246	0,74
10	0,319	0,77

Bei Schalen mit diformer Kammeranordnung ist die Sache eine andere. So geht aus der Tabelle, welche RHUMBLER (XIV) für die Kammeroberflächen von der *B*-Form von *Biloculina Sarci*, SCHLUMB., gegeben hat, hervor, daß für die *B*-Formen dieser Art die genannte Proportionalität zwar für die älteren Kammern besteht, daß sie aber mit dem Übergang der quinquelokulinären Kammeranordnung in die bilokulinäre verloren geht. Zur Bildung der jüngsten Kammern muß hier eine relativ viel beträchtlichere Quantität Sarkode ausfließen als für die der ersteren.

Man kann diese Tatsache dadurch erklären, daß man annimmt, daß die Quantität gebildeter Kohlensäure hier nicht proportional dem Quantum vorhandener Sarkode ist, sondern stärker als diese zunimmt, ohne daß dafür der mechanische Grund jetzt bekannt ist. Doch muß erwähnt werden, daß RHUMBLER bereits auf eine andere Erklärungsmöglichkeit hingewiesen hat, nämlich diese: bei den kleinen Kammern muß der Oberflächendruck[1]) einen bedeutenden Wert annehmen und wirkt dann sicherlich mit dem osmotischen Druck des Meerwassers zusammen der Ausdehnung der Sarkode entgegen. Bei der Bildung von den größeren Kammern wird dieser Oberflächendruck einen viel geringeren Wert erlangen und wahrscheinlich nicht mehr auf die Größe der Kammern von Einfluß sein, sodaß sich diese bei demselben osmotischen Druck verhältnismäßig mehr ausdehnen können. Dieser Umstand würde es begreiflich machen, warum die mikrosphärischen *B*-Formen gerade durch die relative Kleinheit der ersten Kammern ausgezeichnet sind, und würde auch die merkwürdige Beobachtung erklären, daß diese Formen immer die Kammeranordnung der *A*-Form annehmen, sobald sie

1) Es läßt sich ja dieser Druck darstellen durch $O\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, wenn O die konstante Oberflächenspannung und R_1, R_2 den größten und kleinsten Krümmungsradius darstellen.

die Größe der Megalosphär erreicht haben. Unerklärt bleibt es aber vorläufig, warum dieses Verhalten sich nicht bei den *B*-Formen des *Quinqueloculina* und *Pentellina* zeigt.

Wenden wir uns nun zu der wichtigsten Frage, durch welche Umstände die Übereinstimmung des Schalenbaus mit den Anschlußverhältnissen am Stammscheitel verursacht wird.

Zunächst bemerken wir, daß die äußere Kammerwand nach außen sich hervorwölben muß, weil die Oberflächenspannung der Sarkode diese Form zur Folge hat, während die innere Kammerwand in ihrer Lage durch die älteren Kammerwände bestimmt ist und sich dadurch nach der inneren Seite der Kammer hinwölbt. Da nun, wieder als eine Folge der Oberflächenspannung, die Form der Kammern symmetrisch ausfällt, so muß der Querschnitt dieser Kammern eine Form besitzen, welche der Folioide nahe kommt. Nach dem, was wir oben über die Größe der einzelnen Kammern bei den Schalen mit uniformem Kammerbau gesagt haben, folgt dann, daß die Querschnitte als eine Reihe von Folioiden zu betrachten sind, bei welchen die übereinstimmenden Längen ein konstantes Verhältnis besitzen.

Denken wir uns nun, daß bei einer Schale mit uniformer Kammeranordnung bereits eine Reihe Kammern vorhanden ist, und daß die Beobachtung uns gelehrt hat, daß diese annähernd ein ähnliches Folioidensystem mit dem Hauptverhältnis a bilden. Die Anlegung einer neuen Kammer kann dann folgendermaßen gedeutet werden: Eine neue Folioide legt sich in unmittelbarem Kontakt mit bereits vorhandenen Folioiden in derjenigen Lücke an, welche am dichtesten nach dem Zentrum zu gelegen ist. Dabei hat diese Folioide eine solche Größe, daß ihr Durchmesser mit demjenigen der zuletzt angelegten Kammer das Verhältnis a ergibt. Aus unseren mathematischen Darlegungen folgt nun, daß dann die neue Folioide notwendig in das bereits vorhandene System hineingehört. Die Fortsetzung des Systems kann also als die mechanisch notwendige Folge dieser Umstände betrachtet werden, welche sich ihrerseits aus den Flüssigkeitsgesetzen erklären ließen.

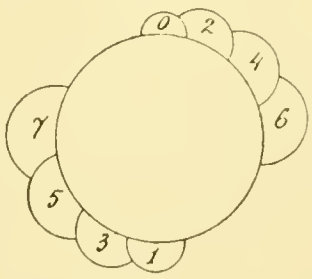
Vergleicht man nun das hier Gesagte mit unseren Betrachtungen über die Fortsetzung eines Kontaktsystems bei konstanter Blattstellung (man siehe S. 218), so wird eine Übereinstimmung in den Gesetzen der Anlegung neuer Blätter und Kammern auffallen. Doch wollen wir nicht unterlassen hier die Abweichungen, die diese beiden Fälle aufweisen, hervorzuheben: Bei dem Vegetationspunkt werden die neuen Blätter an der inneren Seite des Folioidensystems angelegt, hier an der äußeren. Bei den Pflanzen haben wir den konstanten Faktor b als die bestimmende Größe angenommen, hier aber ist die Konstanz des Faktors a vorausgesetzt. Die neuen Anlagen seitlicher Sprossungen wurden nicht immer in den am tiefsten gelegenen Lücken angelegt, obwohl das in den meisten Fällen gilt; bei der Kammeranlegung wird diese tiefste Lücke immer bevorzugt. Endlich fanden wir am Stammscheitel freie Stammoberfläche, bei den Schalen sind die Zwischenräume, welche die Folioidenkonstruktionen aufweisen, mit Wandmaterial aufgefüllt.

Ist nun hiermit (bei uniformer Kammeranordnung) die Fortsetzung des vorhandenen Systems als eine mechanische Notwendigkeit erklärt, so erhebt sich zweitens die Frage, wie die ersten Kammern

in eine Lage kamen, welche diesem System nahe kommt, denn es muß die ganze Kammeranordnung durch diesen Umstand bestimmt sein. Diese Überlegung führt uns nochmals zu der Besprechung der Anlegung der Erstlingskammern zurück, die wir bereits früher betrachtet haben, jetzt aber von einem allgemeinen Standpunkt aus erläutern wollen.

Denken wir uns, daß die ersten Kammern mit einer sehr kleinen relativen Breite angelegt werden, dann läßt sich die Anordnung um die Embryonalkammern durch das nebenstehende Schema (Fig. 110) veranschaulichen. In dieser Figur trägt der Embryonalkanal die Zahl 0 und es wurde weiter dem früher erwähnten Umstand Rechnung getragen, daß die neue Kammer immer derart in den zugänglichsten Riefen angelegt wird, daß eine möglichst große Divergenz gegenüber der zuletzt angelegten Kammer erreicht wird.

Fig. 110.



Wenn nun diejenige Kammer, welche bei Fortsetzung unseres Schemas links gegen den Embryonalkanal zu liegen kommt, die Zahl n trägt, und diejenige, welche rechts gegen Kammer 1 zu liegen kommt, also die Nummer $(n-1)$ besitzt, dann liegen die Erstlingskammern derart, daß sie ein Folioidensystem mit dem Kontakt 2 und n beginnen. (Ausnahmsweise kann dies auch das System mit dem Kontakt 2, n und $(2+n)$ sein.) Darin muß nun, wie aus unserer Figur unmittelbar einzusehen ist, n eine ungerade Zahl sein. Der Wert dieser Zahl hängt nur von der relativen Breite der Ansatzstellen ab.

Kommt der Embryonalkanal zweimal in dem Querschnitt vor, so hat man sich bei unserem Schema nur die beiden mit 0 und 1 angedeuteten Höcker als Durchschnitte dieses Kanals zu denken. Die gezogene Schlußfolgerung wird dadurch aber nicht geändert.

In zwei Fällen findet unser Schema à priori keine Anwendung: erstens, wenn die Kammer 1 so breit angelegt wird, daß sie die ganze Embryonalkammer einhüllt und zweitens, wenn diese Kammer 1 mehr als die Hälfte der Embryonalkammer umfaßt. Diese Umstände sind aber so einfach, daß es nach dem früher Gesagten nicht nötig ist, nochmals anzugeben, wie dann annähernd Systeme mit dem Kontakt 0 und 1 oder 1 und 1 eingeleitet werden.

Umfaßt die erste Kammer weniger als die Hälfte der Embryonalkammer, so kann der einfachste Fall auftreten, auf den sich unser Schema bezieht, nämlich derjenige, bei welchem $n=1$ ist. Die Erstlingskammern müssen dann ein System mit dem Kontakt 1 und 2 einleiten, wie man das bei *Triloculina rotunda*, SCHLUMB., (Fig. 96) auch verwirklicht sieht. Bei noch geringerem Wert der relativen Breite der Ansatzstellen kommt dann ein System mit dem Kontakt 1, 2 und 3 zustande.

Der zweite bei unserem Schema mögliche Fall ist der, bei welchem $n=3$ wird, also der Kontakt 2 und 3 resultiert, während bei noch geringerem Wert der Breite ein solches mit dem Kontakt 2, 3 und 5 entsteht.

Als folgendes System läßt sich nun bei kleiner werdender Ansatzstelle dasjenige mit dem Kontakte 2 und 5 erwarten. Wirk-

lich haben wir dieses bei *Sigmoilina Macarovi,* SCHLUMB., (Fig. 102) angetroffen, und man überzeugt sicht leicht, daß die Anordnung der Erstlingskammern unserem Schema ziemlich genau entspricht.

Warum kommt nun aber bei *Pentellina Douvillei* SCHLUMB. (Fig. 101), bei ungefähr gleicher Breite der Ansatzstelle wie bei der letztgenannten Art, das System mit dem Kontakt 3 und 5 zu stande?

Wir haben bereits früher auf die abweichende Form der drei ersten Kammern aufmerksam gemacht, welche diese Art kennzeichnet. Diesem Umstand muß es wahrscheinlich auch zugeschrieben werden, daß diese drei Kammern nicht in Übereinstimmung mit unserem Schema angelegt sind, sodaß Kammer 3 nicht neben Kammer 1 liegt, sondern sich nach dem Embryonalkanal hin verschoben hat. Die übrigen Kammern ordnen sich alle nach den oben aufgestellten Regeln. Wir finden hier also in dem abweichenden Verhalten der Erstlingskammern den Grund für das Auftreten eines anderen Systems.

Auch bei anderen Schalen findet man bisweilen eine Abweichung von unserem Schema; es ist in den meisten Fällen dann aber leicht einzusehen, in welcher Weise dann doch noch ein System auftreten kann, welches einem Folioidensystem mit Kontakten aus der Hauptreihe nahe kommt, wir müssen aber für diese Beispiele auf die Figuren von SCHLUMBERGER verweisen.

Werfen wir nun noch einen Blick auf die Schalen mit diformer Kammeranordnung. Nach dem, was wir über die Schemas für veränderliche Blattstellung gesagt haben, wird es deutlich sein, daß, wenn die Menge ausfließender Sarkode unverhältnismäßig zunimmt, dasselbe Folioidensystem nicht innegehalten werden kann, daß aber, wenn das alte System eines aus der Hauptreihe war, auch das neue ein solches sein muß. Soviel von dem Übergang des Systems mit dem Kontakt 2 und 3 (der quinquelokulinäre Typus) in solche mit niederen Kontakten (die tri-, bi- und monolokulinären Typen).

Wir sind also zu dem wichtigen Schluß gelangt, daß durch zwei Umstände: die Anschlußverhältnisse der ersten Kammern und die relative Breite der Ansatzstellen, das Folioidensystem, welches auftreten muß, völlig bestimmt ist. Aber auch für die Blattstellungen haben wir nachgewiesen, daß das auftretende System bedingt wird durch die Anschlußverhältnisse der ersten Blätter und die relative Breite der Basis der darauffolgenden. In dieser Hinsicht besteht also wieder eine interessante Übereinstimmung zwischen den Verhältnissen an den Vegetationspunkten und der Anlegung der Kammern bei den Miliolinen. Nur sei darauf hingewiesen, daß wir die Anschlußverhältnisse der ersten Blätter als morphologisch gegeben zu betrachten hatten, während wir bei den Miliolinenschalen diese bis zu einem gewissen Grade als eine Folge der Flüssigkeitsgesetze erklären konnten.

Es bleibt nun noch die Besprechung des abweichenden Verhaltens übrig, welches die Schalen mit dem spirolokulinären Typus aufweisen, die wir bis jetzt stillschweigend übergangen haben.

Daß bei den späteren Kammern von den beiden hier abgebildeten *Spiroloculina*-Arten der Sarkodestrom leichter über die flache Rückseite der Kammern abfließt als daneben, ist begreiflich; auch ist deutlich, daß das Seitwärtsfließen des Stroms durch die

scharfen Ecken gehemmt wird. Obwohl sich hier also diese Abweichung aus der Schalenform begreifen läßt, ist dennoch damit nicht alles erklärt. So bleibt die Frage offen, warum bei *Spiroloculina excavata* d'Orb. diese Anordnung bereits unmittelbar bei der ersten Kammer auftritt, und diese nicht wie bei *Spiroloculina inaequilateralis* Schl. durch den Embryonalkanal verschoben wird. Auch ist es nicht klar, warum z. B. bei *Heterillina Guespellensis* Schl. dieser spirolokulinäre Typus für die jüngsten Kammern an Stelle des quinquelokulinären auftritt.

Mögen nun auch manche Fragen ungelöst bleiben, so haben wir doch an der Hand der Rhumblerschen Darlegungen in den Hauptfällen eine Erklärung für die Gesetze des Schalenbaues angeben können, ein Umstand, der besonders darum interessant ist, weil die mechanischen Gründe, auf die sich diese Erklärung stützt, in wichtigen Punkten mit denjenigen übereinstimmen, welche für die Erklärung der Blattstellungsgesetze als Ausgangspunkt dienten.

Tafelerklärung.

Tafel I.

Einfache regelmäßige Systeme tangierender Kreise auf einer abgerollten Kreiszylinderfläche.

Die Hauptspirale rechtsgewunden. Umfang der Zylinderfläche = 5 cm. Der Durchmesser der Kreise variiert und gibt ein Maß für den Wert des Faktors b.

Fig. 1—11. Systeme mit Kontakten aus der Hauptreihe.

Fig. 1. Kontakt 0, 1 und 1. $\alpha = 180^0$, $b = 1$.

Fig. 2. Rechtwinkliger Kontakt 1 und 1. $\alpha = 180^0$, $b = 0{,}70711$.

Fig. 3. Kontakt 1, 1 und 2. $\alpha = 180^0$, $b = 0{,}57735$.

Fig. 4. Rechtwinkliger Kontakt 1 und 2. $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$, $b = 0{,}44721$.

Fig. 5. Kontakt 1, 2 und 3. $\alpha = 128^0\,34'\,37''$, $b = 0{,}37797$.

Fig. 6. Rechtwinkliger Kontakt 2 und 3. $\alpha = \frac{5}{13} \cdot 360^0 = 138^0\,28'$, $b = 0{,}27735$.

Fig. 7. Kontakt 2, 3 und 5. $\alpha = 142^0\,6'\,14''$, $b = 0{,}22942$.

Fig. 8. Rechtwinkliger Kontakt 3 und 5. $\alpha = \frac{13}{34} \cdot 360^0 = 137^0\,39'$, $b = 0{,}17150$.

Fig. 9. Kontakt 3, 5 und 8. $\alpha = 135^0\,55'\,6''$, $b = 0{,}14285$.

Fig. 10. Rechtwinkliger Kontakt 5 und 8. $\alpha = \frac{34}{89} \cdot 360^0 = 137^0\,31'$, $b = 0{,}10600$.

Fig. 11. Kontakt 5, 8 und 13. $\alpha = 138^0\,8'\,22''$, $b = 0{,}08804$.

Fig. 12—17. Systeme mit Kontakten aus Nebenreihen.

Fig. 12. Kontakt 1 und 3 mit vertikal verlaufenden dreizeiligen Kontaktspiralen. $\alpha = \frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$, $b = 0{,}35355$.

Fig. 13. Rechtwinkliger Kontakt 1 und 3. $\alpha = \frac{3}{10} \cdot 360^0 = 108^0$, $b = 0{,}31623$.

Fig. 14. Kontakt 1, 3 und 4. $\alpha = 96^0\,55'$, $b = 0{,}2773$.

Fig. 15. Rechtwinkliger Kontakt 3 und 4. $\alpha = \frac{7}{25} \cdot 360^0 = 100^0\,48'$, $b = 0{,}2$.

Fig. 16. Kontakt 1 und 4 mit vertikal verlaufenden vierzeiligen Kontaktspiralen. $\alpha = \frac{1}{4} \cdot 360^0 = 90^0$, $b = 0{,}258$.

Fig. 17. Kontakt 2 und 5 mit vertikal verlaufenden fünfzeiligen Kontaktspiralen. $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$, $b = 0{,}218$.

Tafel II.

I. Graphische Darstellung der Beziehung zwischen b und α für einfache zylindrische Kugelsäulen. Auf der X-Achse sind die Werte von α, auf der Y-Achse diejenigen von b abgetragen. Die Limitdivergenzen der Hauptreihe und einzelner Nebenreihen sind durch dickere Ordinaten angegeben.

II. Graphische Darstellung der Beziehung zwischen b und α für einfache regelmäßige Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche. Im Übrigen wie I.

Tafel III.

I. Verschiebungskreise des Mittelpunktes von Kreis 1 bei regelmäßigen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche, wenn der Kreismittelpunkt o fest liegt und der Zylinderumfang unverändert bleibt. Umfang der Zylinderfläche = 18 cm (= 360°). Hauptspirale rechtsgewunden.

II. Verschiebungskurven des Mittelpunktes von Kugel 1 bei zylindrischen Kugelsäulen, wenn der Mittelpunkt von Kugel o fest liegt und der Zylinderumfang unverändert bleibt. Sonst wie I.

III. Graphische Darstellung der Beziehung zwischen b und α für die niederen Kontakte aus der Hauptreihe. Auf der X-Achse sind die Werte von α, auf der Y-Achse diejenigen von b abgetragen. Die mit „1 und 2 (Zylinderfläche)“ bezeichnete Kurve und die mit 1 und 1 und 0 und 1 benannten Geraden beziehen sich auf regelmäßige Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche und sind in Darstellung II Tafel II wieder zu finden. Die mit „1 und 2 (Ebene)“ bezeichnete Kurve hat Geltung für ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene. Die beiden Kurven fallen in der Nähe des Punktes 1, 2 und 3 nur scheinbar zusammen.

IV. Graphische Darstellung der Beziehung zwischen α und ψ bei ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Kreiskegelfläche für $a = 0{,}8$ und für $a = 0{,}5$. Auf die X-Achse sind die Werte von α, auf die Y-Achse diejenigen von ψ abgetragen. (Bemerkung: Rechts oben neben 20° steht 0, 1 und 2, dies sollte sein 0, 1 und 1.)

Tafel IV.

Einfache zylindrische Kugelsäulen.

Hauptspirale rechtsgewunden. Der Kugeldurchmesser ist konstant und gleich 5 mm, der Zylinderumfang variiert.

Fig. 1—11. Systeme mit Kontakten aus der Hauptreihe.

Fig. 1. Einzähliger Kontakt 1, $\alpha = 180°$, $b = \infty$.

Fig. 2. Einzähliger Kontakt 1, $\alpha = 180°$, $b = 0{,}637$.

Fig. 3. Kontakt 1 und 2, $\alpha = 180°$, $b = 0{,}368$.

Fig. 4. Kontakt 1 und 2, $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360° = 144°$, $b = 0{,}333$.

Fig. 5. Kontakt 1, 2 und 3, $\alpha = 131° 48' 37''$, $b = 0{,}3063$. Kugelsäule von Delpino.

Fig. 6. Kontakt 2 und 3, $\alpha = \frac{5}{13} \cdot 360° = 138° 28'$, $b = 0{,}250$.

Fig. 7. Kontakt 2, 3 und 5, $\alpha = 141^0\ 51',5$, $b = 0{,}214$.

Fig. 8. Kontakt 3 und 5, $\alpha = \frac{13}{34} \cdot 360^0 = 137^0\ 39'$, $b = 0{,}165$.

Fig. 9. Kontakt 3, 5 und 8, $\alpha = 135^0\ 57'\ 48''$, $b = 0{,}139$.

Fig. 10. Kontakt 5 und 8, $\alpha = \frac{34}{89} \cdot 360^0 = 137^0\ 31'$, $b = 0{,}105$.

Fig. 11. Kontakt 5, 8 und 13, $\alpha = 138^0\ 8'\ 0''$, $b = 0{,}087$.

Fig. 12—16. Systeme mit Kontakten aus Nebenreihen.

Fig. 12. Kontakt 1 und 3 mit vertikal verlaufenden dreizähligen Kontaktspiralen, $\alpha = \frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$, $b = 0{,}292$.

Fig. 13. Kontakt 1 und 3, $\alpha = \frac{2}{7} \cdot 360^0 = 102^0\ 51'$, $b = 0{,}259$.

Fig. 14. Kontakt 1, 3 und 4, $\alpha = 97^0\ 45'$, $b = 0{,}2467$.

Fig. 15. Kontakt 3 und 4, $\alpha = \frac{3}{11} \cdot 360^0 = 98^0\ 11'$, $b = 0{,}239$.

Fig. 16. Kontakt 3, 4 und 7, $\alpha = 102^0\ 6'\ 30''$, $b = 0{,}1592$.

Tafel V.

Photographische Wiedergabe einiger Kugelsäulen.

Fig. 1. Kegelförmige Kugelsäule mit dem Kontakt 1, 2 und 3. $a = 0{,}85$.

Fig. 2. Zylindrische Kugelsäule mit dem Kontakt 1, 2 und 3. Kugelsäule von Delpino. $\alpha = 131^0 48' 37''$, $b = 0{,}3063$. Eine Stecknadel steckt in dem Hohlkern.

Fig. 3. Zylindrische Kugelsäule mit dem Kontakt 2, 3 und 5. $\alpha = 141^0 51',5$, $b = 0{,}214$.

Tafel VI.

Einfache ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene.

Hauptspirale rechtsgewunden. Der Mittelpunkt vom Kreis 0 befindet sich in einer Entfernung von 2,5 cm vom Zentrum.

Fig. 1—9. Systeme mit Kontakten aus der Hauptreihe.

Fig. 1. Kontakt 1 und 2 mit der Divergenz $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$, $a = 0{,}1192$.

Fig. 2. Rechtwinkliger Kontakt 1 und 2, $\alpha = 132^0 46' 47''$, $a = 0{,}251077$. Man vergleiche auch die Textfigur 29 S. 131.

Fig. 3. Kontakt 1, 2 und 3, $\alpha = 128^0 10' 22''$, $a = 0{,}3460$. Man vergleiche auch die Textfigur 30 S. 132.

Fig. 4. Rechtwinkliger Kontakt 2 und 3, $\alpha = 139^0 37' 25''$, $a = 0{,}61184$.

Fig. 5. Kontakt 2, 3 und 5, $\alpha = 142^0 6' 53''$, $a = 0{,}7300$.

Fig. 6. Rechtwinkliger Kontakt 3 und 5, $\alpha = 137^0 26'$, $a = 0{,}8297$.

Fig. 7. Kontakt 3, 5 und 8, $\alpha = 135^0 55' 5''$, $a = 0{,}8914$.

Fig. 8. Rechtwinkliger Kontakt 5 und 8, $\alpha = 137^0 34'$, $a = 0{,}9320$.

Fig. 9. Kontakt 5, 8 und 13, $\alpha = 138^0 8' 22''$, $a = 0{,}9582$.

Fig. 10—15. Systeme mit Kontakten aus Nebenreihen.

Fig. 10. Kontakt 1 und 3 mit geradlinig verlaufenden dreizeiligen Kontaktspiralen, $\alpha = \frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$, $a = 0{,}3820$.

Fig. 11. Rechtwinkliger Kontakt 1 und 3, $\alpha = 104^0\,45'$, $a = 0{,}497$.
Fig. 12. Kontakt 1, 3 und 4, $\alpha = 96^0\,52'\,3''$, $a = 0{,}6161$.
Fig. 13. Rechtwinkliger Kontakt 3 und 4, $\alpha = 101^0\,6'$, $a = 0{,}776$.
Fig. 14. Kontakt 1 und 4 mit geradlinig verlaufenden, vierzeiligen Kontaktspiralen, $\alpha = \frac{1}{4} \cdot 360^0 = 90^0$, $a = 0{,}633$.
Fig. 15. Kontakt 2 und 5 mit geradlinig verlaufenden, fünfzeiligen Kontaktspiralen, $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$, $a = 0{,}74196$.

Tafel VII.

I. Graphische Darstellung der Beziehung zwischen a und α für ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene. Auf der X-Achse sind die Werte von α, auf der Y-Achse diejenigen von a abgetragen. Die Limitdivergenzen der Hauptreihe und einiger Nebenreihen sind durch dickere Ordinaten hervorgehoben. Die Kontaktfälle mit rechtwinkligem Schnitt der Kontaktspiralen sind mit *rw* angedeutet.

II. Graphische Darstellung der Beziehung zwischen a und α bei ähnlichen Systemen tangierender Kreise für drei verschiedene Kegelflächen: 1. für $\psi = 180^0$ (d. h. für eine Ebene; die Kurven, die hierauf Bezug haben, sind also identisch mit denjenigen der Darstellung I dieser Tafel), 2. für $\psi = 60^0$ und 3. für $\psi = 28^0\,57'\,18''$. Sonst wie I.

Tafel VIII.

Verschiebungskurven des Kreismittelpunktes 1 bei ähnlichen Systemen tangierender Kreise auf einer Ebene, wenn der Mittelpunkt von o fest bleibt und sich in einer Entfernung von 10 cm vom Zentrum befindet. Man hat sich diesen Mittelpunkt im Punkte 0 zu denken. Hauptspirale rechtsgewunden. Die Limitdivergenzen der Hauptreihe und einiger Nebenreihen sind durch stärkere Linien angegeben. Die Kontaktfälle mit rechtwinkligem Schnitt der Kontaktspiralen sind mit *rw* bezeichnet.

Tafel IX.

Fig. 1—3. Einfache regelmäßige Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche.

Hauptspirale rechtsgewunden. Diese Figuren schließen sich an die Konstruktionen von Tafel I an.

Fig. 1. Rechtwinkliger Kontakt 0 und 1, $\alpha = \frac{0}{1} \cdot 360^0 = 0^0$, $b = 1$.
Fig. 2. Kontakt 0 und 1 mit der Divergenz $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$, $b = 1$.
Fig. 3. Kontakt 0, 1 und 1, $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 360^0 = 180^0$, $b = 1$. Diese Figur ist identisch mit Fig. 1, Tafel I.

Fig. 4—6. Einfache, ähnliche Systeme tangierender Folioiden.

$\psi = 28^0\,57'\,18''$, $N = \frac{1}{4}$, $\zeta = 90^0$. Diese Figuren schließen sich an die Konstruktionen von Tafel X an.

Fig. 4. Rechtwinkliger Kontakt 0 und 1, $\alpha = \frac{0}{1} \cdot 360^0 = 0^0$, $a = 0{,}17158$.

Fig. 5. Kontakt 0 und 1 mit Divergenz $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$, $a = 0{,}1985$.

Fig. 6. Kontakt 0, 1 und 1, $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 360^0 = 180^0$, $a = 0{,}2167$.

Fig. 7—9. Verschiedene Gestalten der Folioide.

Fig. 7. Gestalt der Folioide für den Fall $\psi = 60^0$, $\left(N = \frac{1}{2},\ \zeta = 180^0\right)$ und $\omega' = \zeta$ ist. (Siehe S. 171.)

Fig. 8. Gestalt der Folioide für den Fall $\psi = 97^0 11'$ $\left(N = \frac{3}{4},\ \zeta = 270^0\right)$ und $d = r$ ist. (Siehe S. 171.)

Fig. 9. Gestalt der Folioide für den Fall $\psi = 60^0$, $\left(N = \frac{1}{2},\ \zeta = 180^0\right)$ und $d = \frac{1}{2}\, r$ ist. (Siehe S. 171.)

Tafel X.

Einfache ähnliche Systeme tangierender Folioiden.

Für alle Figuren: $\psi = 28^0 57' 18''$, $N = \frac{1}{4}$, $\zeta = 90^0$. Hauptspirale rechtsgewunden.

Fig. 1—9. Systeme mit Kontakten aus der Hauptreihe.

Fig. 1. Rechtwinkliger Kontakt 1 und 1, $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 360^0 = 180^0$, $a = 0{,}4559$.

Fig. 2. Kontakt 1, 1 und 2, $\alpha = \frac{1}{2} . 360^0 = 180^0$, $a = 0{,}625$.

Fig. 3. Rechtwinkliger Kontakt 1 und 2, $\alpha = 143^0 30'$, $a = 0{,}729$.

Fig. 4. Kontakt 1, 2 und 3. $\alpha = 128^0 30'$, $a = 0{,}823$.

Fig. 5. Rechtwinkliger Kontakt 2 und 3, $\alpha = 138^0 30'$, $a = 0{,}886$.

Fig. 6. Kontakt 2, 3 und 5, $\alpha = 142^0 6'$, $a = 0{,}929$.

Fig. 7. Rechtwinkliger Kontakt 3 und 5, $\alpha = 137^0 39'$, $a = 0{,}955$.

Fig. 8. Kontakt 3, 5 und 8, $\alpha = 135^0 55'$, $a = 0{,}972$.

Fig. 9. Rechtwinkliger Kontakt 5 und 8, $\alpha = 137^0 31'$, $a = 0{,}9825$.

Fig. 10—15. Systeme mit Kontakten aus Nebenreihen.

Fig. 10. Kontakt 1 und 3 mit geradlinig verlaufenden dreizeiligen Kontaktspiralen, $\alpha = \frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$, $a = 0{,}829$.

Fig. 11. Rechtwinkliger Kontakt 1 und 3, $\alpha = 107^0 50'$, $a = 0{,}854$.

Fig. 12. Kontakt 1, 3 und 4, $\alpha = 96^0 55'$, $a = 0{,}901$.

Fig. 13. Rechtwinkliger Kontakt 3 und 4, $\alpha = 100^0 48'$, $a = 0{,}939$.

Fig. 14. Kontakt 1 und 4 mit geradlinig verlaufenden vierzeiligen Kontaktspiralen, $\alpha = \frac{1}{4} \cdot 360^0 = 90^0$, $a = 0{,}903$.

Fig. 15. Kontakt 2 und 5 mit geradlinig verlaufenden fünfzeiligen Kontaktspiralen, $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 144^0$, $a = 0{,}942$.

Tafel XI.

Graphische Darstellung der Beziehung zwischen α, ψ und a für einfache ähnliche Systeme tangierender Kreise auf Kegelflächen. Auf der X-Achse sind die Werte von α, auf der Y-Achse diejenigen von ψ, auf der Z-Achse diejenigen von a abgetragen. Es sind nur die Kontaktfälle von 0 und 1, 1 und 1, 1 und 2, 1 und 3 in Betracht gezogen. Für die Erklärung siehe Text S. 155 u. f.

Tafel XII.

Mehrfache Systeme.

Fig. 1—3. Mehrfache regelmäßige Systeme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche.

Umfang der Zylinderfläche 5 cm.

Fig. 1. Dekussation. Zweifaches System mit dem rechtwinkligen Kontakt 1 und 1 als Grundsystem. $b = 0{,}3535$.

Fig. 2. Dreizählige alternierende Quirle. Dreifaches System mit dem rechtwinkligen Kontakt 1 und 1 als Grundsystem. $b = 0{,}2357$.

Fig. 3. Fünfzählige alternierende Quirle. Fünffaches System mit dem rechtwinkligen Kontakt 1 und 1 als Grundsystem. $b = 0{,}1414$.

Fig. 4. Gedrehte zweizählige Quirle. Zweifaches System mit dem rechtwinkligen Kontakt 1 und 2 als Grundsystem. $b = 0{,}2236$.

Fig. 5—8. Mehrfache ähnliche Systeme tangierender Kreise auf einer Ebene.

Der Mittelpunkt vom Kreise 0 liegt konstant in einer Entfernung von 2,5 cm vom Zentrum.

Fig. 5. Wie Fig. 1, $a = 0{,}2079$.

Fig. 6. Wie Fig. 2, $a = 0{,}3509$.

Fig. 7. Wie Fig. 3, $a = 0{,}5335$.

Fig. 8. Wie Fig. 4, $a = 0{,}503$.

Fig. 9—12. Mehrfache ähnliche Systeme tangierender Folioiden.

Fig. 9. Wie Fig. 1 und 5, $a = 0{,}6752$.

Fig. 10. Wie Fig. 2 und 6, $a = 0{,}7697$.

Fig. 11. Wie Fig. 3 und 7, $a = 0{,}8546$.

Fig. 12. Wie Fig. 4 und 8, $a = 0{,}862$.

Tafel XIII.

Übergangssysteme tangierender Kreise auf einer Kreiszylinderfläche.

Der Zylinderumfang = 5 cm. Die Kreise, welche das ursprüngliche (regelmäßige) System bilden, sind einfach; diejenigen, welche das neue (annähernd regelmäßige) bilden, zweifach schraffiert.

Fig. 1. Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 1 und 1 in denjenigen 1 und 2. Der Wert von b ändert sich von 0,71 in 0,45. Ein einziger Übergangskreis: 2.

Fig. 2. Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 1 und 2 in denjenigen 2 und 3. Der Wert von b ändert sich von 0,45 in 0,28. Zwei Übergangskreise: 3 und 4.

Fig. 3. Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 3 und 5 in denjenigen 5 und 8. Der Wert von b ändert sich von 0,17 in 0,11. Fünf Übergangskreise: 8—12.

Fig. 4. Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 1 und 1 in denjenigen 2 und 3. Der Wert von b ändert sich von 0,71 in 0,28. Zwei Übergangskreise: 2 und 4.

Fig. 5. Übergang des rechtwinkligen Kontaktes 1 und 2 in denjenigen 2 und 3. Der Wert von b ändert sich von 0,45 in 0,17. Sechs Übergangskreise: 3—8.

Fig. 6. Übergang der Dekussation in den rechtwinkligen Kontakt 2 und 3. Der Wert von b ändert sich von 0,35 in 0,28. Ein einziger Übergangskreis: 2'.

Fig. 7. Übergang der Dekussation in den dreizähligen Quirl. Der Wert von b ändert sich von 0,35 in 0,24. Zwei Übergangskreise 1 und 1'.

Tafel XIV.

Übergangssysteme tangierender Kreise auf einer abgerollten Kreiskegelfläche und tangierender Folioiden.

Für alle Figuren ist $\psi = 28^0\ 57'\ 18''$, $N = \frac{1}{4}$, $\zeta = 90^0$.

Fig. 1 und 2 entsprechen Fig. 1 Tafel XIII.

Fig. 3 und 4 entsprechen Fig. 2 Tafel XIII.

Fig. 5 und 6 entsprechen Fig. 3 Tafel XIII.

Fig. 7. System der Kontaktspiralen aus Fig. 6. Die Punkte, in welchen Verzweigung von Kontaktspiralen stattfindet, sind durch kleine Kreise markiert.

Tafel XV.

Übergangssysteme tangierender Kreise auf einer abgerollten Kreiskegelfläche und tangierender Folioiden.

Für alle Figuren ist $\psi = 28^0\ 57'\ 18''$, $N = \frac{1}{4}$, $\zeta = 90^0$.

Fig. 1 und 3 entsprechen Fig. 6 Tafel XIII.

Fig. 2 und 4 entsprechen Fig. 7 Tafel XIII.

Tafel XVI.

Einjährige Stengel von *Euphorbia Lathyris*.

Aufnahme im Monat September. Die Stengel sind in schiefer Richtung von oben aufgenommen.

Fig. 1. Stengel mit genau dekussierter Blattstellung.

Fig. 2. Die Änderung der Dekussation in dem dreizähligen Quirl wird gerade sichtbar. Die oberen Blätter sind teilweise abgeschnitten. Das erste nicht abgeschnittene Blatt der oberen Reihe ist ein „gespaltenes".

Fig. 3 und 4. (Beide Figuren stellen dieselbe Pflanze dar.) Am unteren Teil die Dekussation, am oberen der dreizählige Quirl.

Fig. 5 und 6. (Beide Figuren stellen denselben Stengel dar.) Am unteren Teil die Dekussation, am oberen eine Blattstellung mit fünf stark ins Auge fallenden, gewundenen Spiralen. (Der Vegetationspunkt dieses Teiles zeigt den Kontakt 2 und 3.)

Druck von Bernhard Vopelius, Jena.

Berichtigungen.

S. 20, Z. 14 von oben steht: $\{a_1, a_2, a_3 \ldots . a_{q-1}, a_{q-1} - 1, 1\}$
lies: $\{a_1, a_2, a_3 \ldots . a_{q-1}, a_q - 1, 1\}$.

S. 47, Z. 1 von unten steht: $p, q, p+q, p+2p$,
lies: $p, q, p+q, p+2q$.

S. 105, Z. 8 von oben steht: $mn\,\alpha - \measuredangle_m \cdot 360^0 \pm 360^0$,
lies: $mn\,\alpha - n \measuredangle_m \cdot 360^0 \pm 360^0$.

S. 136, Z. 11 von oben steht: die Differenz,
lies: die größte Differenz.

S. 238, Z. 21 von oben steht: diese Fälle,
lies: die erstgenannten Fälle.

S. 261, Z. 1 und Z. 4 von oben steht: b_1, lies: $\frac{b_2}{b_1}$.

S. 266, Z. 3 von oben steht: Einkerbungen der ersten Art,
lies: Einkerbungen der zweiten Art.

S. 266, Z. 4 von oben steht: eine solche der zweiten Art,
lies: eine solche der ersten Art.

S. 274, Z. 12 von oben steht: Kotyledonarscheibe,
lies: Kotyledonarscheide.

S. 282, Z. 3 von oben steht: *Callithris,*
lies: *Callitris.*

Fig 1.

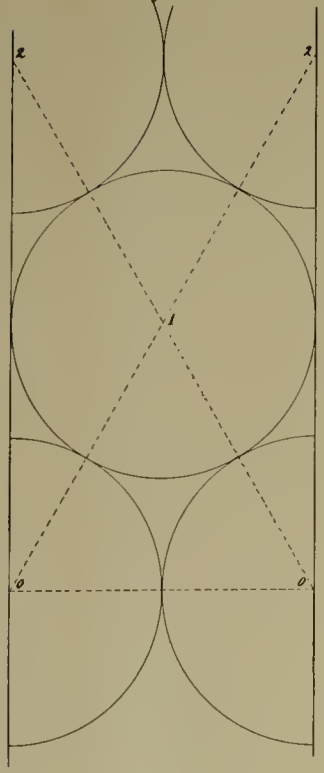


Fig 2.

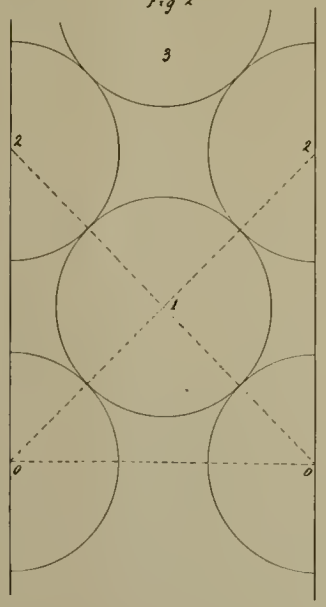


Fig 3.

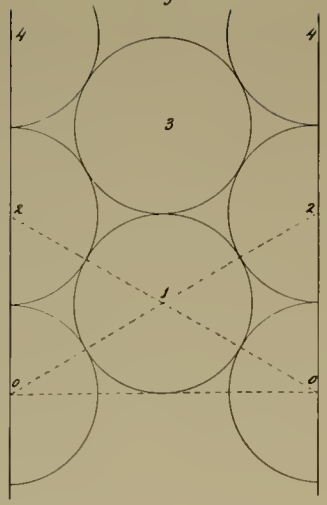


Fig 4.

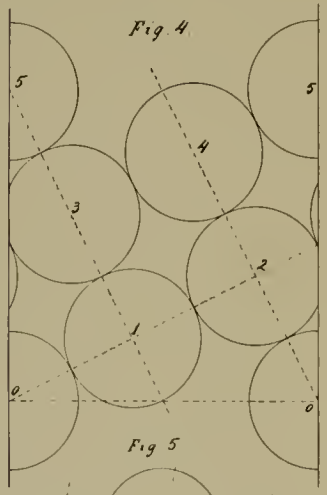


Fig 5.

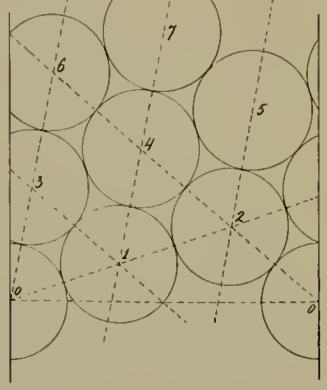


Fig 6.

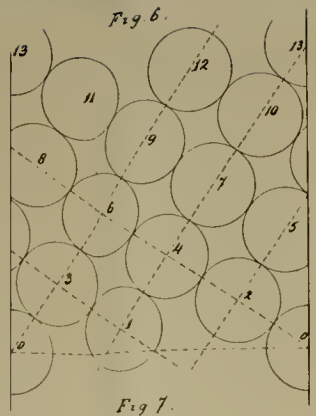


Fig 7.

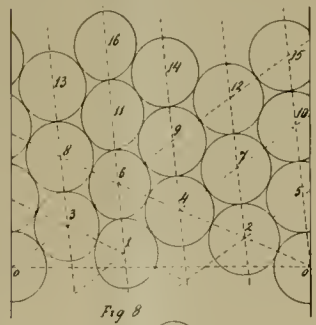


Fig 8.

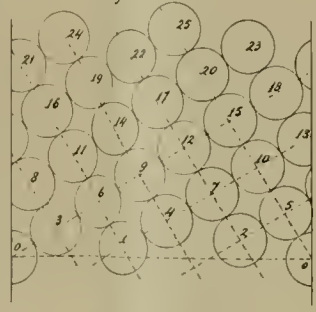


Fig 9.

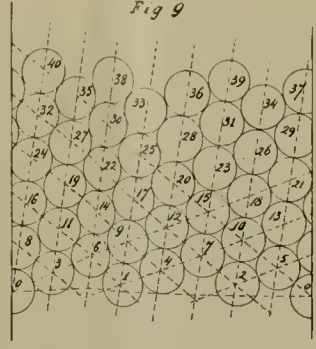


Fig 10.

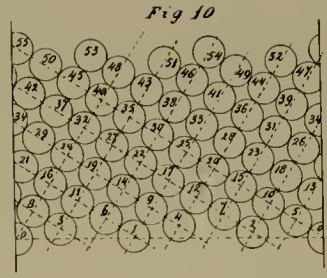


Fig 11.

Fig 12.

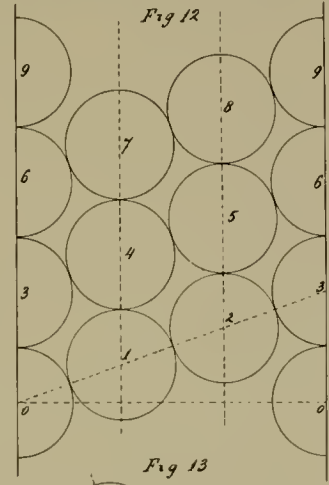


Fig 13.

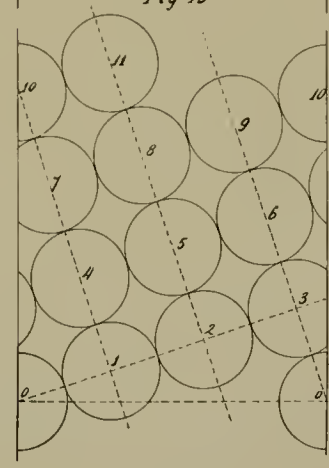


Fig 14.

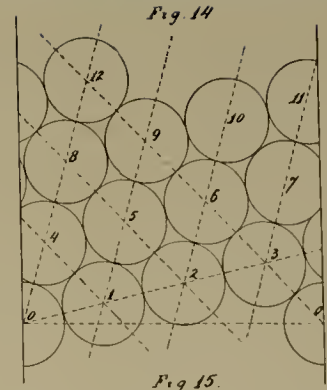


Fig 15.

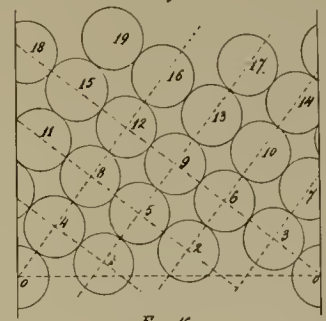


Fig 16.

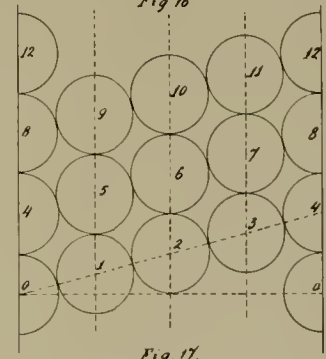
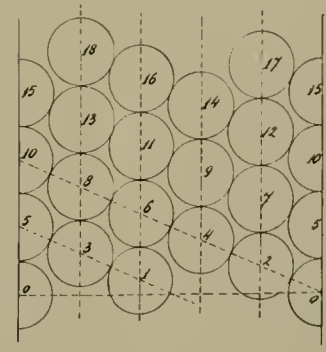


Fig 17.



Verlag von Gustav Fischer, Jena.

Fig. 14.

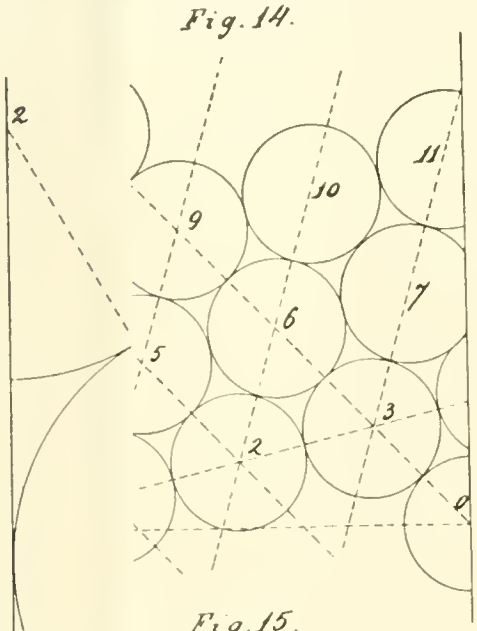


Fig. 15.

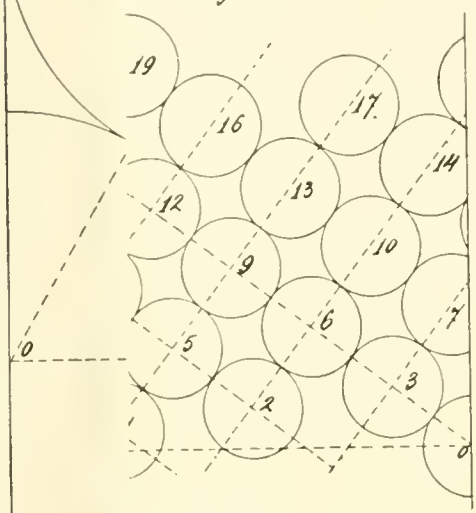


Fig. 16.

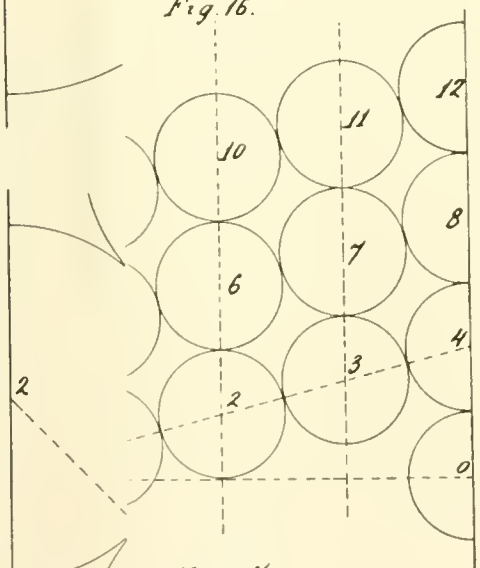
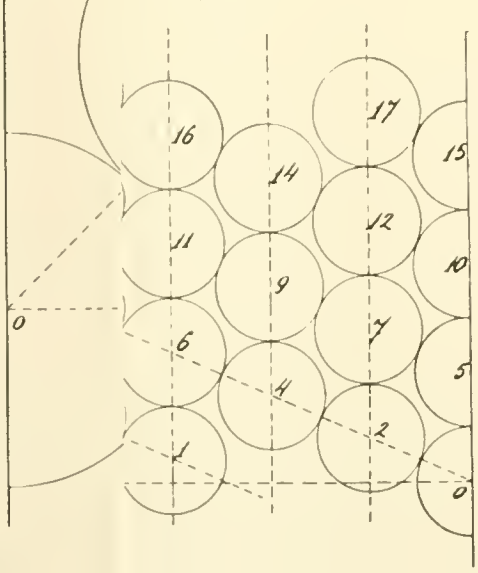
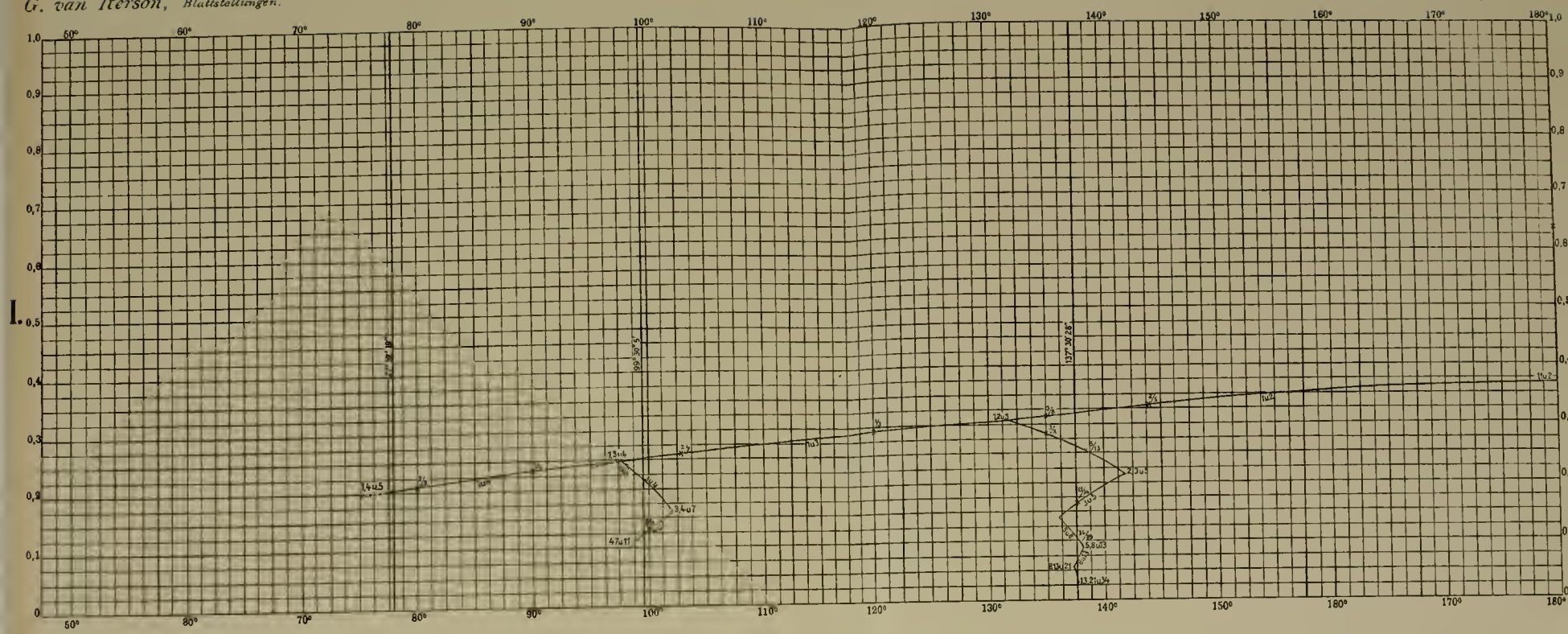
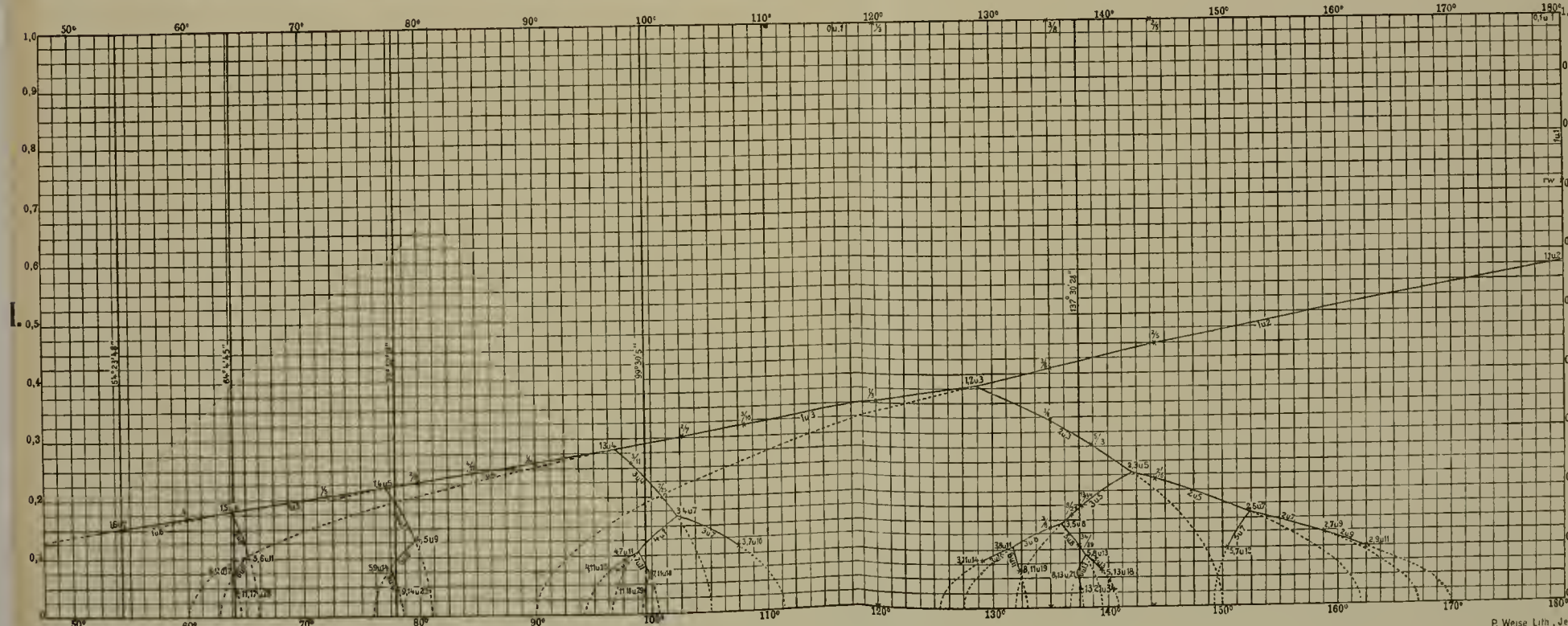


Fig. 17.

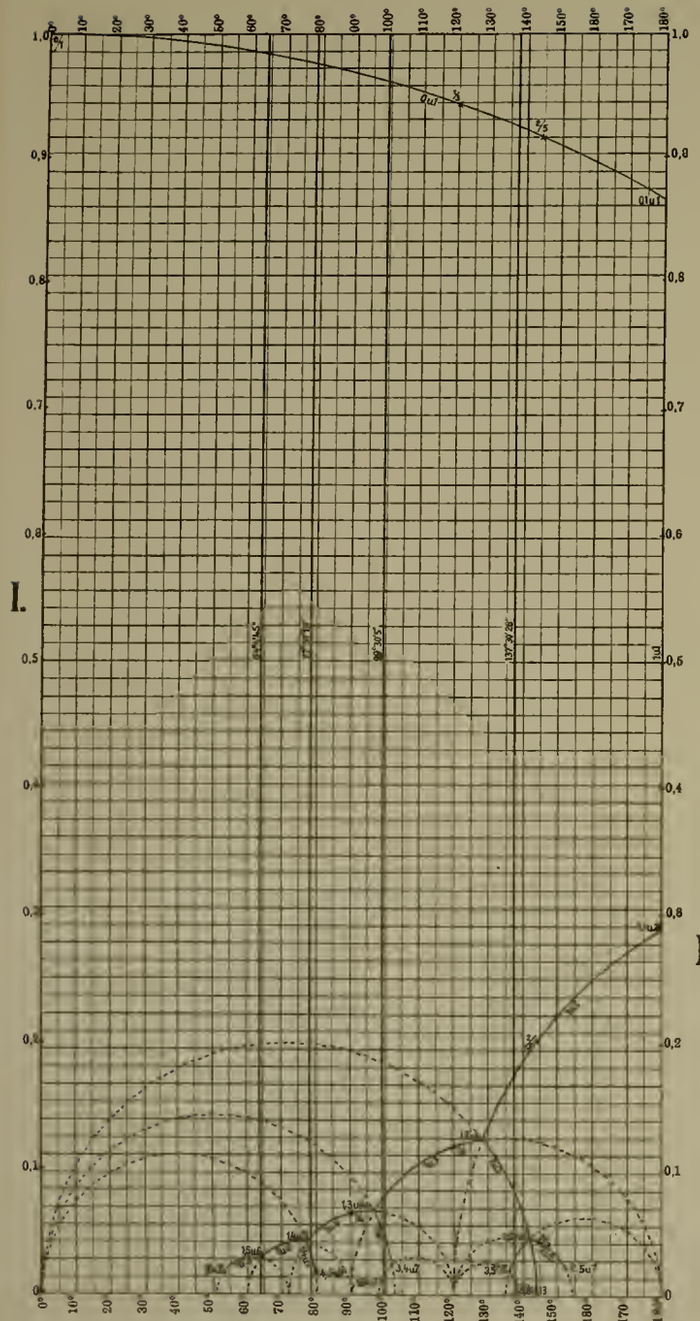




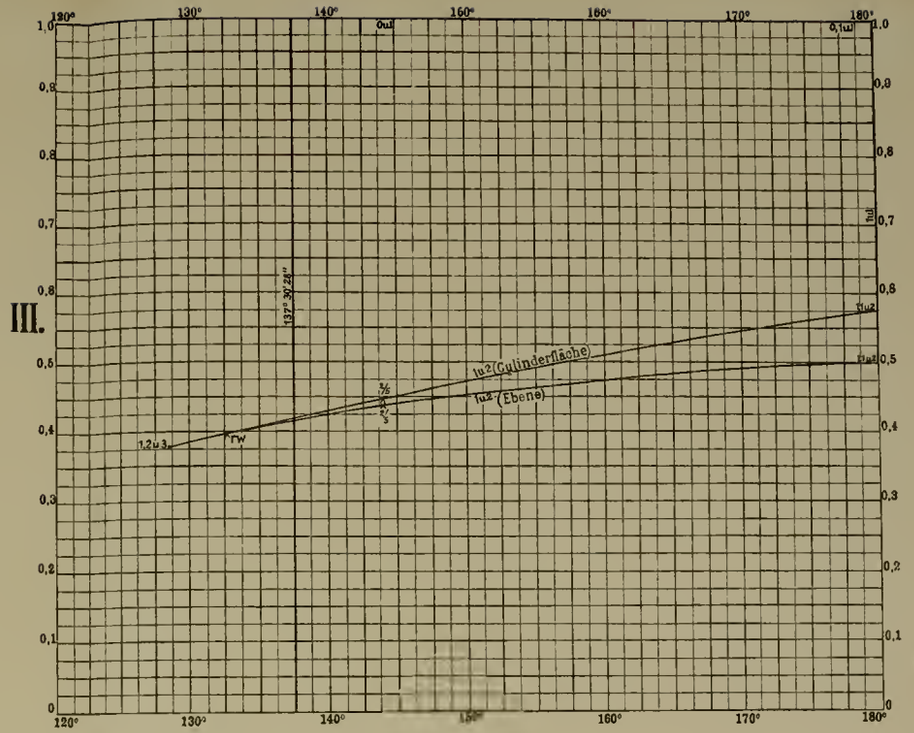


Verlag von Gustav Fischer, Jena

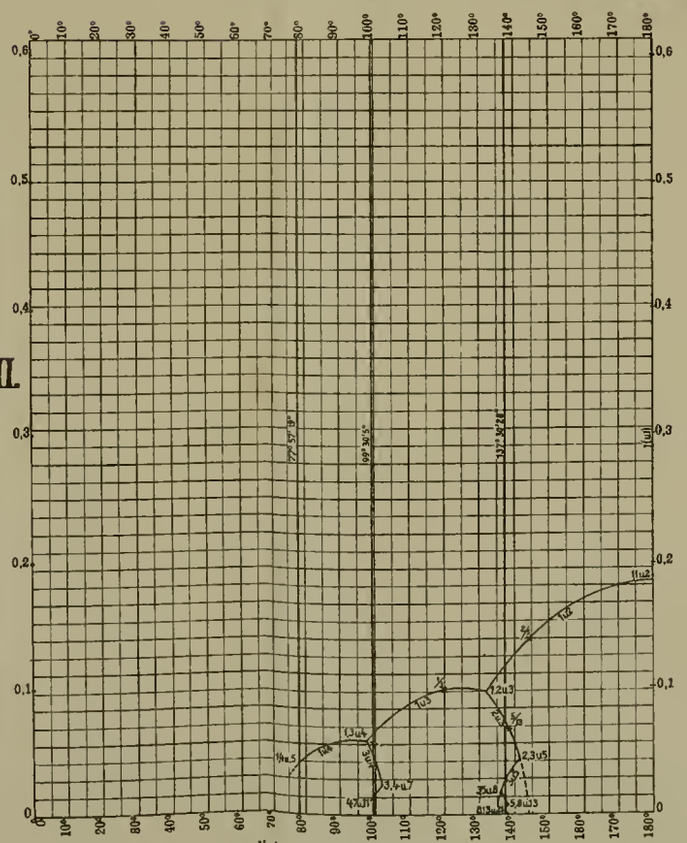
P. Weise Lith., Jena.



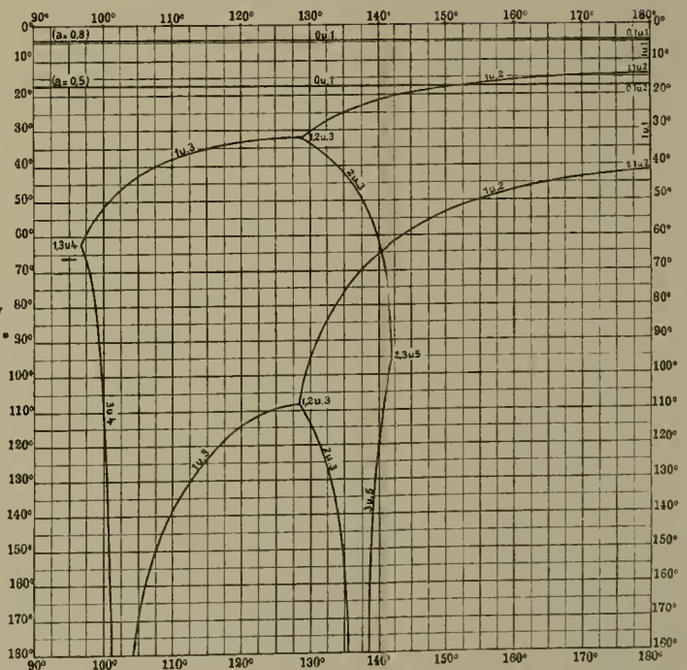
I.



III.



II.



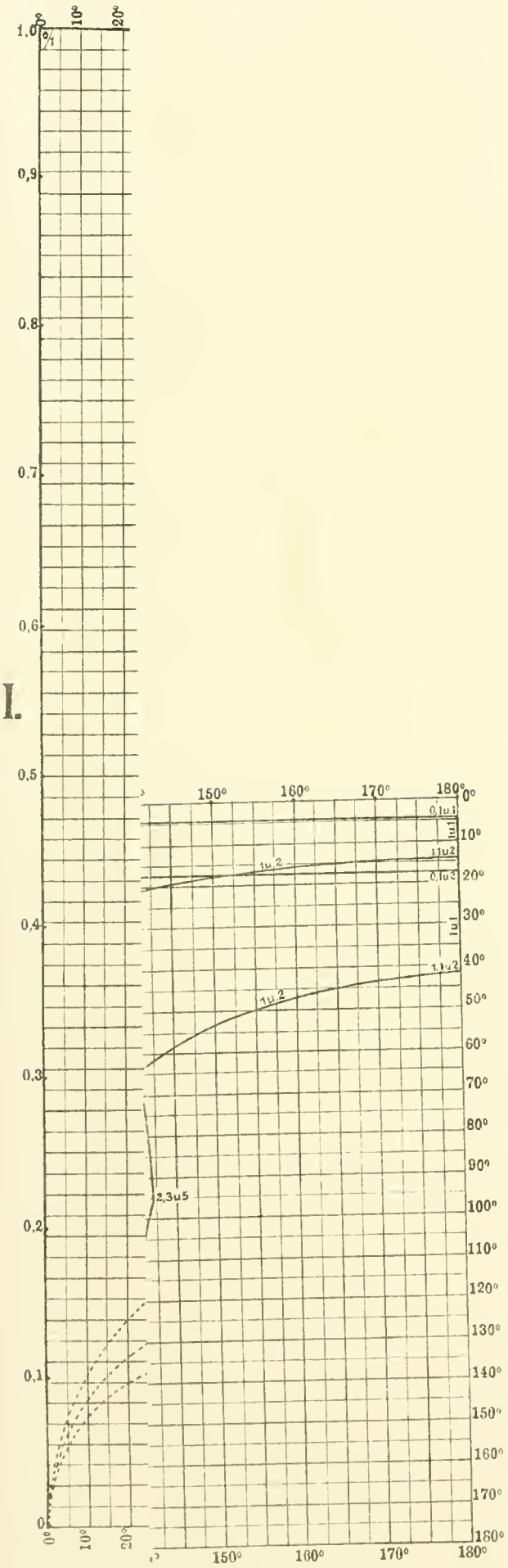
IV.

Verlag von Gustav Fischer, Jena.

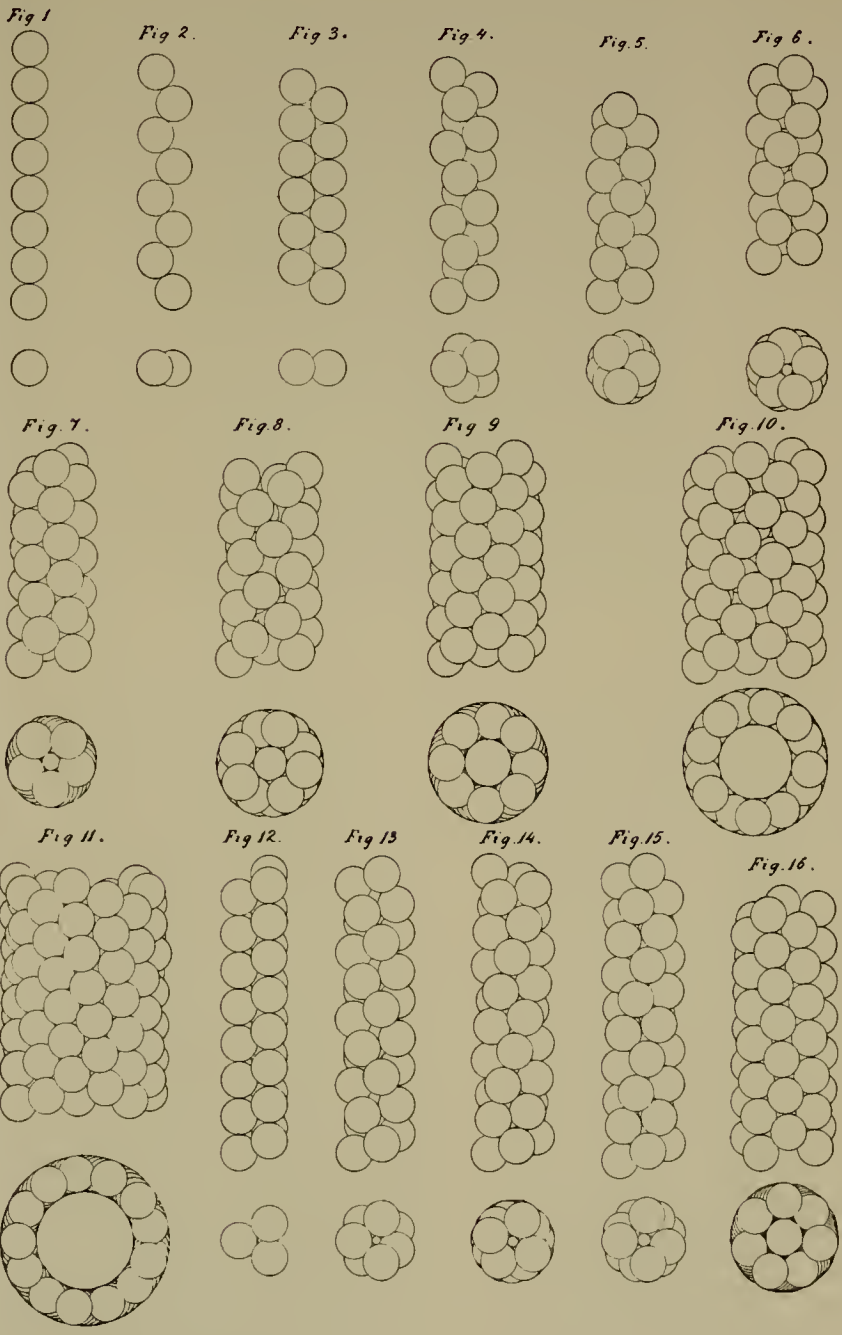
P. Weise, Lith., Jena

Taf. III.

I.



P. Weise, Lith., Jena.



Verlag von Gustav Fischer, Jena.

Fig. 1.

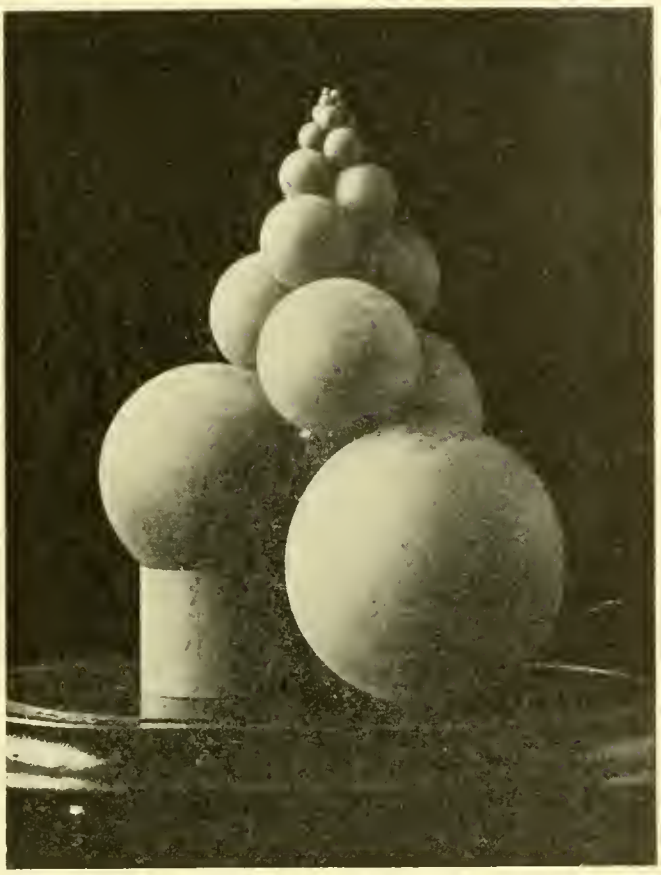


Fig. 2.

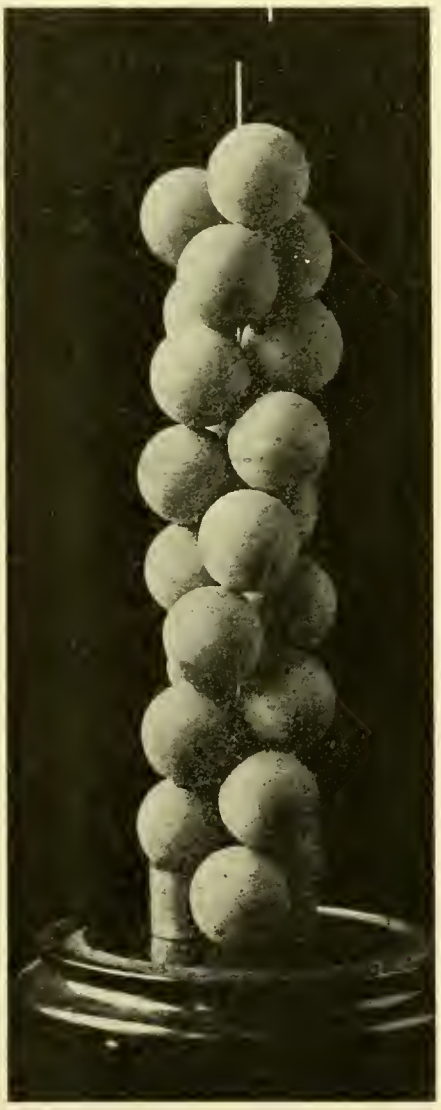
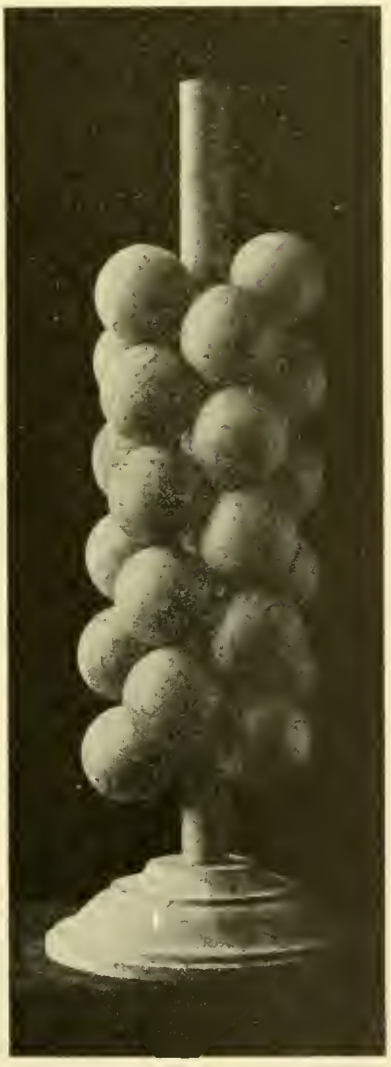


Fig. 3.



Verlag von Gustav Fischer, Jena.

Fig. 1.

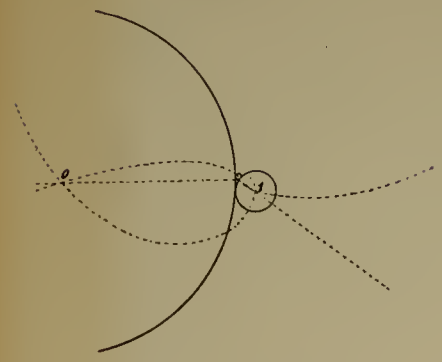


Fig. 2.

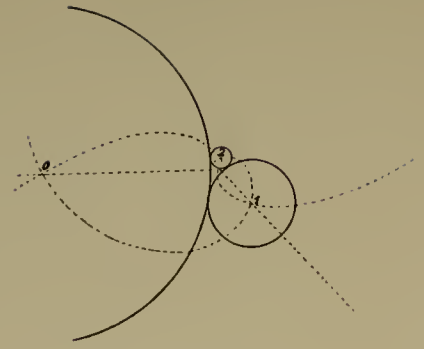


Fig. 3.

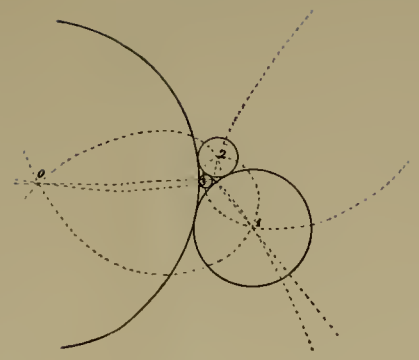


Fig. 4.

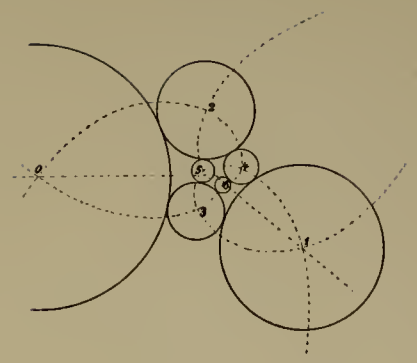


Fig. 5.

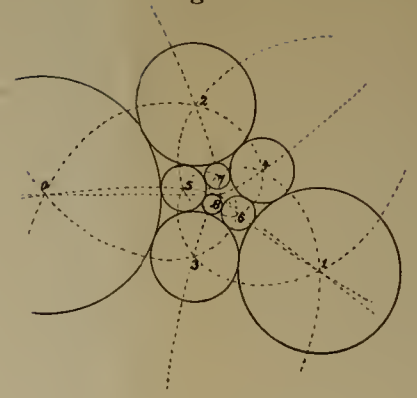


Fig. 6.

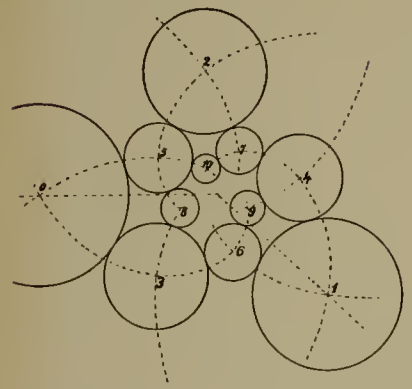


Fig. 7.

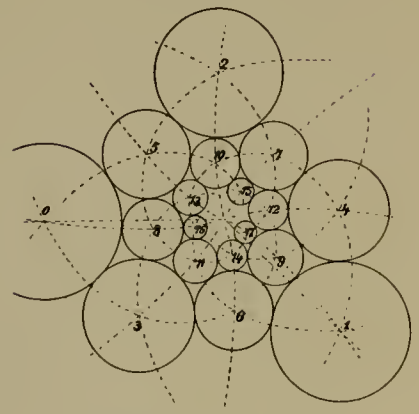


Fig. 8.

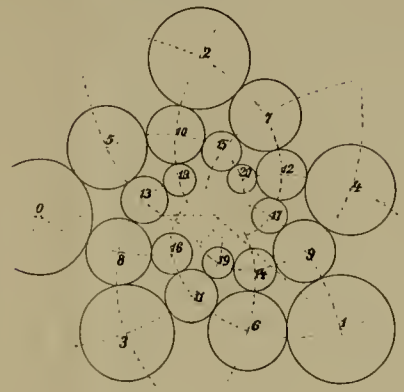


Fig. 9.

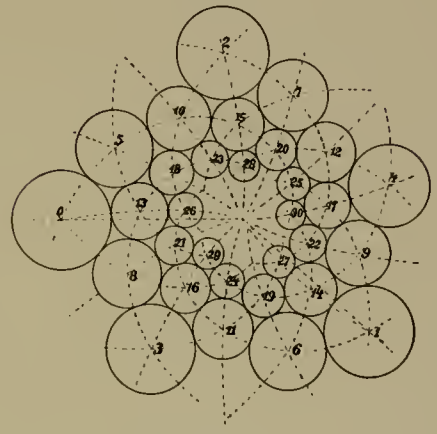


Fig. 10.

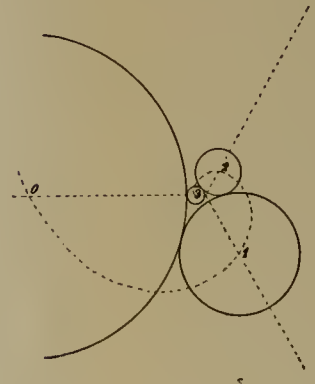


Fig. 11.

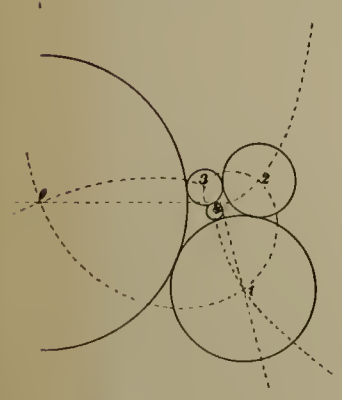


Fig. 12.

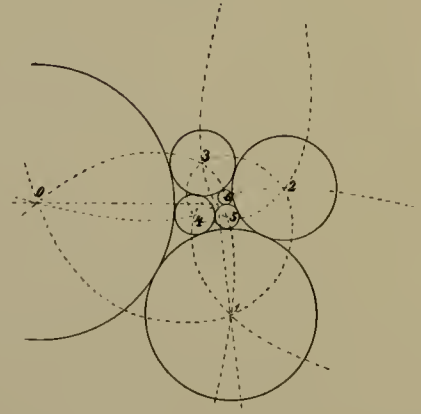


Fig. 13.

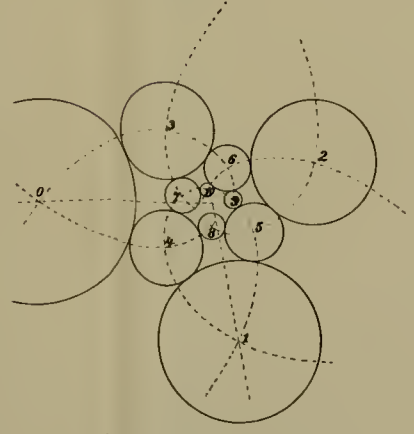


Fig. 14.

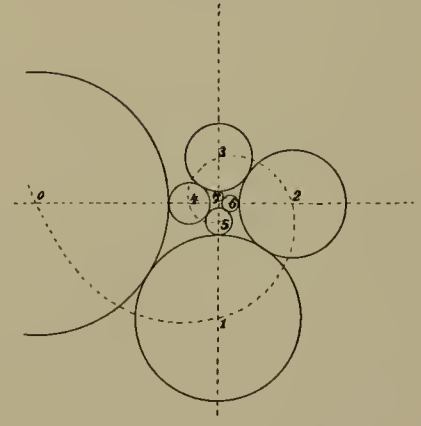
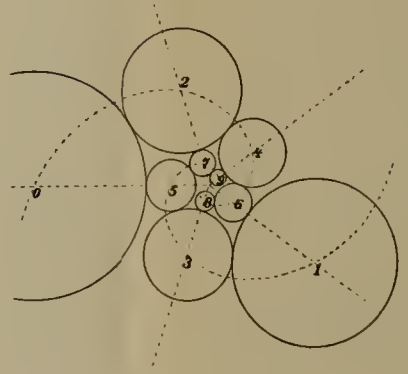


Fig. 15.



Verlag von Gustav Fischer, Jena.

Fig. 5.

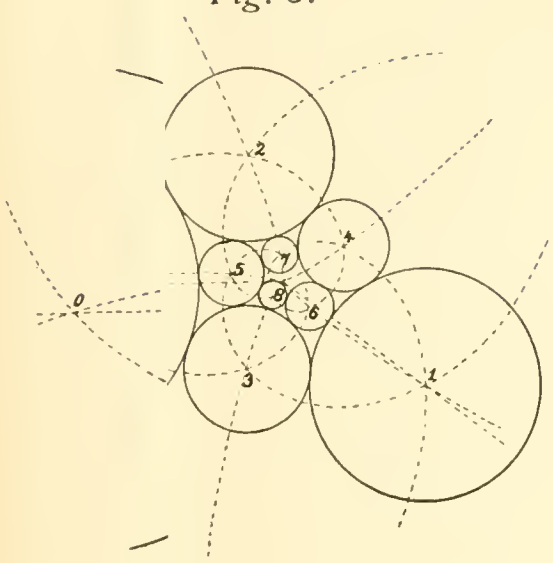


Fig. 10.

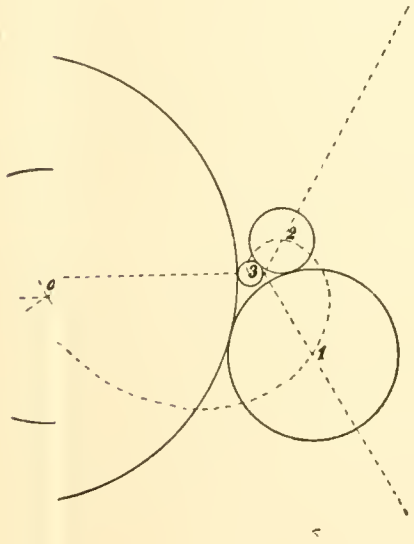
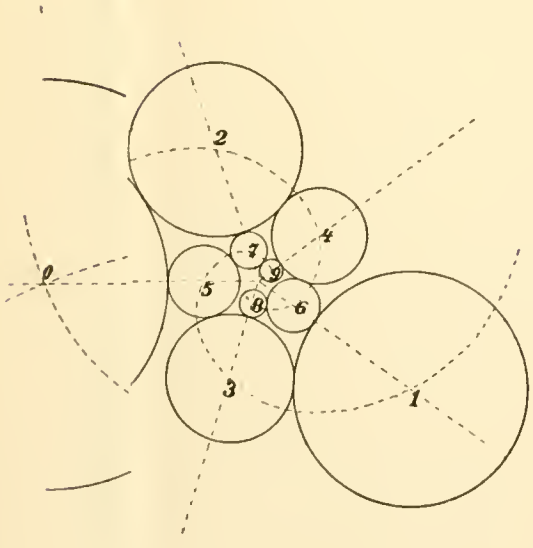
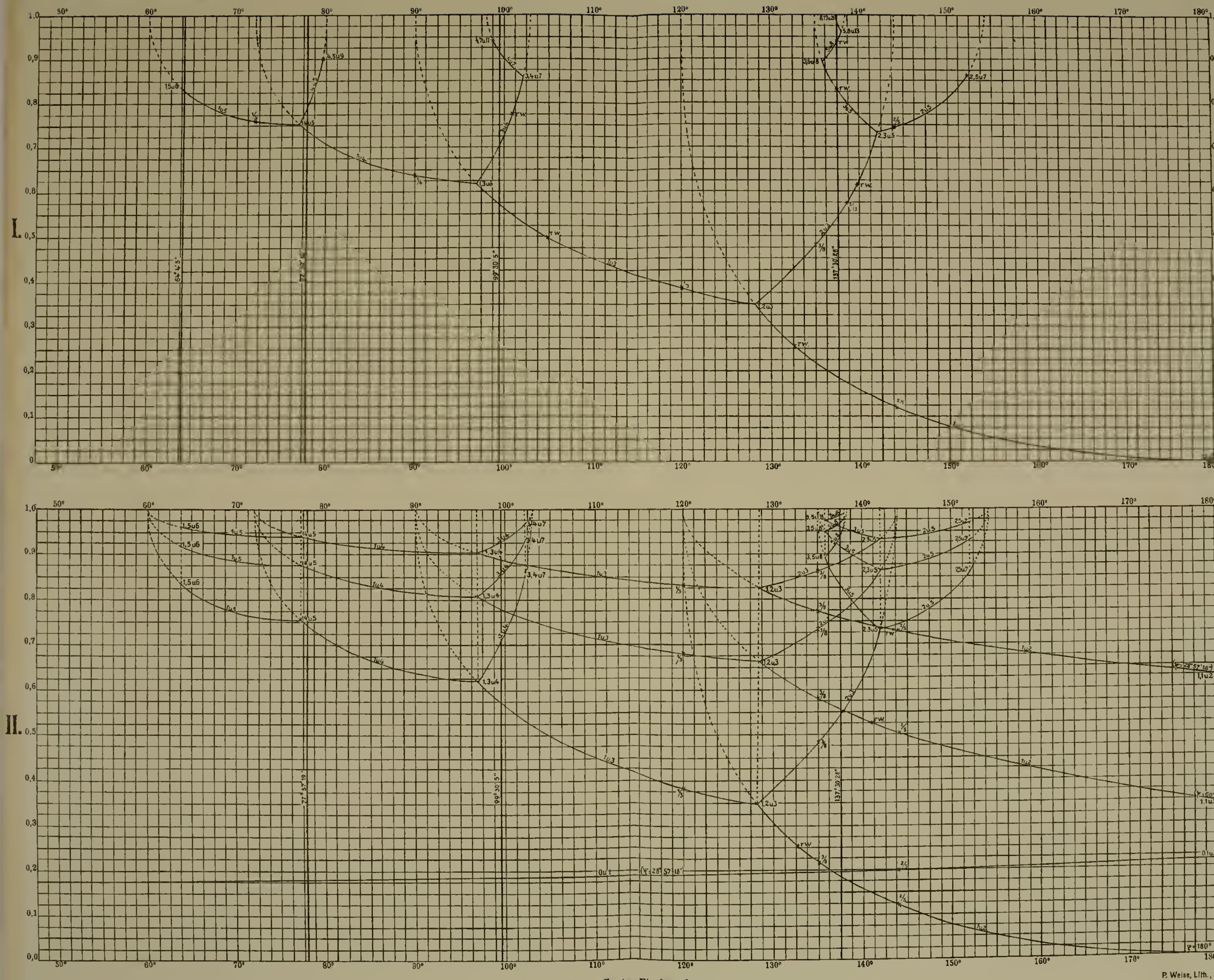


Fig. 15.



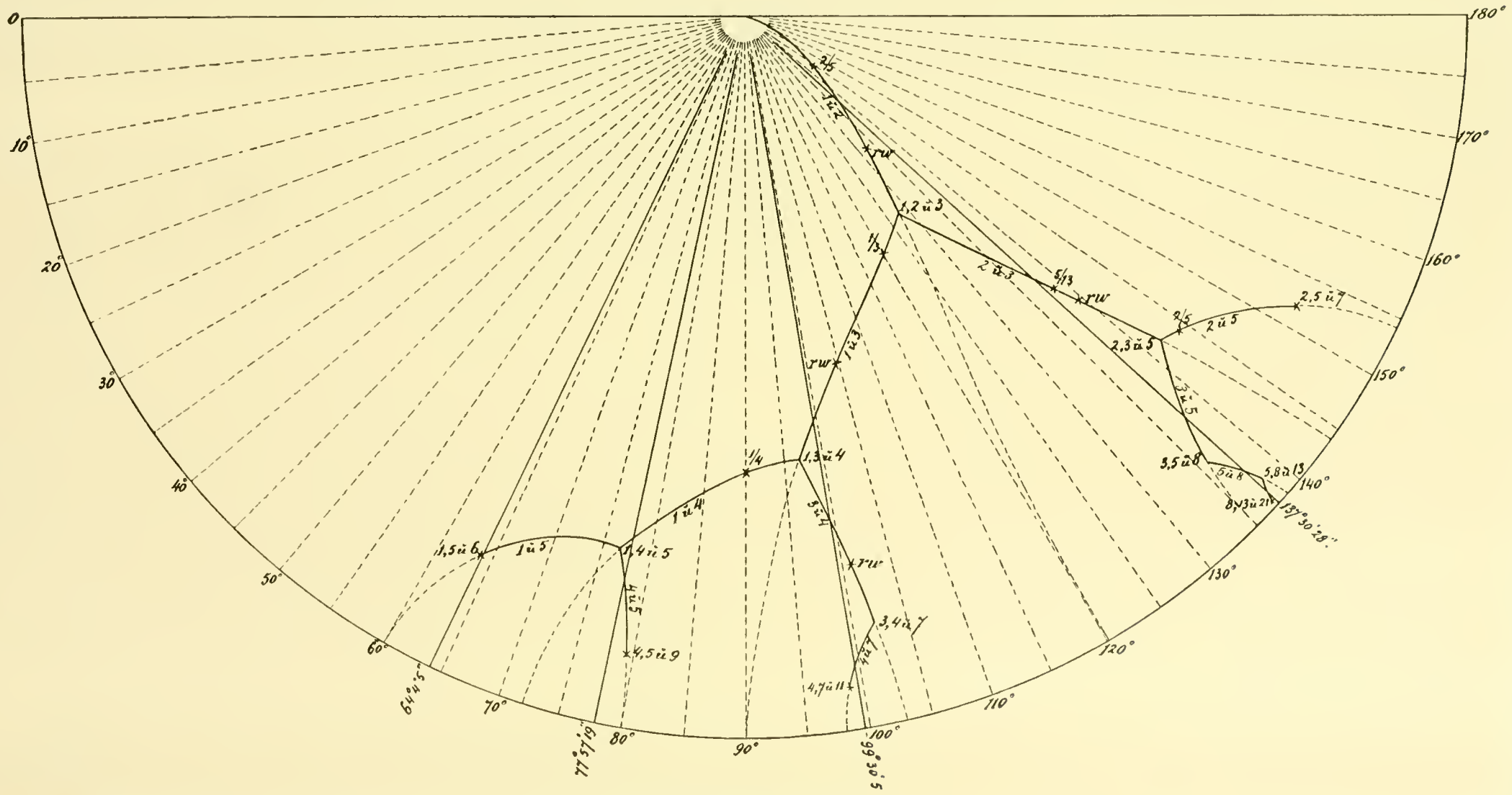
I.

II.



Verlag von Gustav Fischer, Jena.

P. Weise, Lith., Jena.



Verlag von Gustav Fischer, Jena.

Fig. 4.

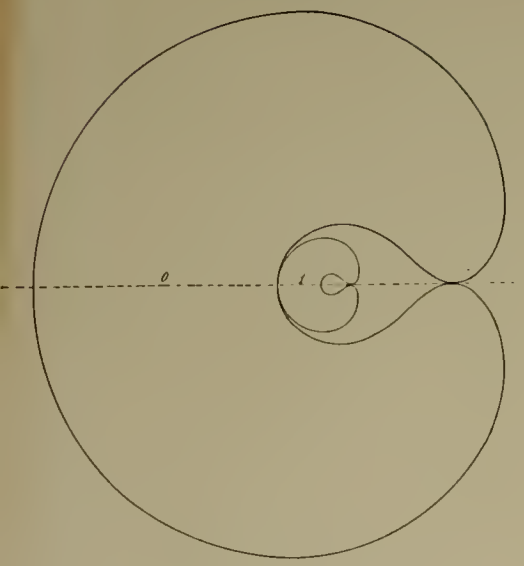


Fig. 5.

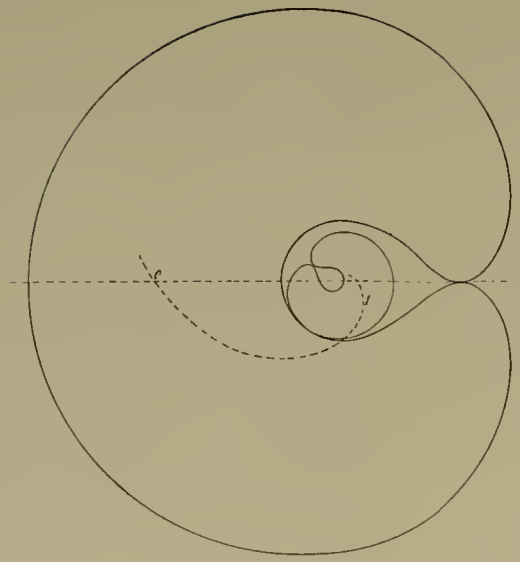


Fig. 6.

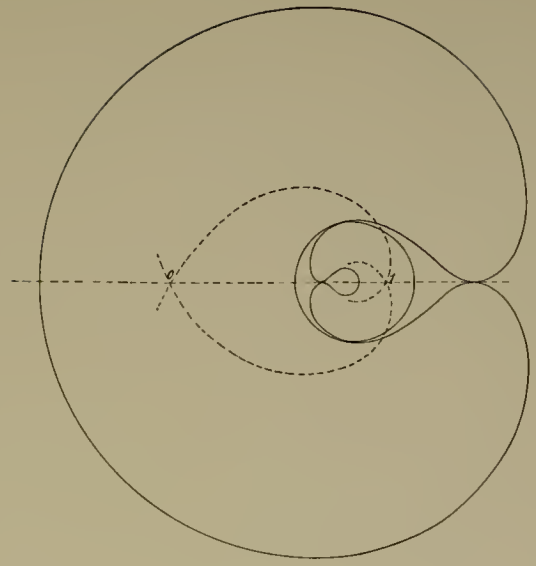


Fig. 7.

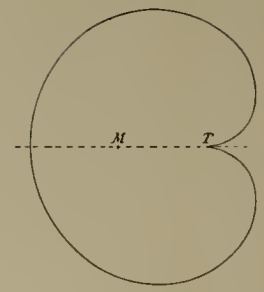


Fig. 1.

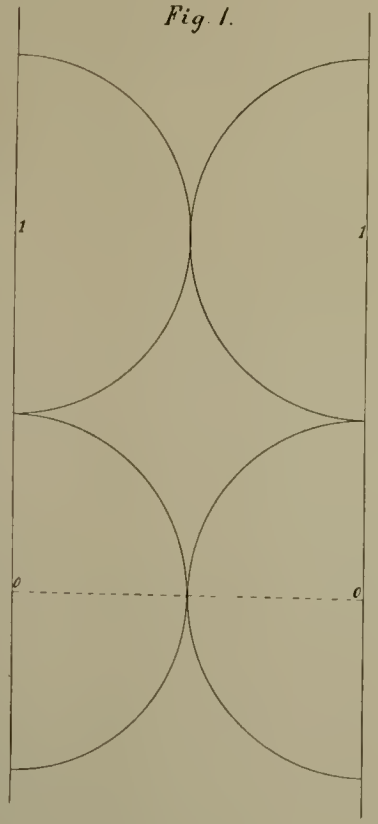


Fig. 2.

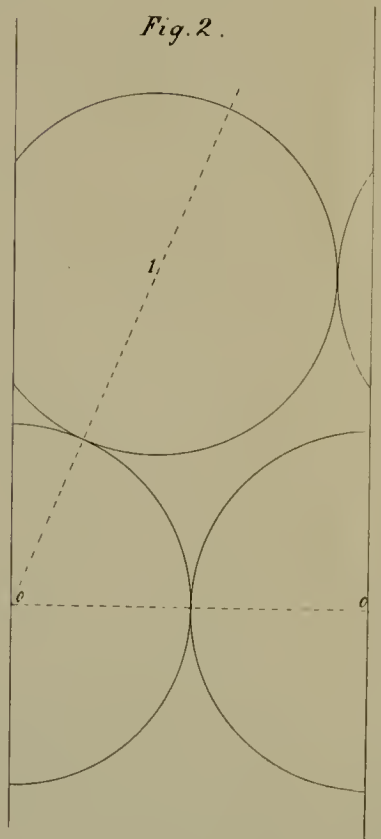


Fig. 3

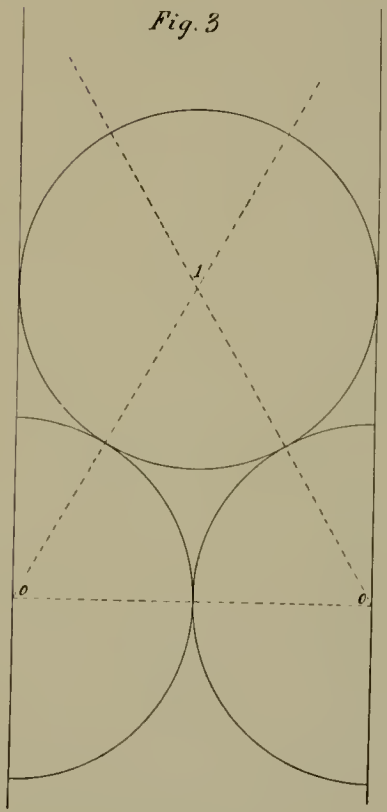


Fig. 8.

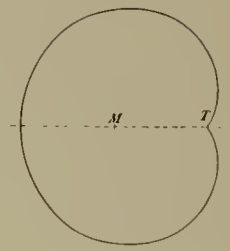
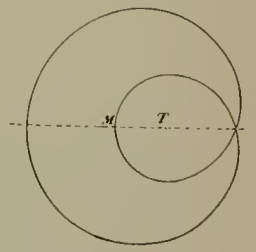


Fig. 9.



Verlag von Gustav Fischer, Jena.

Fig. 1.

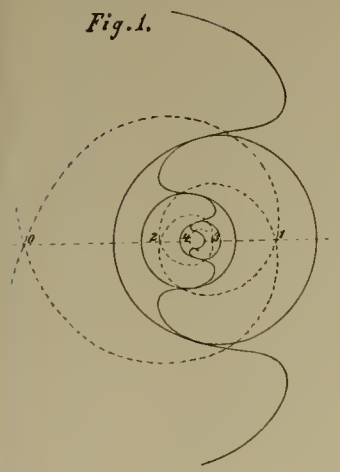


Fig. 2.

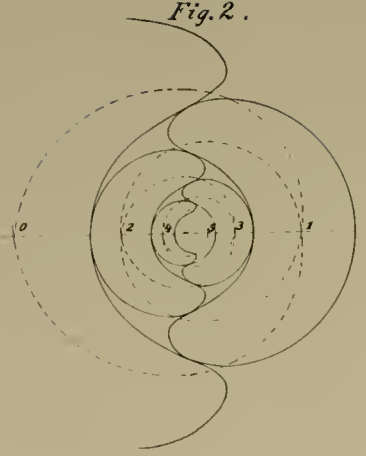


Fig. 3.

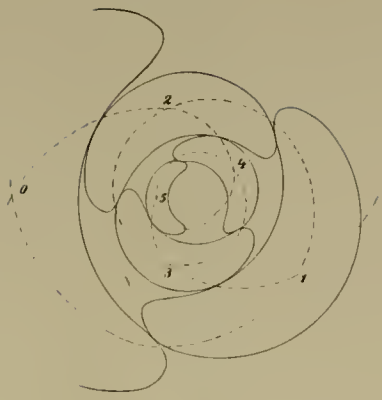


Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

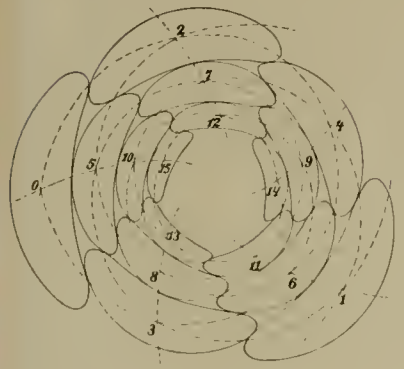


Fig. 7.

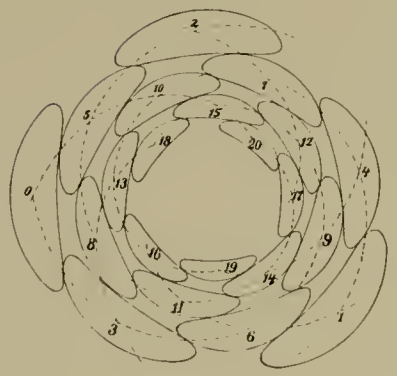


Fig. 8.

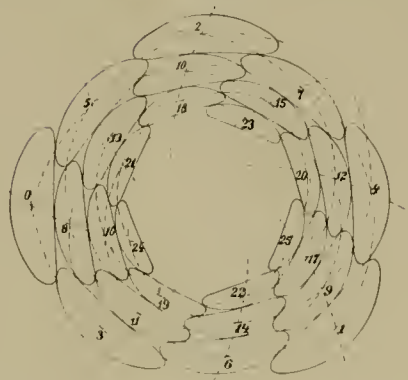


Fig. 9.

Fig. 10.

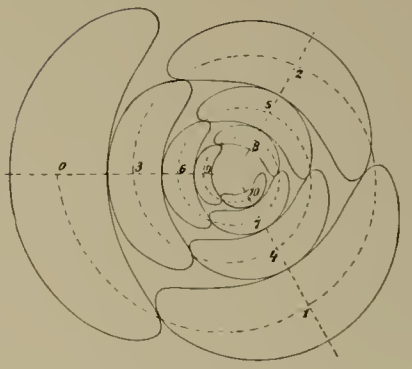


Fig. 11.

Fig. 12.

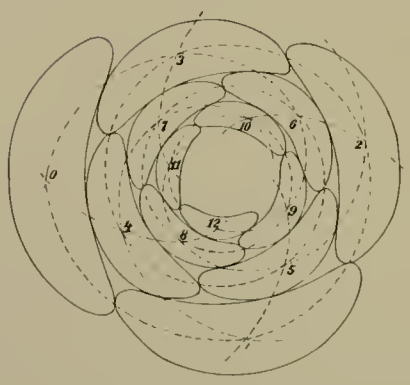


Fig. 13.

Fig. 14.

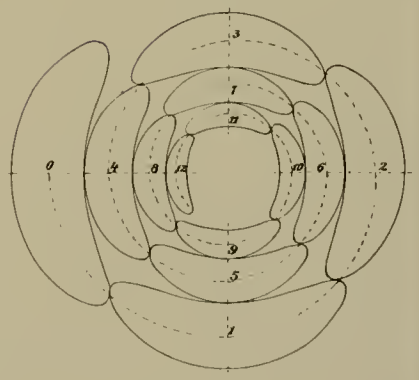
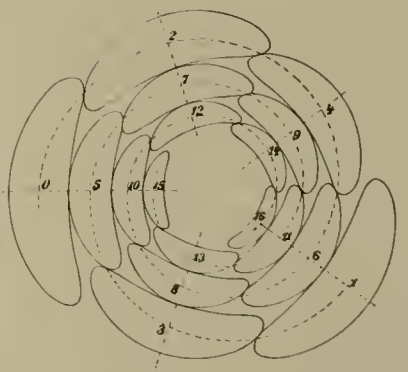


Fig. 15.



Verlag von Gustav Fischer, Jena.

Fig. 1.

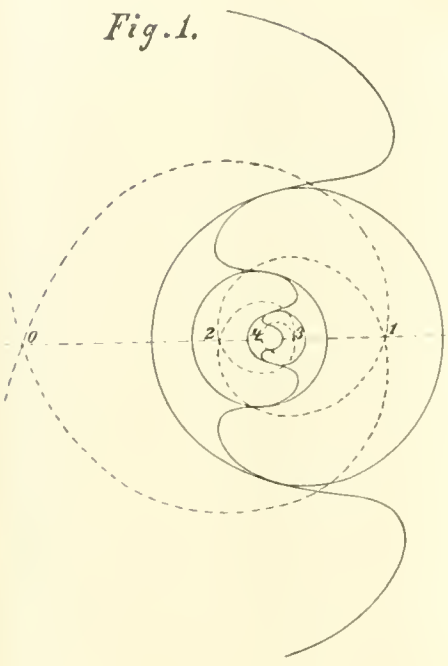


Fig. 5.

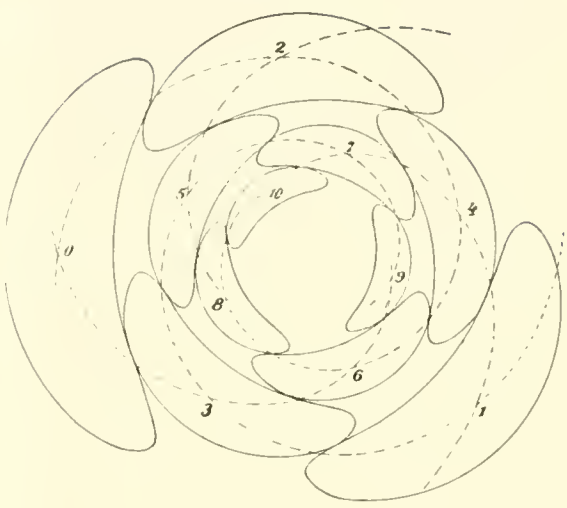


Fig. 6.

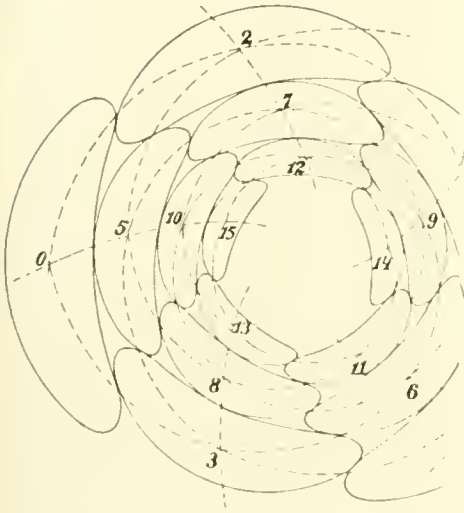


Fig. 10.

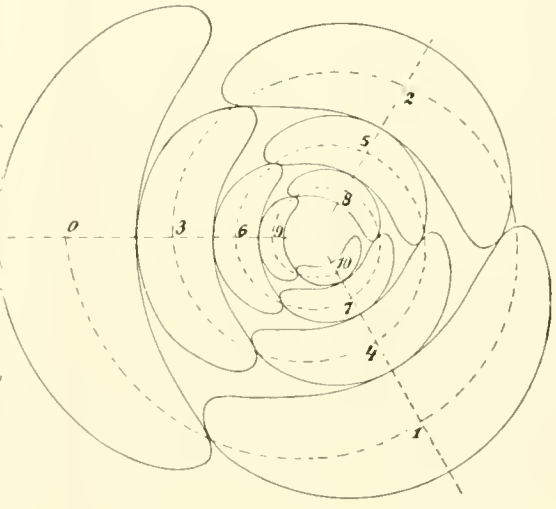
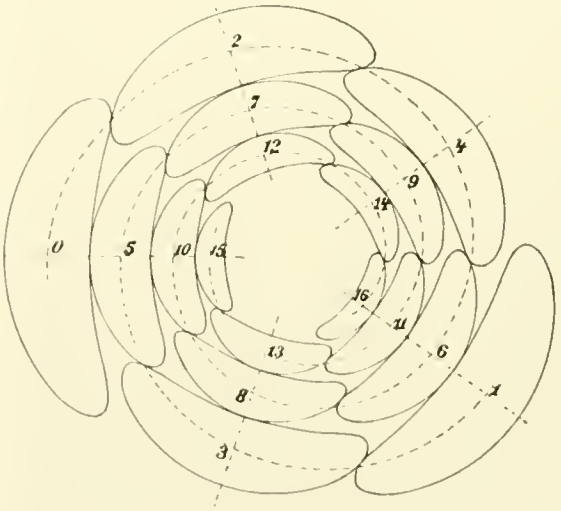


Fig. 11.

Fig. 15.



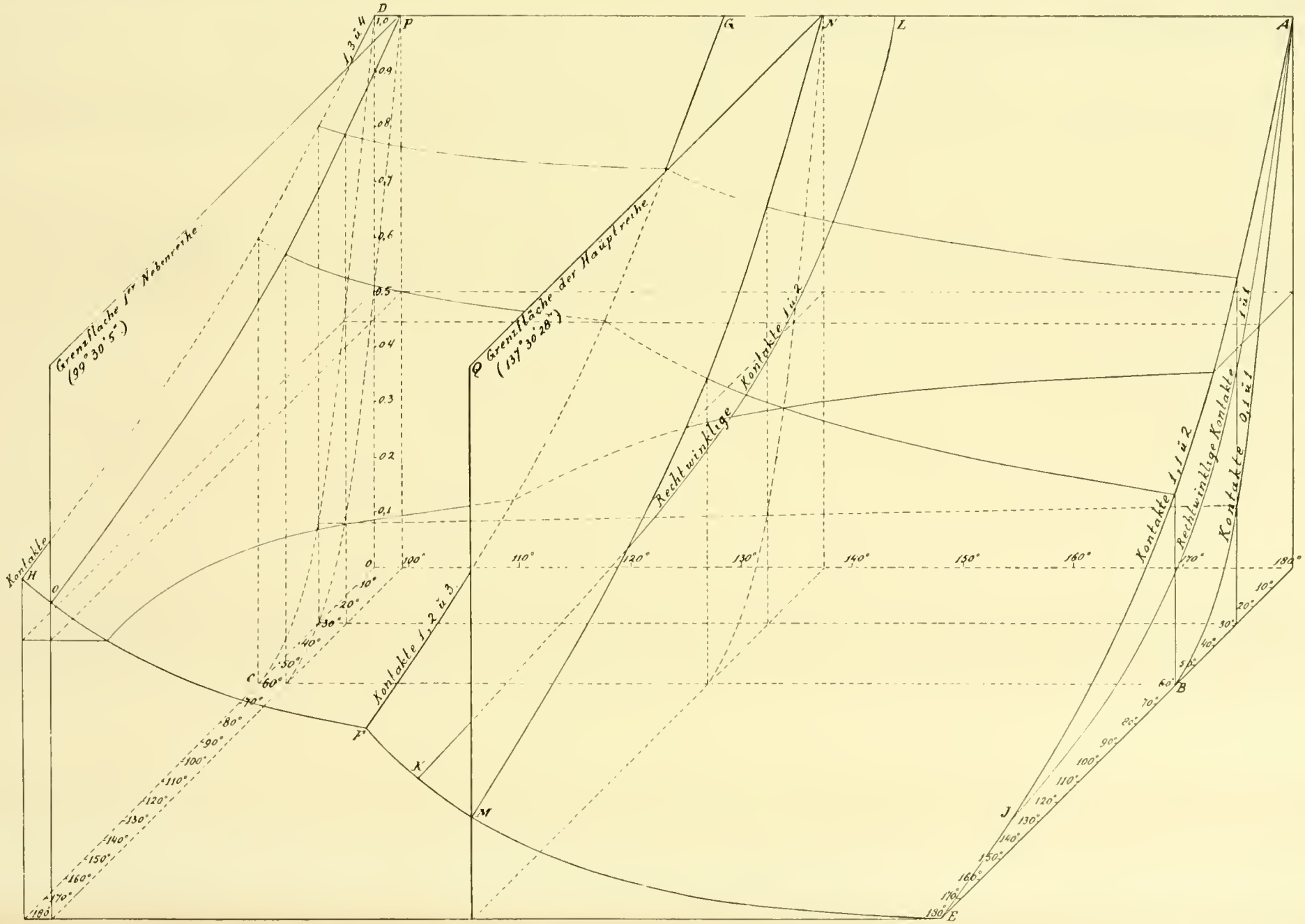

D
P
G
N
L
A
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
1 ü 3
Grenzfläche für Nebenreihe
(99° 30' 5")
Grenzfläche der Hauptreihe
(137° 30' 28")
Kontakte
H
O
C
F
K
M
J
B
E
Kontakte 1 ü 2 ü 3
Rechtwinklige Kontakte 1 ü 2
Kontakte 1 ü 2
Rechtwinklige Kontakte 0,1 ü 1
0
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
100°
110°
120°
130°
140°
150°
160°
170°
180°

Fig. 1.

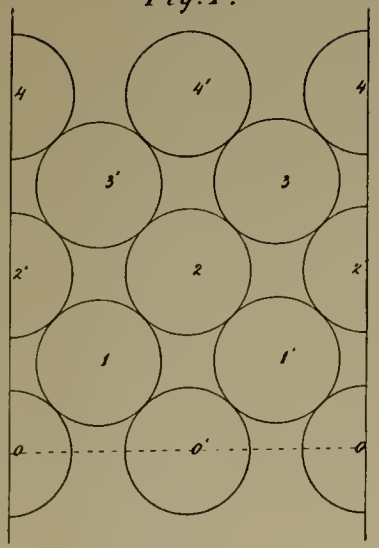


Fig. 2.

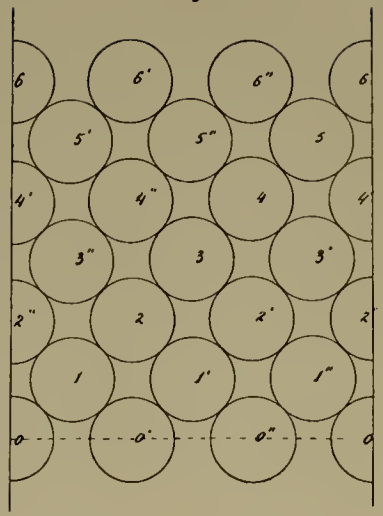


Fig. 3.

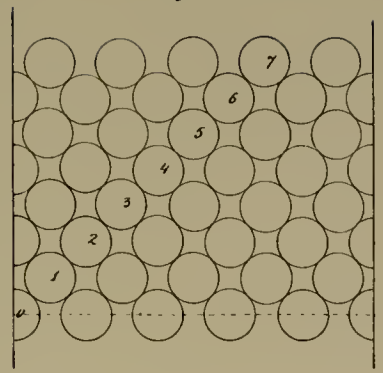


Fig. 4.

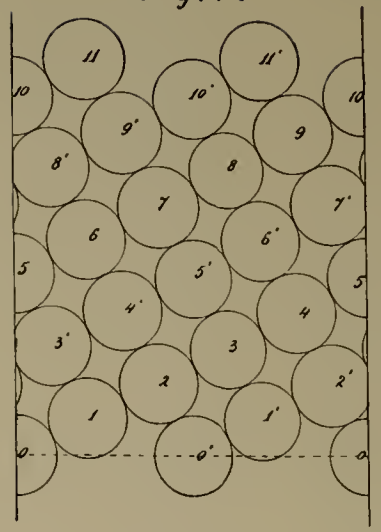


Fig. 5.

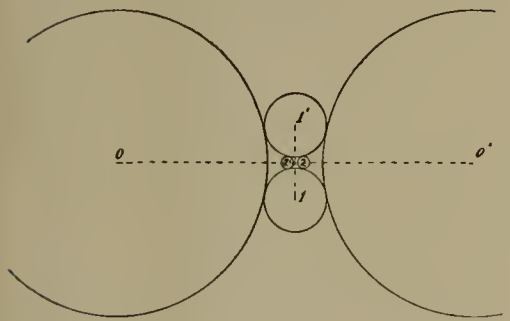


Fig. 6.

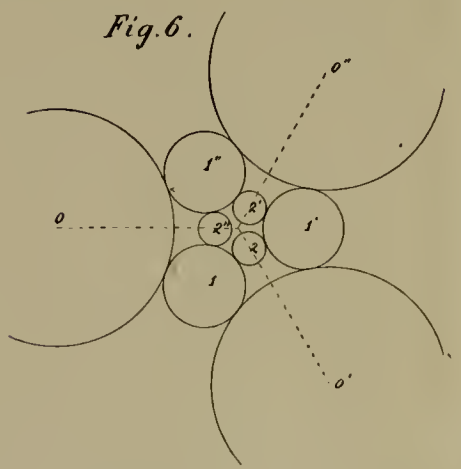


Fig. 7.

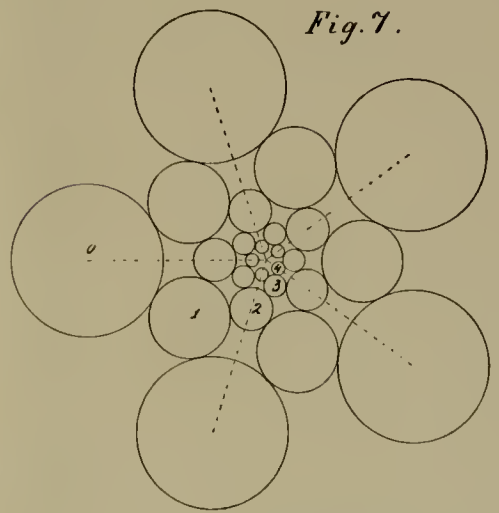


Fig. 8.

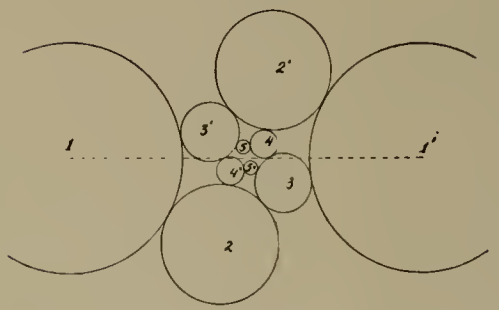


Fig. 9.

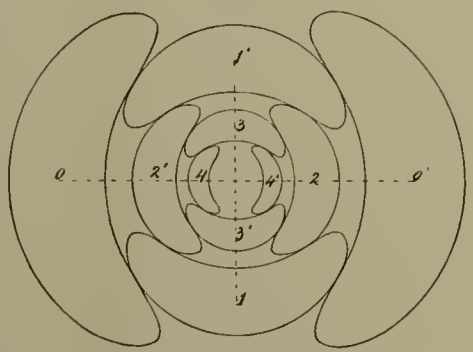


Fig. 10.

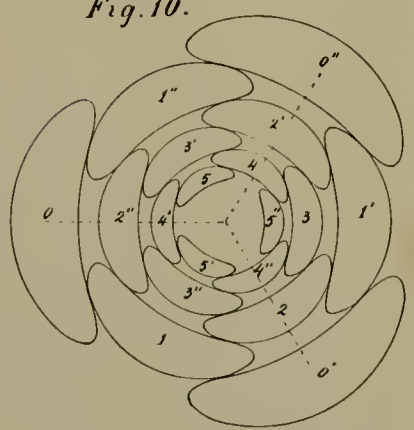


Fig. 11.

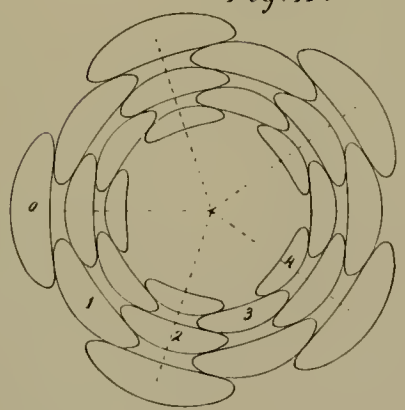
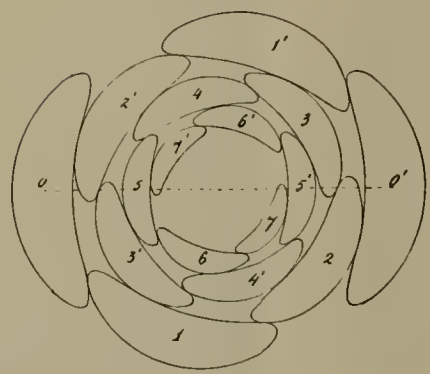
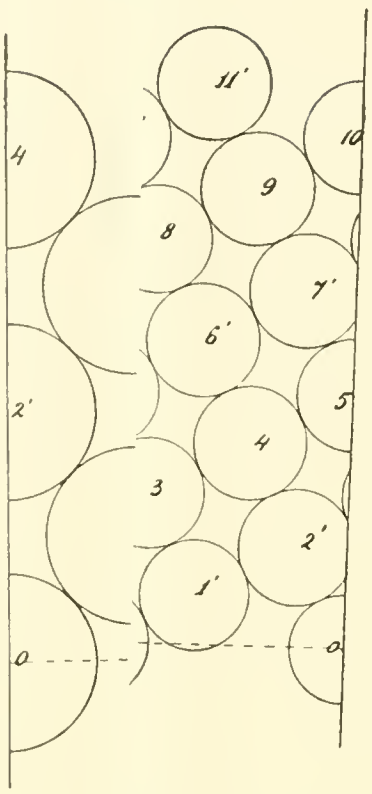


Fig. 12.

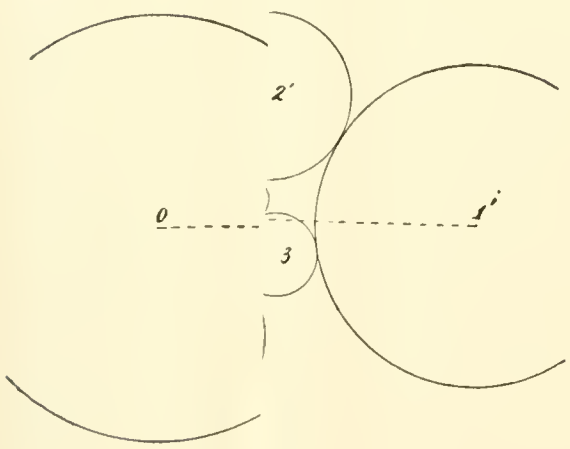


Verlag von Gustav Fischer, Jena.

4.



8.



2.

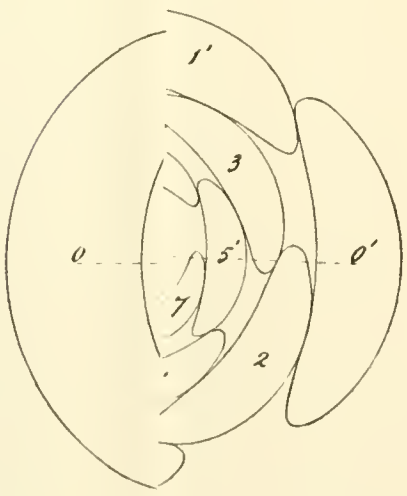


Fig. 1.

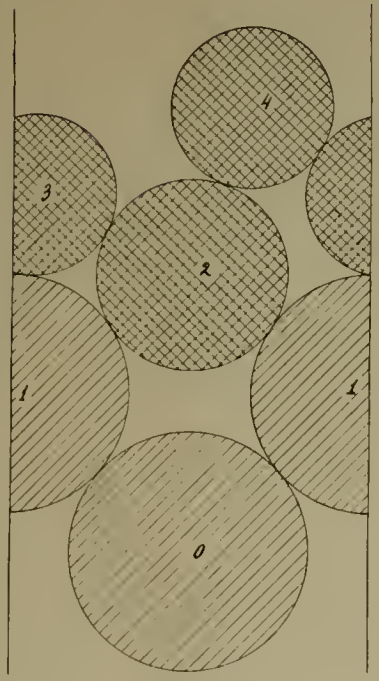


Fig. 2.

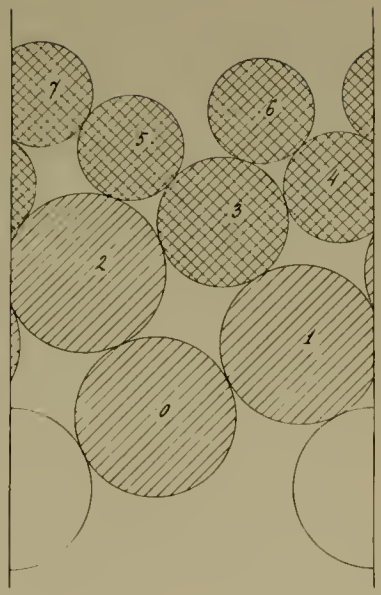


Fig. 3.

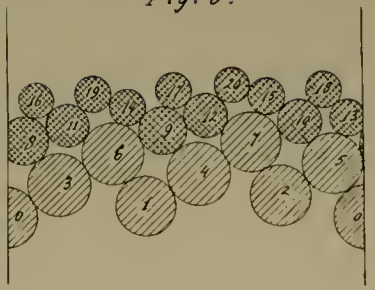


Fig. 6.

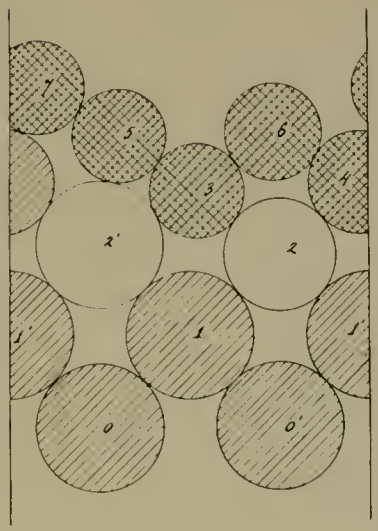


Fig 4.

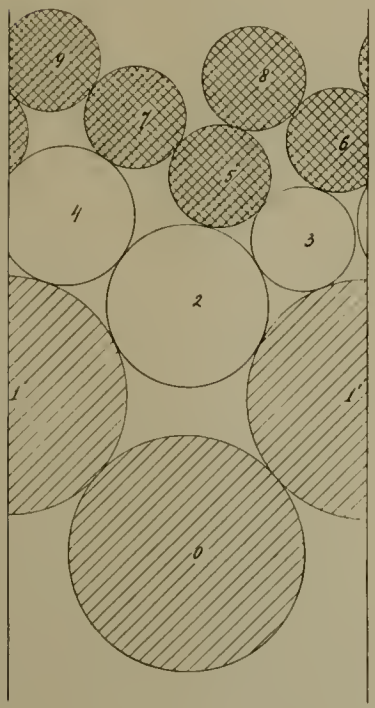


Fig 5.

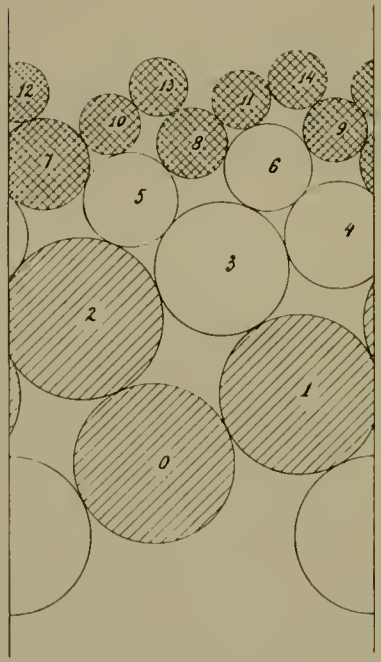
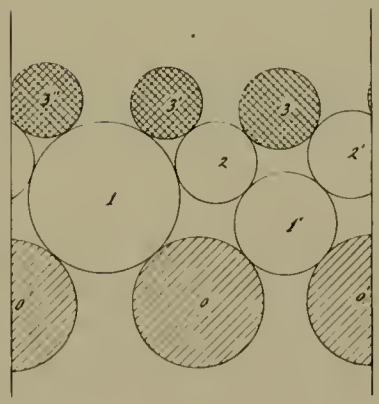


Fig 7



Verlag von Gustav Fischer, Jena.

Fig. 1

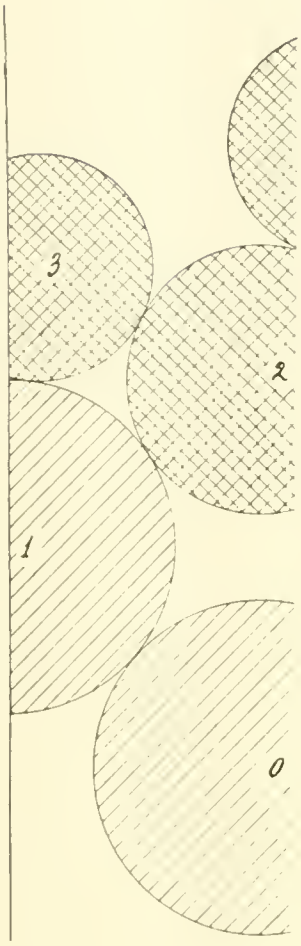


Fig. 4

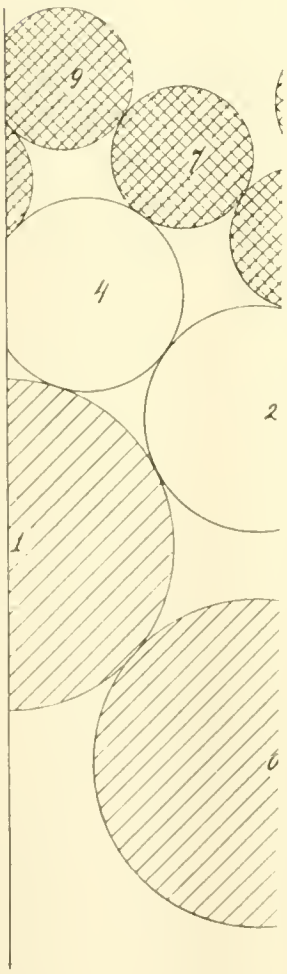


Fig. 1.

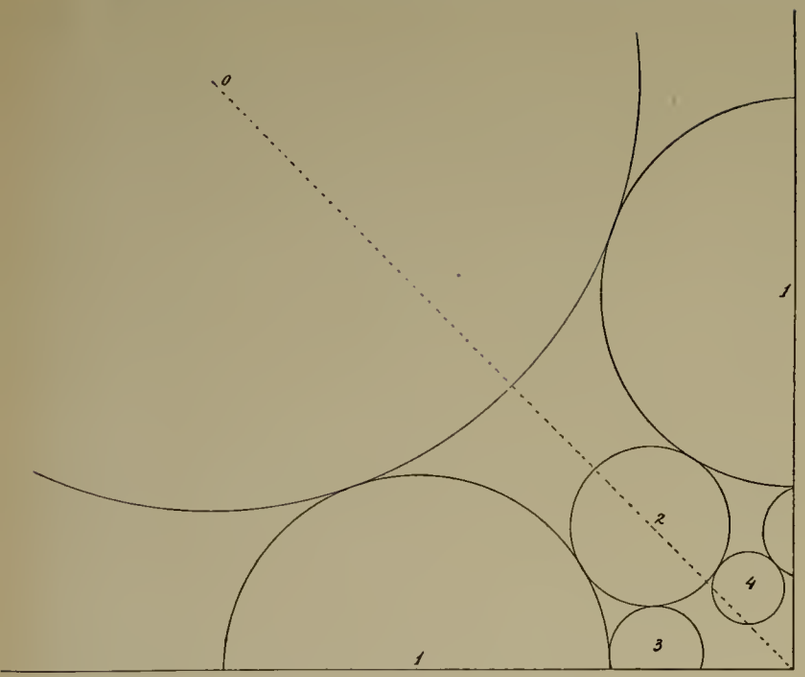


Fig. 3.

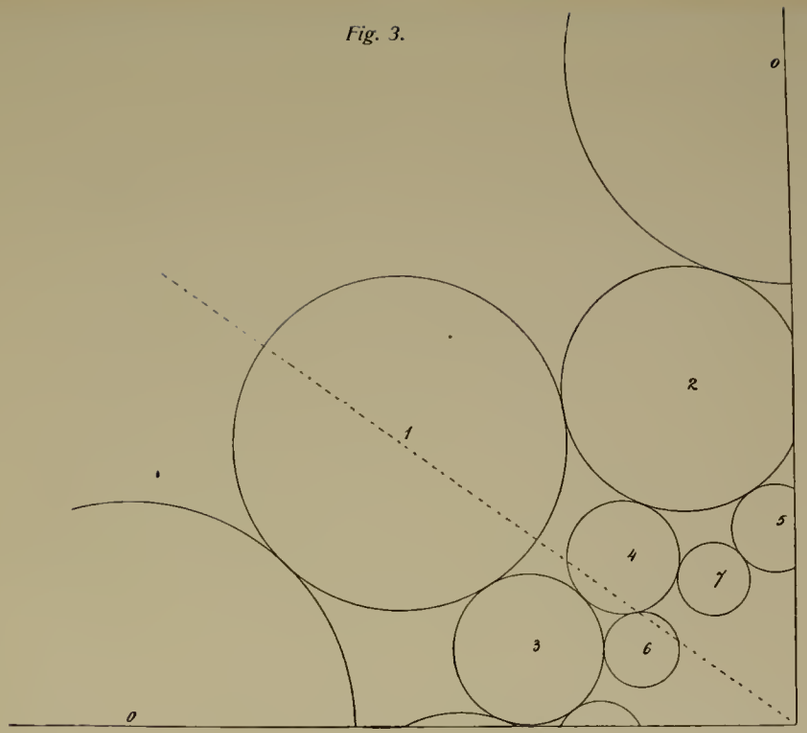


Fig. 7.

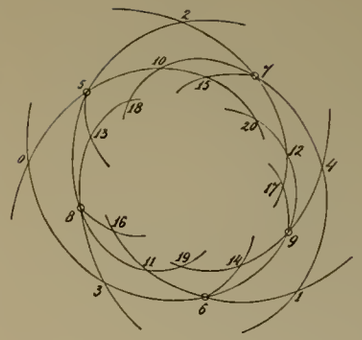


Fig. 6.

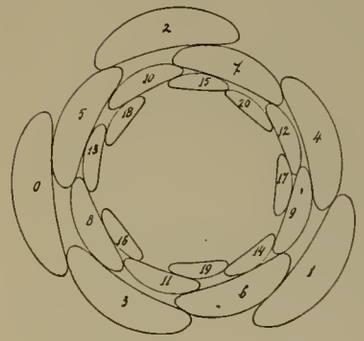


Fig. 2.

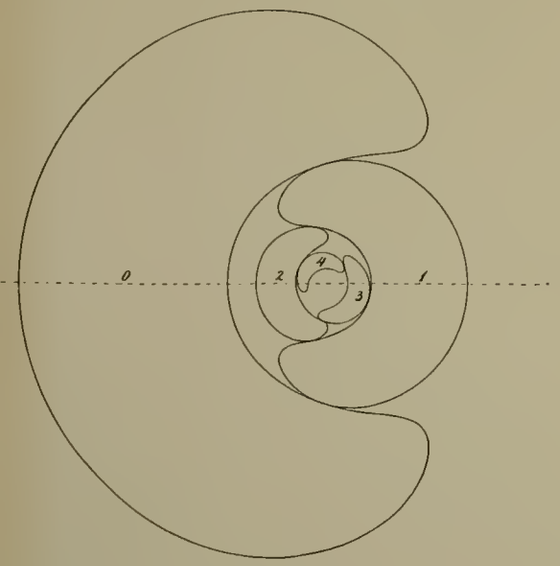


Fig. 4.

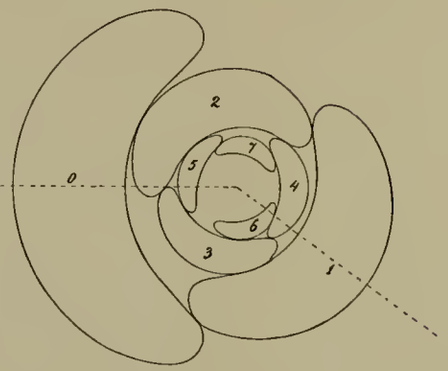
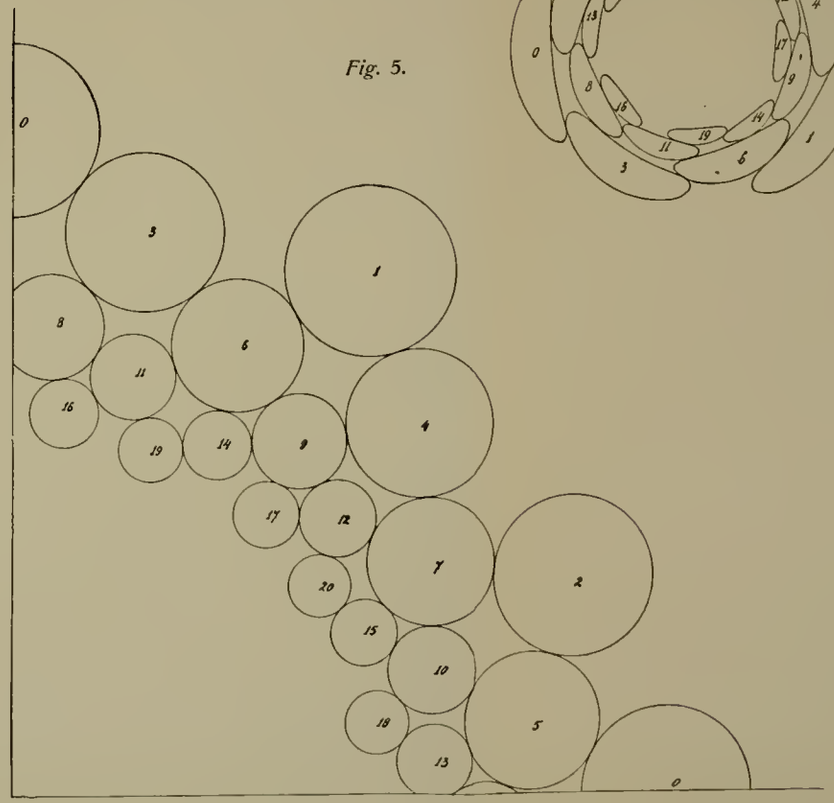


Fig. 5.



Verlag von Gustav Fischer, Jena.

Fig. 7.

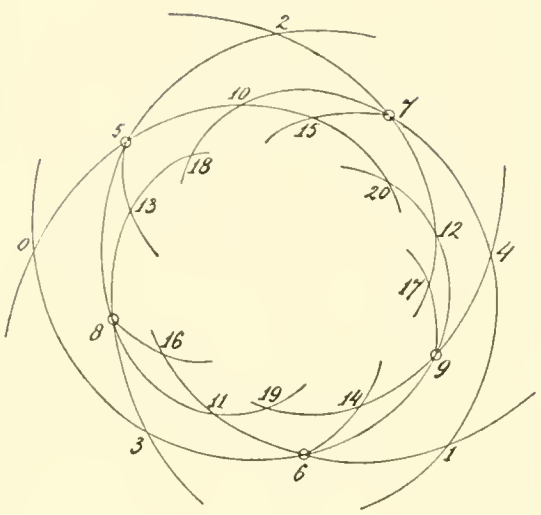
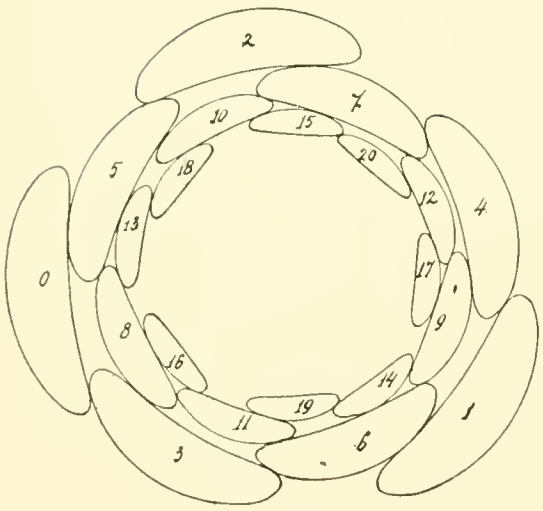

2
10
7
5
15
18
20
13
12
4
0
17
8
16
9
11
19
14
3
6
1

Fig. 6.


2
7
10
15
5
18
20
12
4
13
0
17
9
8
16
14
19
11
1
3
6

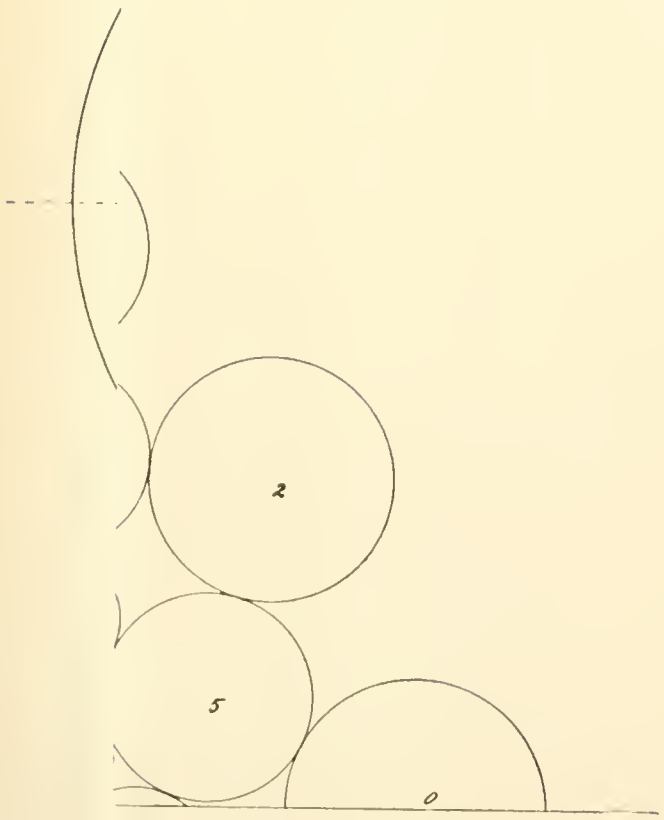

2
5
0

Fig. 1.

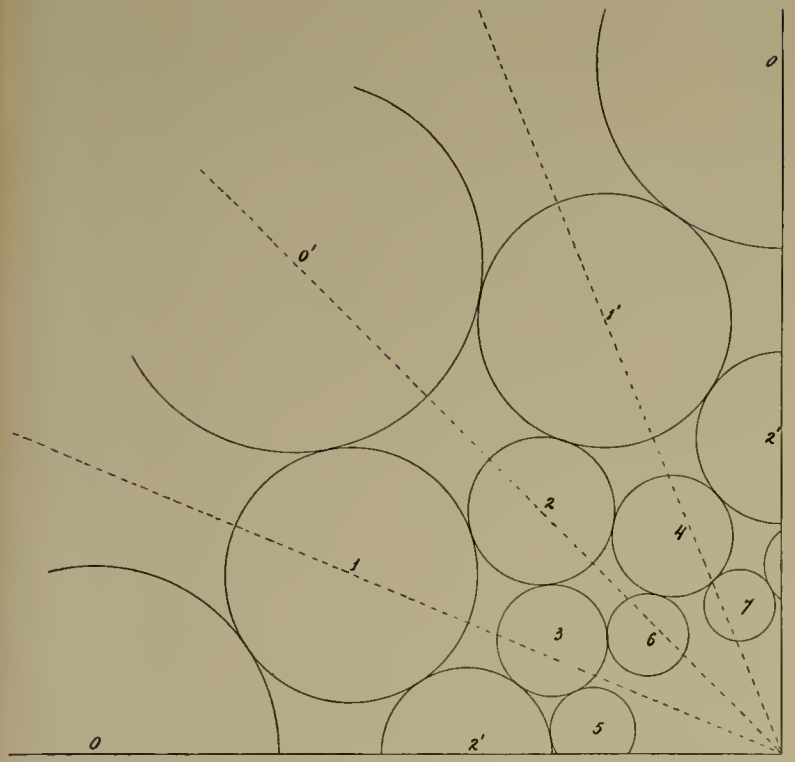


Fig. 2.

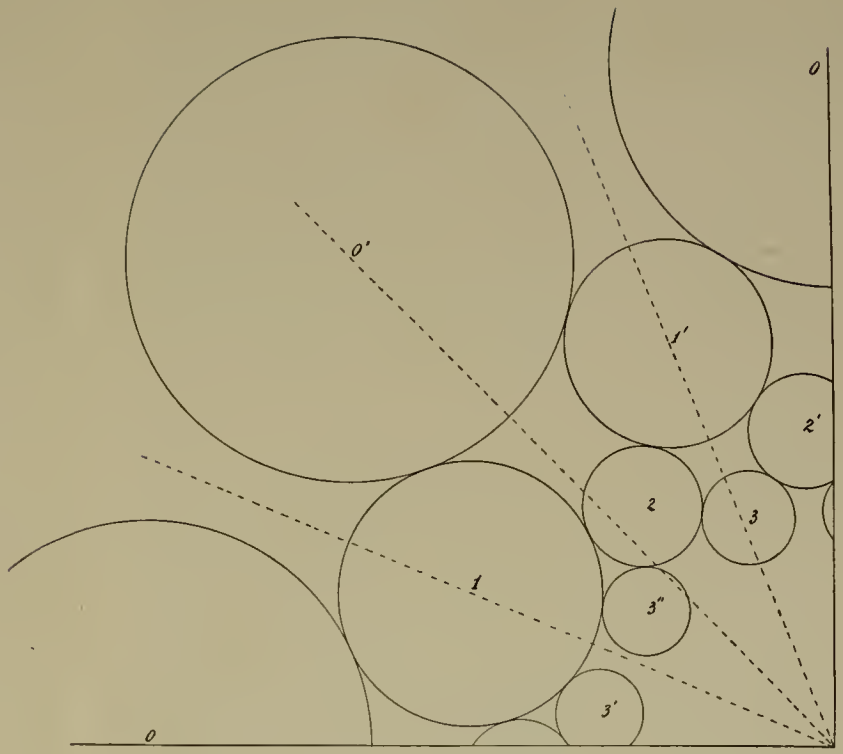


Fig. 3.

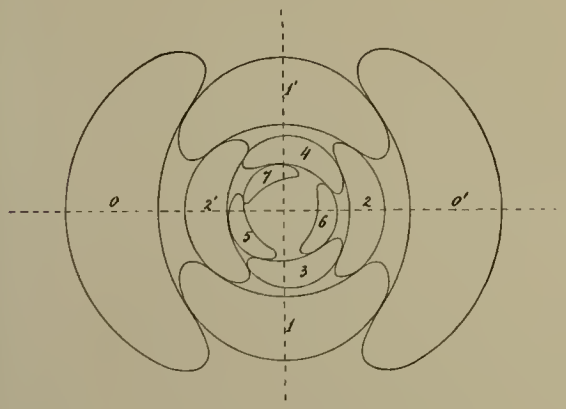
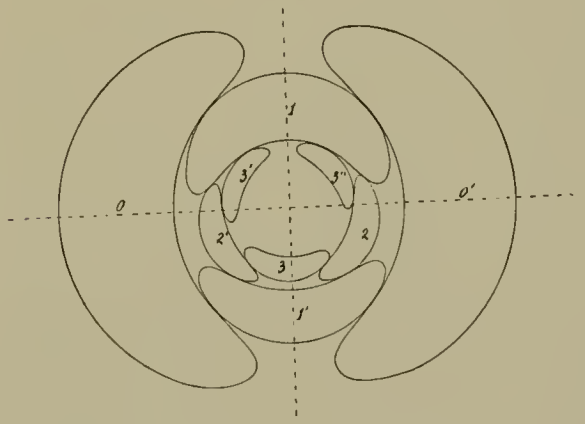


Fig. 4.



Verlag von Gustav Fischer, Jena.

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

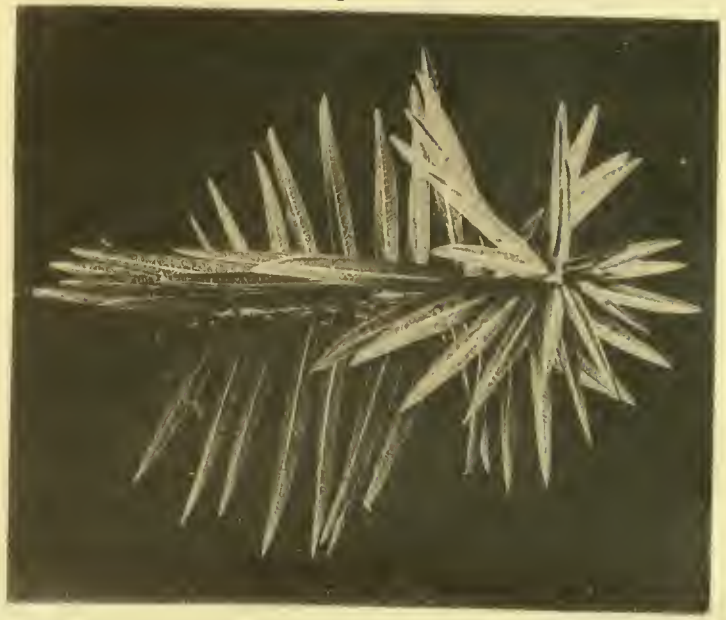


Fig. 6